胡金德 谭泽光 梁 恒 考研数学系列

命题人与阅卷人联袂打造

# 2018考研数学考前冲刺10套卷（数学一）

清华大学 胡金德
清华大学 谭泽光 主编
清华大学 梁 恒

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

胡金德 谭泽光 梁恒 考研数学系列

# 2018考研数学

# 考前冲刺10套卷

## （数学一）

清华大学 胡金德
清华大学 谭泽光 主编
清华大学 梁 恒

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

## 内 容 简 介

本书是专门为参加2018年全国硕士研究生入学统一考试(数学一)的考生量身打造的,是一本为考生在考前冲刺阶段提供检查复习、体验实战、熟悉考情、提高成绩的辅导用书。本书作为本系列丛书的收尾篇,是对考研数学真题的全真模拟。编者从事考研数学辅导工作十多年,对考研真题的命题趋势以及命题"陷阱"有深入的把握,望此书能对广大考生有所裨益。

**图书在版编目(CIP)数据**

2018考研数学考前冲刺10套卷. 数学一 / 胡金德,谭泽光,梁恒主编. -- 北京 : 北京航空航天大学出版社,2017.6

ISBN 978-7-5124-2412-8

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①胡… ②谭… ③梁… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—习题集 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第110403号



**2018考研数学考前冲刺10套卷(数学一)**

胡金德 谭泽光 梁 恒 主编

责任编辑 杨 昕

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191) http://www.buaapress.com.cn

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱:bhwaiyu@163.com 邮购电话:(010)82316936

北京兴华昌盛印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1 092 1/16 印张:9.25 字数:237千字

2017年6月第1版 2017年6月第1次印刷

ISBN 978-7-5124-2412-8 定价:24.80元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题,请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

# 前　　言

本书是为参加2018年全国硕士研究生入学统一考试(数学一)的考生编写的辅导用书，供考生在考前冲刺阶段体验实战、熟悉考情、查漏补缺、提高成绩之用。

编者从事考研数学辅导工作十多年，对考研真题的命题趋势以及命题“陷阱”有深入的把握，对广大考生在考研数学复习过程中所遇到的问题有深刻的体会，此次编写这10套试卷主要遵循以下两条原则：

**第一，争取做到与真题试卷“神似”。**在命题上严格按照考研数学大纲的要求，遵循考研数学命题的规律，以近年来命题的趋势为依据；在题型、题量上与真题试卷完全一致；在题目中体现考研命题的指导思想，明确考查内容的重点；在试题形式上尽量与真题保持高度的相似性。

**第二，争取做到与真题试卷“既形似又有发展”。**在试题的选撰上“神似”，而不“雷同”。在10套模拟卷中，我们尽量不用已经在历年考研试卷中出现过的真题。模拟卷中试题的构成分为三种情况：第一种，题目与真题“神似形似”，即考查内容、形式与真题大同小异，这主要出现在一些重点和常考内容的考题中；第二种，题目与真题“神似形非”，即对考生能力的考查，与真题相似，但与已有真题形式有所不同，这种考题对扩展视野，增强考生应变能力，提高得分概率是有作用的；第三种，少数难一点的题目，内容不超纲，但在数学能力要求上有所提高，这是为了考查和提高考生的数学能力，帮助那些想争取高分的考生更上一层楼。

做模拟题是考前复习的最后阶段，最好从考前三个月开始，10套卷子每周做1套。我们强烈建议考生将每套试题都当做真正的考研试题，选择安静的“考试”环境，严格把控时间，独立完成，千万不要边做题边对答案。“考试”后再对答案，给自己打分；对考题和自己的答卷进行分析和消化，明确自己的强项和弱项，采取措施查漏补缺，以达到实战模拟的效果。如此10个循环下来，功夫不负有心人，要取得考研数学的理想成绩是不难实现的。

最后，祝愿每一位考生都能不负努力，考上理想的学府。

编　者

2017年5月

# 目　录

# 模拟试题(一)

**一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.**

(1) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导,二阶导数 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恰有一个零点,则对任意给定的一条直线 $L$,曲线 $y=f(x)$ 与直线 $L$ ( )

(A) 至少有两个不同的交点. (B) 至少有三个不同的交点.

(C) 至多有两个不同的交点. (D) 至多有三个不同的交点.

(2) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶导数,且 $f(0)=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{1-\cos x}=100$,则 ( )

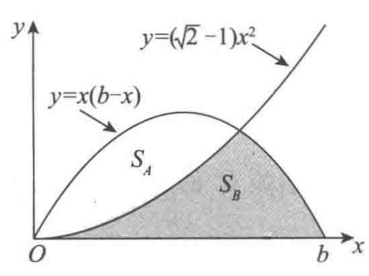
(A) $f''(0)\neq 0$,且点$[0,f(0)]$是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B) $f''(0)=0$,且点$[0,f(0)]$是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(C) $f'(0)=0$,$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(D) $f'(0)=0$,$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(3) 如右图所示,抛物线 $y=(\sqrt{2}-1)x^2$ 把由曲线 $y=x(b-x)$ $(b>0)$ 与 $x$ 轴所构成的区域面积分为 $S_A$ 与 $S_B$ 两部分,则 ( )




(A) $S_A<S_B$.

(B) $S_A=S_B$.

(C) $S_A>S_B$.

(D) $S_A$ 与 $S_B$ 的大小关系与 $b$ 的数值有关.

(4) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-a)^n}{n}$ 在点 $x=2$ 处收敛,则 $a$ 的取值范围是 ( )

(A) $1\leqslant a\leqslant 3$. (B) $1<a\leqslant 3$.

(C) $2<a\leqslant 3$. (D) $2\leqslant a<3$.

(5) 设 $n$ 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}5&3&0&\cdots&0&0\\2&5&3&\cdots&0&0\\0&2&5&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&5&3\\0&0&0&\cdots&2&5\end{vmatrix}$,则 $\dfrac{D_n-3D_{n-1}}{D_{n-1}-3D_{n-2}}=$ ( )

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）4.

(6) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}}(i=1,2,3,4)$，其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2=(-3,-2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(-2,-1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_4=(-3,0,1)^{\mathrm{T}}$，则不能与对角矩阵相似的矩阵是　（　）

（A）$\boldsymbol{A}_1$.　　（B）$\boldsymbol{A}_2$.　　（C）$\boldsymbol{A}_3$.　　（D）$\boldsymbol{A}_4$.

(7) 设一批零件的次品率为0.01，若用泊松分布近似，则100个零件中最多只有一个次品的概率约为　（　）

（A）$e^{-1}$.　　（B）$2e^{-1}$.　　（C）0.5.　　（D）$\dfrac{e^{-1}}{2}$.

(8) 设 $(X,Y)$ 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=Ae^{-x}(x>0,0<y<2)$，则 $A=$　（　）

（A）0.5.　　（B）0.75.　　（C）0.25.　　（D）1.

**二、填空题：9 ~ 14小题，每小题4分，共24分.**

(9) 设 $f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内可导，当 $x\neq 0$ 时，$f(x)\neq 0$，已知 $f(0)=0, f'(0)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1-\dfrac{1}{2}f(x)\right]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=$ ________.

(10) 定积分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x\,(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$ 的值为________.

(11) 设 $f(x,y)$ 二阶连续可导，$\left.\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right|_{(1,0)}=2$. 若 $z(x,y)=f(x,xy)$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,0)}=$ ________.

(12) 设 $D_t=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2\leqslant t^2,t>0\}$，$f(x,y)$ 在 $D_t$ 上连续，在 $D_t$ 内可微，$f(0,0)=1$，$D_t$ 的正向边界为 $C_t$. 若 $f(x,y)$ 在 $D_t$ 上满足方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=kf(x,y)$，设曲线 $C_t$ 的外法线矢量为 $\boldsymbol{n}_0(t)$，则极限 $\lim\limits_{t\to 0}\displaystyle\oint_{C_t}\frac{f_x\mathrm{d}y-f_y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=$ ________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$，三阶方阵 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 满足 $\boldsymbol{AXB}^{-1}-\boldsymbol{AYB}^{-1}=\boldsymbol{E}, \boldsymbol{XY}-\boldsymbol{Y}^2=\boldsymbol{E}$.

则 $\boldsymbol{Y}=$ ________.

(14) 设 $(X,Y)$ 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=2xe^{-xy}\left(0<x<\dfrac{1}{2},y>0\right)$，则在已知 $X=\dfrac{1}{4}$ 的条件下，$Y$ 的条件概率密度函数的表达式为________.

**三、解答题：15 ~ 23小题，共94分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

(15)（本题满分10分）

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=1, f'(0)=2$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)]^{\frac{2x}{1-\cos x}}$.

(16)(本题满分 10 分)

求解二阶微分方程的定解问题$\begin{cases}\cos y\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\sin y\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\\ y(-1)=\dfrac{\pi}{6},\quad y'(-1)=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

(17)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在$(a,b)$内有定义,且在 $x_0\in(a,b)$ 处可导. 数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$满足条件$a<x_n<x_0<y_n<b$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$. 试求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$.

(18)(本题满分 10 分)

已知 $f(x)$ 可微,积分 $I=\int_L(x+xy\sin x)\mathrm{d}x+\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}y$ 与路径无关,且 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

(Ⅰ)求函数 $f(x)$ 的表达式;

(Ⅱ)若 $\mathrm{d}u=(x+xy\sin x)\mathrm{d}x+\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}y$,求函数 $u=u(x,y)$;

(Ⅲ)若积分路径 $L$ 为从 $A(\pi,1)$ 到 $B(2\pi,0)$ 的任意路径,求积分 $I$ 的值.

(19)(本题满分 10 分)

设空间区域 $\Omega$ 由 $x=\sqrt{y^2+z^2}$ 与 $x=\sqrt{4-y^2-z^2}$ 围成,求 $\Omega$ 的形心坐标.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组:

(ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,2,b)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,a-1,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,4,2)^{\mathrm{T}}$;

(ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1=(2,2b,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(6,6,a+4)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=(-4,b-5,-2)^{\mathrm{T}}$.

问:$a,b$ 取何值时,$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,且(ⅰ)与(ⅱ)等价;

$a,b$ 取何值时,$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,但(ⅰ)与(ⅱ)不等价.

(21)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶实矩阵,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$. 证明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵;

(Ⅱ)设 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均是 $m\times n$ 阶实矩阵,$\mathrm{r}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=n$. 证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$ 是正定矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

$A,B$ 为随机事件,$P(A)=\dfrac{2}{3}$,$P(B\mid A)=\dfrac{1}{6}$,$P(A\mid B)=\dfrac{1}{3}$,令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{ 不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\ 0 & B\text{ 不发生}.\end{cases}$$

(Ⅰ)求 $X,Y$ 的联合分布律;

(Ⅱ)若 $Z=X+aY$,求 $a$ 取何值时 $X$ 与 $Z$ 不相关.

(23)（本题满分 11 分）

设某公司每周的利润服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.

（Ⅰ）如果方差 $\sigma^2=9$，对参数 $\mu$ 作置信度为 95% 的双侧对称置信区间估计，则欲使置信区间的长度不超过 2，至少应该取容量多大的样本？

（Ⅱ）如果方差未知，则随机抽测 9 周的数据，得数据的均值和标准差分别为 4 万元和 0.5 万元. 依据抽测数据，试以 95% 的把握估计最小平均利润.

（$u$ 和 $t$ 分布的上侧分位数参考值为 $u_{0.025}=1.96$，$u_{0.05}=1.65$，$t_{0.025}(8)=2.31$，$t_{0.05}(8)=1.86$，$t_{0.025}(9)=2.26$，$t_{0.05}(9)=1.83$.）

# 模拟试题(一) 答案与解析

**(1)【答案】** D

**【解析】** 举特例：$y = x^4$，则选项 A 和选项 B 错误.

由于 $f''(x)$ 恰有一个零点，函数图形可能是由凸、凹两部分曲线构成的，因此与直线至多有三个交点. 因此选项 D 是正确的.

下面用反证法证明：若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $L: y = kx + b$ 有四个不同的交点. 考察辅助函数 $\varphi(x) = f(x) - kx - b$，则 $\varphi(x)$ 有四个不同的零点. 由罗尔定理可知，$\varphi'(x) = f'(x) - k$ 必有三个不同的零点；$\varphi''(x) = f''(x)$ 必有两个不同的零点. 此与题设条件矛盾，结论得证.

---

**(2)【答案】** B

**【解析】** $100 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{1-\cos x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x^2} \Rightarrow f'(0) = 0$，且由极限的保号性知，在 $x = 0$ 的某邻域内 $\dfrac{f'(x)}{x^2} > 0$，从而 $f'(x)$ 为正，所以 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的驻点，但不是极值点. 进一步计算

$$100 = 2\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{f'(x) - f'(0)}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{f''(0)}{x},$$

故 $f''(0) = 0$，且由极限的保号性知，在 $x = 0$ 两侧 $f''(x)$ 变号，所以点 $[0, f(0)]$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

---

**(3)【答案】** B

**【解析】** 为计算面积 $S_A$，先求两曲线交点的横坐标.

由 $\begin{cases} y = (\sqrt{2}-1)x^2, \\ y = x(b-x)\,(b>0) \end{cases}$ 得 $x(\sqrt{2}x - b) = 0$，即 $x = 0$ 或 $x = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$. 于是

$$S_A = \int_0^{\frac{b}{\sqrt{2}}}[x(b-x) - (\sqrt{2}-1)x^2]\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{b}{\sqrt{2}}}(bx - \sqrt{2}x^2)\mathrm{d}x = \left(\frac{b}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}x^3\right)\Bigg|_0^{\frac{b}{\sqrt{2}}} = \frac{b^3}{12},$$

$$S_B = \int_0^b x(b-x)\mathrm{d}x - S_A = \left(\frac{b}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^b - \frac{b^3}{12} = \frac{b^3}{12}.$$

可见有 $S_A = S_B$.

---

**(4)【答案】** B

**【解析】** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-a)^n}{n}$ 的收敛域为 $-1 \leqslant x - a < 1$.

级数在点 $x=2$ 处收敛 $\Rightarrow -1\leqslant 2-a<1 \Rightarrow -3\leqslant -a<-1$，即 $1<a\leqslant 3$.

**(5)【答案】** B

**【解析】** 将 $D_n$ 按第一列展开，得

$$D_n=5D_{n-1}-2\begin{vmatrix}3&0&0&\cdots&0&0\\2&5&3&\cdots&0&0\\0&2&5&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&5&3\\0&0&0&\cdots&2&5\end{vmatrix}=5D_{n-1}-6D_{n-2},$$

$$D_n-3D_{n-1}=2D_{n-1}-6D_{n-2}=2(D_{n-1}-3D_{n-2}),$$

则 $\dfrac{D_n-3D_{n-1}}{D_{n-1}-3D_{n-2}}=2$.

**【注】** 题设 $D_n$ 应对 $n=3,4,\cdots,n$ 成立，取特例 $n=3$，则

$$D_1=5,\quad D_2=\begin{vmatrix}5&3\\2&5\end{vmatrix}=19,\quad D_3=\begin{vmatrix}5&3&0\\2&5&3\\0&2&5\end{vmatrix}=65,$$

$$\frac{D_3-3D_2}{D_2-3D_1}=\frac{65-3\times19}{19-3\times5}=\frac{8}{4}=2.$$

**(6)【答案】** D

**【解析】** $\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}}$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_i)=1(i=1,2,3,4)$. $\lambda=0$ 至少是 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,3,4)$ 的二重特征值，$\boldsymbol{A}_i$ 的第 3 个特征值为

$$\lambda_3=\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\begin{cases}5, & i=1,\\1, & i=2,\\-1, & i=3,\\0, & i=4.\end{cases}$$

对于 $\boldsymbol{A}_4$，$\lambda=0$ 是三重特征值，但 $\boldsymbol{A}_4\neq\boldsymbol{0}$. 对应 $\lambda=0$ 的线性无关特征向量不超过 2 个，故 $\boldsymbol{A}_4$ 不能相似于对角矩阵.

对于其余的 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,3)$，$\lambda=0$ 均是二重特征值，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_i)=1\ (i=1,2,3)$，所以 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,3)$ 均有两个对应于 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量，故均能相似于对角矩阵.

**(7)【答案】** B

**【解析】** 当 $n$ 很大、$p$ 很小时，二项分布 $B(n,p)$ 的随机变量近似服从参数为 $np$ 的泊松分布. 100 个零件中的次品数服从二项分布 $B(100,0.01)$，该随机变量近似服从参数为 $100\times0.01=1$ 的泊松分布 $X$，故

$$\text{所求概率}\approx P(X\leqslant1)=P(X=0)+P(X=1)=\mathrm{e}^{-1}+\frac{1^1}{1!}\mathrm{e}^{-1}=2\mathrm{e}^{-1}.$$

(8)【答案】 A

【解析】 由概率密度的性质,得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{+\infty}A\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_{0}^{2}\mathrm{d}y=2A\Rightarrow A=\frac{1}{2}.$$

(9)【答案】 $\mathrm{e}^{-1}$

【解析】

$$\lim_{x\to0}\left[1-\frac{1}{2}f(x)\right]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=\lim_{x\to0}\left[1-\frac{1}{2}f(x)\right]^{\frac{-2}{f(x)}\cdot\frac{-f(x)}{2\ln(1+x)}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-f(x)}{2\ln(1+x)}}=\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}f'(0)}=\mathrm{e}^{-1}.$$

(10)【答案】 $\frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)$

【解析】

$$\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{x(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}\mathrm{d}x^2\xrightarrow{t=x^2}\frac{1}{2}\int_{1}^{3}\frac{1}{t(1+t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}\frac{1+t-t}{t(1+t)^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\int_{1}^{3}\frac{1}{t(1+t)}\mathrm{d}t-\int_{1}^{3}\frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{1}^{3}\frac{1}{t}\mathrm{d}t-\int_{1}^{3}\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t-\int_{1}^{3}\frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{t}{t+1}\Big|_{1}^{3}+\frac{1}{t+1}\Big|_{1}^{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right).$$

(11)【答案】 2

【解析】

$$z=f(x,xy)\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1(x,xy)+yf'_2(x,xy)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{11}(x,xy)+yf''_{12}(x,xy)+y[f''_{21}(x,xy)+yf''_{22}(x,xy)]$$

$$=f''_{11}(x,xy)+2yf''_{12}(x,xy)+y^2f''_{22}(x,xy)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(1,0)}=f''_{11}(1,0)=2.$$

(12)【答案】 $k\pi$

【解析】

$$\lim_{t\to0}\oint_{C_t}\frac{f_x\mathrm{d}y-f_y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}\oint_{C_t}f_x\mathrm{d}y-f_y\mathrm{d}x=\lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}\iint_{D_t}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{k}{t^2}\iint_{D_t}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{t\to0}k\pi f(\xi,\zeta)$$

$$=k\pi.$$

---

**(13)【答案】** $\begin{bmatrix}4&0&1\\-3&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}$

**【解析】** 由 $\boldsymbol{AXB}^{-1}-\boldsymbol{AYB}^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{E}$ 知,$\boldsymbol{A}$ 可逆,且 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

又由 $\boldsymbol{XY}-\boldsymbol{Y}^2=(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{E}$ 知,$\boldsymbol{Y}$ 可逆,且 $\boldsymbol{Y}^{-1}=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}$.

故 $\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$,其中

$$[\boldsymbol{B}\vdots\boldsymbol{E}]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&1&0&0\\1&2&2&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&-2\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&-1&2\\0&1&0&-1&1&-2\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$=[\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{B}^{-1}]\Rightarrow\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\-1&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\-1&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4&0&1\\-3&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}.$$

---

**(14)【答案】** $\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}y},y>0$

**【解析】** 由联合概率密度,得

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}2x\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y=2,\quad 0<x<\frac{1}{2},$$

则

$$f_{Y|X}\left(y \mid X=\frac{1}{4}\right)=\frac{f_{X,Y}\left(\frac{1}{4},y\right)}{f_X\left(\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}y},\quad y>0.$$

**(15)【解析】** 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}[f(x)]^{\frac{2x}{1-\cos x}}&=\lim_{x\to0}[1+f(x)-1]^{\frac{2x}{1-\cos x}}\\&=\lim_{x\to0}\left\{[1+f(x)-1]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{\frac{2[f(x)-1]x}{1-\cos x}}\\&=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2[f(x)-1]x}{1-\cos x}},\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{2[f(x)-1]x}{1-\cos x}&=\lim_{x\to0}\frac{2[f(x)-1]x}{x^2/2}=4\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}\\&=4\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=4f'(0)=8,\end{aligned}$$

故$\lim\limits_{x\to0}[f(x)]^{\frac{2x}{1-\cos x}}=e^8$.

**【注】** 若按$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2[f(x)-1]x}{x^2/2}=4\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}=4\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{1}=8$计算是不对的，因为此处用洛必达法则的条件不够.

**(16)【解析】** 令$u=\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}=uu'$，原方程化为

$$u\cos y\cdot u'+u^2\sin y=u,$$

$u=0,y=C$不符合初值条件，舍去.

当$u\neq0$时，得到$u'+u\tan y=\dfrac{1}{\cos y}$，解为$u=y'=\cos y(C_1+\tan y)$，由$y(-1)=\dfrac{\pi}{6},y'(-1)=\dfrac{1}{2}$，得$C_1=0$.

再解方程$\dfrac{dy}{dx}=\sin y$得到$\ln|\csc y-\cot y|=t+C_2$，由$y(-1)=\dfrac{\pi}{6}$得出$C_2=1+\ln(2-\sqrt{3})$，所以定解问题的解为

$$\tan\frac{y}{2}=\frac{1-\cos y}{\sin y}=\sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}}=(2-\sqrt{3})e^{x+1}.$$

**(17)【解析】** 本题考查泰勒公式、无穷小的运算，以及导数概念、极限与无穷小的关系.

由 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的可微性，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$，于是

$$f(x_n)=f(x_0)+f'(x_0)(x_n-x_0)+o(x_n-x_0),$$

$$f(y_n)=f(x_0)+f'(x_0)(y_n-x_0)+o(y_n-x_0),$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[f'(x_0)+\dfrac{o(y_n-x_0)}{y_n-x_n}-\dfrac{o(x_n-x_0)}{y_n-x_n}\right]$.

又因为 $a<x_n<x_0<y_n<b$，所以得到

$$0\leqslant\left|\frac{o(y_n-x_0)}{y_n-x_n}\right|\leqslant\left|\frac{o(y_n-x_0)}{y_n-x_0}\right|,\quad 0\leqslant\left|\frac{o(x_n-x_0)}{y_n-x_n}\right|\leqslant\left|\frac{o(x_n-x_0)}{x_n-x_0}\right|,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=f'(x_0)$.

**(18)【解析】** (Ⅰ) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]=\dfrac{\partial}{\partial y}(x+xy\sin x)\Rightarrow x\sin x=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，即

$$\begin{cases}f'(x)-\dfrac{1}{x}f(x)=x^2\sin x,\\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=x\sin x,\\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{x}\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{x}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}x\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=-x\cos x\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow f(x)=x(\sin x-x\cos x-1).$$

(Ⅱ) **思路一:**

$$(x+xy\sin x)\mathrm{d}x+\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}y=(x+xy\sin x)\mathrm{d}x+(\sin x-x\cos x-1)\mathrm{d}y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x+xy\sin x,\quad u=\frac{x^2}{2}-xy\cos x+y\sin x+\varphi(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-x\cos x+\sin x+\varphi'(y)=\sin x-x\cos x-1,$$

$$\varphi'(y)=-1,\quad \varphi(y)=-y+C,$$

故 $u=\dfrac{x^2}{2}-xy\cos x+y\sin x-y+C$，其中 $C$ 为任意常数.

**思路二:**

$$u=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x+xy\sin x)\mathrm{d}x+(\sin x-x\cos x-1)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x x\,\mathrm{d}x+\int_0^y(\sin x-x\cos x-1)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{x^2}{2} - xy\cos x + y\sin x - y + C.$$

(Ⅲ) **思路一**:积分与路径无关,由 $A$ 到 $B$ 取平行于坐标轴的两条路径,有

$$I = \int_0^1 (-\pi\cos\pi - 1)\mathrm{d}y + \int_\pi^{2\pi} x\mathrm{d}x = (1-\pi) + \frac{3\pi^2}{2}.$$

**思路二**:$I = u(x,y)\Big|_A^B = u(B) - u(A) = (1-\pi) + \dfrac{3\pi^2}{2}.$

---

**(19)【解析】** 记 $\Omega$ 的形心坐标分别为 $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$,根据对称性,得 $\bar{y}=\bar{z}=0$.

利用球坐标$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ z = \rho\sin\varphi\sin\theta \end{cases}$计算 $\bar{x}$,得

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_\Omega x\,\mathrm{d}V}{\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}V} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 \rho\cos\varphi\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho}{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho}$$

$$= \frac{2\pi\cdot 4\cdot\frac{1}{4}}{2\pi\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{4(2-\sqrt{2})}.$$

---

**(20)【解析】** 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 以列向量合并成矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 并作初等行变换,有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & -2 & 4 & 2 & 6 & -4 \\ 2 & a-1 & 4 & 2b & 6 & b-5 \\ b & -1 & 2 & 1 & a+4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & a-1 & 4 & 2b & 6 & b-5 \\ b & -1 & 2 & 1 & a+4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & a+1 & 0 & 2b-2 & 0 & b-1 \\ b-1 & 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right]$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_3',\boldsymbol{\beta}_1',\boldsymbol{\beta}_2',\boldsymbol{\beta}_3').$$

当 $a=-1,b=1$ 时,$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=1$,且 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$.

当 $a\neq-1,b\neq1$ 时,$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$,且 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$.

当 $a=-1,b\neq1$ 时,

$$(\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_3',\boldsymbol{\beta}_1',\boldsymbol{\beta}_2',\boldsymbol{\beta}_3')=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&2&1&3&-2\\0&0&0&2b-2&0&b-1\\b-1&0&0&0&0&0\end{array}\right],$$

此时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=2$，但 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出. $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$与$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$不等价.

当 $a\neq-1,b=1$ 时，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_3',\boldsymbol{\beta}_1',\boldsymbol{\beta}_2',\boldsymbol{\beta}_3')=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&2&1&3&-2\\0&a+1&0&0&0&0\\0&0&0&0&a+1&0\end{array}\right],$$

此时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=2$，但 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出，$\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$与$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$不等价.

**【注】** $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}\Leftrightarrow$ 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 能相互线性表出

$$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\vdots\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t).$$

---

**(21)【证明】** （Ⅰ）$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，因 $r(\boldsymbol{A})=n$，故 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解. 对任意的非零向量 $\boldsymbol{\xi}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，均有$\boldsymbol{A\xi}\neq\boldsymbol{0}$.

记 $\boldsymbol{A\xi}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\neq\boldsymbol{0}$，左乘$(\boldsymbol{A\xi})^{\mathrm{T}}$，得

$$(\boldsymbol{A\xi})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2>0.$$

因 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$ 是任意的 $n$ 维列向量，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

（Ⅱ）$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$ 是实对称矩阵，因为 $r(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=n$，$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ 的列向量组线性无关，$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，故对任意的 $\boldsymbol{\xi}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，均有$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{B\xi}+\boldsymbol{C\xi}\neq\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{B\xi}$ 和 $\boldsymbol{C\xi}$ 不能同时为零，设 $\boldsymbol{B\xi}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，对实对称矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$，有

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{B\xi})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B\xi}+(\boldsymbol{C\xi})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C\xi}\geqslant(\boldsymbol{B\xi})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B\xi}=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2>0$$

（其中$(\boldsymbol{C\xi})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C\xi}\geqslant0$），

故 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$ 是正定矩阵.

**【注】** $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\neq\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$，由（Ⅰ）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 正定推知$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$正定，但并不能推出 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$ 正定.

---

**(22)【解析】** （Ⅰ）由题设知 $P(X=1)=\dfrac{2}{3}$，$P(Y=1\mid X=1)=\dfrac{1}{6}$，$P(X=1\mid Y=1)=\dfrac{1}{3}$.

于是