



西安交通大学 本科“十三五”规划教材

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY



普通高等教育理学类“十三五”规划教材

数学物理方程 (第2版)

申建中 刘峰 编著



西安交通大学出版社

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS



西安交通大学 本科“十三五”规划教材



普通高等教育理学类“十三五”规划教材

数学物理方程 (第2版)

常州大学图书馆 刘峰 编著

藏书章



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是在2010年出版的《数学物理方程》基础上,根据高等学校非数学类理工科专业“数学物理方程”课程的教学要求修订再版的。本次修订保持了第1版教材的结构框架,较系统地介绍了偏微分方程定解问题的建立、分离变量法、积分变换法、格林函数法、特征线法和勒让德多项式等内容。除了在原有内容上做了较大的修改和完善外,根据教学的发展变化,增加了基于MATLAB的定解问题数值求解内容,以便加强读者对定解问题及其解的性质的直观理解。

本书以解的结构为主线,比较系统地介绍了求解偏微分方程定解问题的基本思想和主要方法。本书既可作为高等学校相关专业本科生和研究生的教材或参考书,也可供教师和科学技术工作者阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/申建中,刘峰编著. —2版. —西安:西安交通大学出版社, 2018.2(2018.9重印)
西安交通大学“十三五”规划教材
ISBN 978-7-5693-0416-9

I. ①数… II. ①申… ②刘… III. ①数学物理方程-高等学校-教材
IV. ①0411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第024411号

书 名 数学物理方程(第2版)
编 著 申建中 刘 峰
责任编辑 李慧娜

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路10号 邮政编码710049)
网 址 <http://www.xjtpress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)
(029)82668315(总编办)
传 真 (029)82668280
印 刷 西安明瑞印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 12.75 字数 306字
版次印次 2018年3月第2版 2018年9月第2次印刷
书 号 ISBN 978-7-5693-0416-9
定 价 30.00元

读者购书、书店添货如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。
订购热线:(029)82665248 (029)82665249
投稿热线:(029)82668315
读者信箱:64424057@qq.com

版权所有 侵权必究

序 言

数学物理方程作为一门大学基础课,对于非数学理工科专业无疑是十分重要的。它通过对一些具有典型意义的实际模型的深入剖析,阐明和讲述偏微分方程的基本理论、处理问题的典型技巧以及应用的物理背景。它既是数学联系其他自然科学和技术领域最重要的桥梁之一,同时也为非数学类理工科专业的后继课程提供必要的数学工具,更重要的是对培养学生应用数学理论和方法解决实际问题的能力大有裨益。把数学理论、解题方法和物理实际这三者有机地结合是本课程有别于其他课程的一个鲜明特点。因此,学习该门课程对于提高理工科大学生的综合素质有着极其重要的作用。

本课程内容广泛,综合性强,应用面广。它以描述自然现象的微分方程、微积分方程为研究对象,涉及到高等数学、线性代数、大学物理等方面的基础知识。它建立的理论和方法也能广泛地应用于自然科学与工程领域,已成为了解自然现象和理解自然规律的有力工具。例如,在电磁学、化学、力学、核能、生物学和信息科学等领域,一些重要的问题是由偏微分方程所支配的定解问题来刻画的,也正是由于这些偏微分方程的引入和研究,促进了相关学科的发展。

本课程围绕偏微分方程定解问题的求解这一中心问题,比较系统地介绍与之相关的数学理论与方法。主要包括数学模型建立、分离变量法、积分变换法、格林函数法和特征线法等内容。面对如此丰富的内容,本书力图做到叙述简明、条理清晰,既关注各部分内容之间的相互联系,又注意使各部分内容具有相互独立的单元式结构。对于一些重要结果,本书采用叙而不证的方式,重在介绍分析问题和解决问题的基本思想和方法,以使读者对所学数学理论的实际背景和本质有比较深入的理解。编者认为:只讲方法不讲原理的教学态度是不可取的。在某种意义上,数学学习就是通过方法学习,而达到明白道理的目的。只有这样,才能使读者得到思想上的升华,对所学知识能够举一反三,运用自如。为达到此目的,本教材每章都配备了较多的练习题,其中既有不少的基本练习题,也有一些富有启发性的题目,读者可根据自己的实际情况灵活选择。另外,对于一些必要的证明,本书也不追求完备,以避免使用过多的数学知识和一些特殊的计算技巧。这样的处理使得本教材篇幅适中,内容充实,且便于掌握和应用。对于编者认为重要的内容,例如变分法和偏微分方程数值方法等,由于学时所限,本书未曾涉及。但考虑到目前教学对学生动手能力的重视,本书简明扼要地介绍了基于 MATLAB 的偏微分方程定解问题求解方法,并给出了部分例题解的图形,以增加读者对解的直观理解。如读者需进一步学习变分法和偏微分方程数值方法,可在参考文献中找到所需要的参考书目。

由于求解偏微分方程本质上是利用微分运算的逆运算——积分法,故定解问题解的表达式将不可避免地以无穷级数或含参变量积分形式给出。这样就使解的表达式显得冗长,有些公式看起来还很繁杂。编者建议:读者在学习把主要精力放在对基本理论和方法的理解、应用以及对一些公式的推导思路。通过认真听课、看书和做适量的习题,做到能比较熟练地应用基本理论和方法,或通过查阅各种公式,独立地解决某些具体问题就可以了。要从繁杂的公式和过量的重复性练习中解放出来,透过现象抓本质,真正掌握和学到那些最基本的知识和

方法,并深切领会数学在解决实际问题时所发挥的巨大作用,提高对数学课程学习的积极性,及分析和解决实际问题的能力。

本书分为七章,主要介绍来自物理学中三类典型方程支配的定解问题的求解思想和方法。第1章包括数学模型的建立、叠加原理、齐次化原理和方程的化简等。其中方程和边界条件的导出既是重点也是难点,而叠加原理的应用则贯穿整个教材,是求解偏微分方程的理论基础。建议读者认真学习这些内容,为后面章节的学习打下坚实的基础。第2章介绍分离变量法,首先通过弦振动问题介绍分离变量法的主要思想和求解步骤,然后给出大量例子讲解分离变量法的各种应用。第3章、第7章与第2章的内容相似,也是介绍分离变量法,区别仅在于特征值问题的求解要用到两类特殊函数。这两章的学习重点是两类特殊函数的定义和基本性质。这两类函数均是以无穷级数的形式给出的,其表示式稍显复杂一些,希望读者耐心地学习这些内容,并有意识地培养自己的数学运算能力和韧性。第4章介绍求解偏微分方程的积分变换法,它是分离变量法的推广,除可用于求解偏微分方程的一些定解问题外,目前在自然科学的其他领域也有广泛的应用。第5章简单介绍格林函数法,它在电磁学理论和应用研究中被广泛使用,特别是在偏微分方程理论研究中起着重要的作用。第6章介绍特征线法,它是求解一阶偏微分方程的基本方法,以往的大多数数学物理方程教材主要介绍三类典型的二阶方程求解,对一阶方程几乎没有涉及,内容显得有些欠缺。更重要的是三类二阶方程,求解本质上都是随着对拉普拉斯算子的不断研究而展开的,而许多一阶方程都与另一类一阶微分算子有关,这类一阶算子是伴随着偏微分方程的产生而出现的,而且在偏微分方程理论和应用研究中发挥着越来越大的作用。现今的一些学者甚至认为,这类一阶微分算子是仅次于拉普拉斯算子的一类具有广泛应用的算子。基于以上的考虑,本教材增加了特征线法这一部分内容,作为内容和方法上的互补。

本书可作为非数学类理工科学生作为教材使用,同时也希望本教材能够帮助教师灵活地组织自己的课堂教学内容。根据编者多年的教学经历,除去打*号的选学内容外,各章的授课学时可分别安排为:第1至第3章均为8学时,其余各章均为4学时。

本教材根据编者多年的教学经验,以及从事数学理论与应用研究的体会编著而成,并在编写时参阅了众多参考文献,列于文后参考文献中,在此谨向这些文献的作者表示诚挚的谢意。本书的出版得到了西安交通大学教务处和西安交通大学数学与统计学院的资助。

西安交通大学数学与统计学院王绵森教授审阅了本书初稿并提出了许多宝贵意见。西安交通大学数学与统计学院李惜雯教授在本书作为讲义的试用期间,对本书做了认真的审阅并提出了许多宝贵意见,在此编者对两位老师表示衷心感谢。同时,非常感谢李田副教授为本书提供了部分习题解答。西安交通大学出版社编辑李慧娜老师对本书的出版甚为关注,并提出了具体的指导和建议。对此,编者深表感谢。

限于作者的学识与水平,书中错误和不妥之处在所难免,诚请读者批评指正。

西安交通大学数学与统计学院

王建中 刘峰

2017.7.20

目 录

第 1 章 数学建模和基本原理介绍	(1)
§ 1.1 数学模型的建立	(1)
1.1.1 弦振动方程和定解条件	(1)
1.1.2 热传导方程和定解条件	(5)
1.1.3 泊松方程和定解条件	(9)
§ 1.2 定解问题的适定性	(10)
1.2.1 一些基本概念	(10)
1.2.2 适定性概念	(13)
§ 1.3 叠加原理	(14)
1.3.1 二阶线性偏微分方程解的叠加原理	(14)
1.3.2 线性定解问题解的叠加原理	(15)
1.3.3* 叠加原理的应用	(18)
§ 1.4* 齐次化原理	(20)
1.4.1 由含参变量积分或无穷级数表示的变换	(21)
1.4.2 常微分方程中的齐次化原理	(23)
1.4.3 偏微分方程中的齐次化原理	(28)
§ 1.5* 二阶线性方程的分类和化简	(28)
1.5.1 二阶线性偏微分方程的分类	(28)
1.5.2 两个自变量二阶偏微分方程的化简	(31)
习题 1	(33)
第 2 章 分离变量法	(39)
§ 2.1 特征值问题	(39)
2.1.1 矩阵特征值问题	(39)
2.1.2 一个二阶线性微分算子的特征值问题	(40)
§ 2.2 分离变量法	(44)
2.2.1 弦振动方程定解问题	(44)
2.2.2 热传导方程定解问题	(52)
2.2.3 平面上位势方程边值问题	(54)
§ 2.3* 基于 MATLAB 的定解问题求解方法	(59)
2.3.1 基于 pdetool 的偏微分方程求解方法	(59)
2.3.2 基于函数 pdepe() 的偏微分方程求解	(64)
习题 2	(66)

第 3 章 贝塞尔函数	(70)
§ 3.1* 二阶线性常微分方程的幂级数解法	(70)
3.1.1 常系数二阶线性微分方程的基解组	(70)
3.1.2 变系数二阶线性微分方程的幂级数解法	(72)
§ 3.2 贝塞尔函数	(74)
3.2.1 Γ 函数	(74)
3.2.2 贝塞尔方程和贝塞尔函数	(76)
3.2.3 贝塞尔函数的性质	(80)
3.2.4 贝塞尔方程的特征值问题	(82)
3.2.5* 圆域上拉普拉斯算子的特征值问题	(86)
§ 3.3 多个自变量分离变量法举例	(88)
3.3.1 圆柱体或圆域上定解问题	(88)
3.3.2* 矩形域上定解问题	(94)
习题 3	(96)
第 4 章 积分变换法	(99)
§ 4.1 热传导方程柯西问题	(99)
4.1.1 一维热传导方程柯西问题	(99)
4.1.2* 二维热传导方程柯西问题	(102)
§ 4.2 波动方程柯西问题	(103)
4.2.1 一维波动方程柯西问题	(103)
4.2.2* 二维和三维波动方程柯西问题	(105)
4.2.3* 解的物理意义	(107)
§ 4.3 积分变换法举例	(109)
习题 4	(112)
第 5 章 格林函数法	(115)
§ 5.1 格林公式	(115)
§ 5.2 拉普拉斯方程基本解和格林函数	(117)
5.2.1 基本解	(117)
5.2.2 格林函数	(118)
§ 5.3 半空间和圆域上的狄利克雷问题	(119)
5.3.1 半空间上狄利克雷问题	(120)
5.3.2 圆域上狄利克雷问题	(121)
§ 5.4* 一维热传导方程和波动方程半无界问题	(122)
5.4.1 一维热传导方程半无界问题	(122)
5.4.2 一维波动方程半无界问题	(123)
习题 5	(124)
第 6 章 特征线法	(128)
§ 6.1 一阶偏微分方程特征线法	(128)

6.1.1	一阶线性偏微分方程特征线法	(128)
6.1.2	一阶拟线性偏微分方程特征线法	(130)
6.1.3*	特征线法应用举例	(133)
6.1.3.1	交通流问题	(133)
6.1.3.2	人口发展方程	(135)
§ 6.2	一维波动方程特征线法	(137)
习题 6		(142)
第 7 章	勒让德多项式	(144)
§ 7.1	勒让德多项式	(144)
7.1.1	勒让德方程及勒让德多项式	(144)
7.1.2	勒让德多项式的生成函数和递推公式	(146)
7.1.3	勒让德多项式的微分表示形式	(149)
7.1.4	勒让德方程特征值问题	(151)
§ 7.2*	球面调和函数和球形贝塞尔函数	(153)
7.2.1	拉普拉斯算子的其他表示形式	(153)
7.2.2	与 θ 无关的球面调和函数	(154)
7.2.3	与 θ 有关的球面调和函数	(157)
7.2.4	球形贝塞尔函数	(159)
习题 7		(162)
附录 1	测验题	(164)
附录 2	部分习题答案、提示或解答	(166)
参考文献		(196)

第 1 章 数学建模和基本原理介绍

用数学理论和方法研究实际问题时,首先需要建立合理的数学模型。在很多情况下,所建立的模型为偏微分方程的某种定解问题。例如,弦振动问题(即波动问题)、导热体中的温度分布及静电场中的电位分布都可用偏微分方程描述。描述这三类问题的方程分别称为弦振动方程、热传导方程和位势方程,它们的性质和求解算法构成了数学物理方程的主要研究对象。本章将首先建立这三类典型问题的方程和定解条件,并结合这些模型,介绍一些主要数学概念及研究模型的基本思想。而模型的具体求解算法将留在第 2 章及以后的各章中。

§ 1.1 数学模型的建立

偏微分方程是包含未知函数及其偏导数的等式,本质上反映了函数的某种局部平衡关系。与我们熟悉的代数方程建立相类似,建立偏微分方程的过程主要有三步:先设所求解的未知量(一般可表示为两个或两个以上自变量的函数),然后找出所研究问题满足的等量关系式,最后利用一些基本的关系式将等量关系式两边用已知量和未知量表示即成。建立方程和定解条件的基本思想是高等数学中的“微元法”思想,而等量关系则需用到一些基本的物理知识。

1.1.1 弦振动方程和定解条件

物理模型

一根绷紧的长为 l 的均匀柔软细弦,让它离开平衡位置在垂直于弦线平衡位置的外力作用下作微小横振动,求弦线上任一点在任一时刻的位移。

所谓“横振动”,是指弦的运动发生在同一平面内,且弦线上各点位移方向与弦线平衡位置相垂直。而“柔软”与弦上各点所受张力有关。弦在横振动时,其上各点受到张力作用,若弦线满足“柔软”的假设,那么弦线形变时的张力只抗伸长,而不抗弯曲,即反抗弯曲所产生的力矩忽略不计。

除了给弦施加的外强迫力外,弦振动时还可能受到来自于介质的阻力作用,如空气阻力、液体中振动时液体的阻力等。在考虑细弦的微小横振动时,这些阻力可认为是垂直于弦线平衡位置的,因此在下述建立方程时将阻力和外强迫力统一归结为外力,而且假设外力垂直于弦平衡位置。

方程导出

首先建立坐标系。以弦线所处的平衡位置为 x 轴(水平方向),垂直于弦线平衡位置且通过弦线左端点的直线为 u 轴建立坐标系,如图 1.1 所示。在该坐标系下,弦

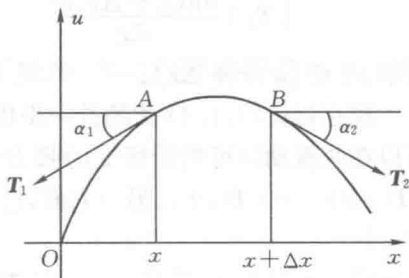


图 1.1 弦作微小横振动时的受力分析

线上点 x 在任意时刻 t , 离开平衡位置的位移为 $u(x, t)$ 。

为了确定任意点(对应 x) 的运动规律, 我们考虑小区间 $[x, x + \Delta x]$ 对应的小段弦线 \widehat{AB} 的运动情况, 这里假设 \widehat{AB} 不包括弦的两个端点(端点运动情况在边界条件中讨论)。将 \widehat{AB} 视为质点, 那么其运动服从牛顿第二定律。以下先分析小段弦线 \widehat{AB} 的受力情况。

假设作用在弦线上且垂直于平衡位置的外力的力密度为 $f_0(x, t)$ (kg/m), 弦段 \widehat{AB} 在运动时两端受到的张力(即其余部分弦线对小段弦线 \widehat{AB} 的作用力)为 $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}(x, t)$ 、 $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}(x + \Delta x, t)$ 。

由于弦是柔软的, 因而弦线 \widehat{AB} 所受张力与弦线相切, 且指向小弦段的外部。假设 \mathbf{T}_1 和 \mathbf{T}_2 与水平方向的夹角分别为 α_1 和 α_2 , 则在图 1.1 所示的情况下, \mathbf{T}_1 和 \mathbf{T}_2 在 u 轴方向的投影(即 u 轴方向的分力)分别为

$$F_1 = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{i}_u = |\mathbf{T}_1| \cos(\mathbf{T}_1, \mathbf{i}_u) = |\mathbf{T}_1| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = -|\mathbf{T}_1| \sin\alpha_1 \quad (1.1.1)$$

$$F_2 = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{i}_u = |\mathbf{T}_2| \cos(\mathbf{T}_2, \mathbf{i}_u) = |\mathbf{T}_2| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_2\right) = -|\mathbf{T}_2| \sin\alpha_2 \quad (1.1.2)$$

其中 \mathbf{i}_u 为 u 轴正向的单位向量。注意到在弦线作微小横振动时, α_1 和 α_2 充分小, 因此利用无穷小代换可得

$$\sin\alpha_1 \sim \tan\alpha_1 = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad \sin\alpha_2 \sim \tan\alpha_2 = -\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}$$

代入(1.1.1)式和(1.1.2)式, 得

$$F_1 \approx -|\mathbf{T}_1| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad F_2 \approx |\mathbf{T}_2| \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}$$

小弦段 \widehat{AB} 受到的外力为

$$F_3 = \int_x^{x+\Delta x} f_0(x, t) ds = \int_x^{x+\Delta x} f_0(x, t) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \quad (1.1.3)$$

其中 $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$ 是一个充分小的量, 略去其高阶无穷小后

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) \approx 1$$

即 $ds \approx dx$, 代入(1.1.3)式, 得

$$F_3 \approx \int_x^{x+\Delta x} f_0(x, t) dx = f_0(x_1, t) \Delta x$$

其中 $x_1 \in [x, x + \Delta x]$ 。根据牛顿第二定律, 弦段 \widehat{AB} 的垂直运动方程为

$$|\mathbf{T}_2| \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - |\mathbf{T}_1| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + f_0(x_1, t) \Delta x = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u(x_2, t)}{\partial t^2} \quad (1.1.4)$$

其中 $x_2 \in [x, x + \Delta x]$ 。

现在讨论(1.1.4)式的进一步化简。由 $ds \approx dx$ 知, 在弦振动时可近似认为弦线没有伸长, 所以在弦振动时可假设所受的张力大小 $|\mathbf{T}(x, t)|$ 不随时间变化(胡克(Hooke)定理), 即 $|\mathbf{T}(x, t)| = |\mathbf{T}(x)|$ 。另一方面, 已知弦段 \widehat{AB} 在水平方向没有运动, 即水平方向所受合力为零

$$-|\mathbf{T}_1| \cos\alpha_1 + |\mathbf{T}_2| \cos\alpha_2 = 0$$

而

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx 1$$

同理 $\cos\alpha_2 \approx 1$, 从而 $|T_1| \approx |T_2|$ 。结合区间 $[x, x + \Delta x]$ 的任意性, 我们可将 $|T(x)|$ 近似为常数, 即 $|T(x)| = T_0$ (常数)。于是(1.1.4)式可表示为

$$T_0 \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - T_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + f_0(x, t)\Delta x = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

假设 $u(x, t)$ 具有二阶连续偏导数, 对上式左端前两项应用微分中值定理可得

$$T_0 \frac{\partial^2 u(x_3, t)}{\partial x^2} \Delta x + f_0(x_1, t)\Delta x = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

其中 $x_3 \in (x, x + \Delta x)$ 。上式两边同除以 Δx , 再令 $\Delta x \rightarrow 0$, 便得到 $u(x, t)$ 所满足的方程

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, t > 0 \quad (1.1.5)$$

其中 $a^2 = T_0/\rho, f(x, t) = f_0(x, t)/\rho$ 。

方程(1.1.5)称为一维弦振动方程(vibrating string equation), 这里的“一维”指函数 u 的空间自变量的维数为1。

为方便起见, 在不发生混淆的情况下, 今后将用下标表示偏导数, 如 u_x 和 u_{xx} 分别表示 u 关于 x 的一阶与二阶偏导数。

弦振动方程(1.1.5)刻画了柔软均匀细弦作微小横振动时所服从的一般规律。对于具体的弦振动情况, 弦的振动规律还依赖于初始时刻弦线的状态和弦线两端所受到的外界约束。我们称初始状态为弦振动方程的初始条件(initial value condition), 弦线两端点所受到的约束为边界条件(boundary value condition)。给方程施加这些条件便构成一个具体弦振动问题的完整描述, 或者说建立了一个数学模型。

初始条件: 初始条件包含初始位移和初始速度, 即弦线在时刻 $t = 0$ 时各点的位移和速度, 其表示形式如下:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.1.6)$$

其中 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是已知函数。函数 $\varphi(x)$ 确定了初始时刻弦线的形状, 而 $\psi(x)$ 则给出了弦上各点的初始速度。

边界条件: 一般说来有如下三种情况。

(1) 已知端点的位移变化, 即

$$u(0, t) = g_1(t), \quad u(l, t) = g_2(t), \quad t \geq 0 \quad (1.1.7)$$

其中 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 是已知函数。当 $g_1(t) = g_2(t) = 0$ 时, 弦线端点没有位移变化, 故称弦线具有固定端。

(2) 已知端点在垂直于弦线平衡位置的外力作用下振动, 其左右两端所受外力分别为 $\bar{g}_1(t)$ 和 $\bar{g}_2(t)$, 这时边界条件可表示为

$$-T_0 u_x(0, t) = \bar{g}_1(t), \quad T_0 u_x(l, t) = \bar{g}_2(t), \quad t \geq 0 \quad (1.1.8)$$

或

$$u_x(0, t) = g_1(t), \quad u_x(l, t) = g_2(t), \quad t \geq 0 \quad (1.1.9)$$

(1.1.8)式的导出类似于弦振动方程的建立。考虑左端点 $x = 0$ 的情况。如图1.2所示, 弦段 \widehat{AB} 的运动方程为

$T_0 u_x(\Delta x, t) + \bar{g}_1(t) = \rho \Delta x u_{xx}(x_1, t)$, 其中 $x_1 \in [0, \Delta x]$. 令 $\Delta x \rightarrow 0$, 则有

$$-T_0 u_x(0, t) = \bar{g}_1(t)$$

此即(1.1.8)式中第一式。

我们注意到, 当小弦线 \widehat{AB} 位于弦的内部时, 左端所受张力 T_1 在 u 轴方向分力为 $-T_0 u_x(x, t)$. 因此(1.1.8)式所述的左端点边界条件可解释为: 在 $x=0$ 端, 已知的外力 $\bar{g}_1(t)$ 起张力 T_1 的作用. 同理, 在 $x=l$ 端, $\bar{g}_2(t)$ 起张力 T_2 的作用. 由张力 T_2 在 u 轴方向分力为 $T_0 u_x(x + \Delta x, t)$ 知, 边界条件为 $T_0 u_x(l, t) = \bar{g}_2(t)$.

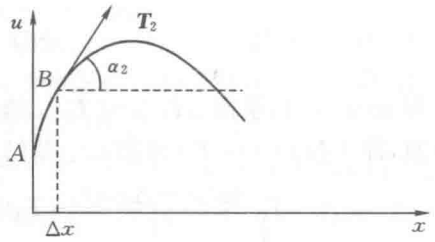


图 1.2 弦线左端点受力分析

当 $g_1(t) = g_2(t) = 0$ 时, 端点在 u 轴上作不受外力的自由振动, 故称弦线具有自由端. 物理上可理解为端点被限定在 u 轴的滑槽内作自由运动, 而且摩擦力很小, 可以忽略不计.

(3) 端点与弹性物体相连接. 边界条件可表示为

$$x=0 \text{ 端: } u_x(0, t) - \sigma_1 u(0, t) = g_1(t), \quad t \geq 0 \quad (1.1.10)$$

$$x=l \text{ 端: } u_x(l, t) + \sigma_2 u(l, t) = g_2(t), \quad t \geq 0 \quad (1.1.11)$$

我们用弹簧模拟两端连接的弹性物体. 如图 1.3 所示, 弦线两端分别连接在弹性系数为 k_1, k_2 ($k_1 > 0, k_2 > 0$) 的两个弹簧上, 弹簧的长度分别为 l_1 和 l_2 . 这两个弹簧的另一端还分别连接在由函数 $Q_1(t)$ 和 $Q_2(t)$ 所表示的位置上, 即两个弹簧的下端也可以随时间运动. 若 $Q_1(t) = a, Q_2(t) = b$, 表示两个弹簧的下端固定.

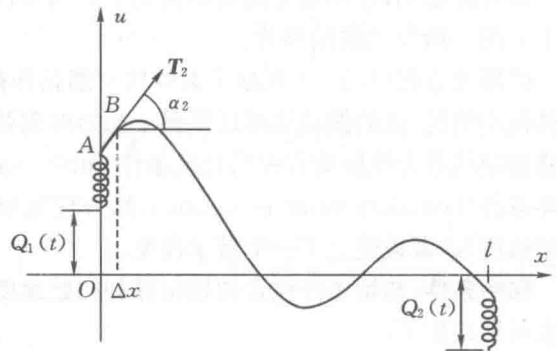


图 1.3 端点与弹簧连接情况

考虑左端点 $x=0$ 的振动情况. 在任意时刻 t , 弹簧的实际伸缩量为 $u(0, t) - Q_1(t) - l_1$, 故由胡克定律可知, 左端点所受的弹性恢复力为 $-k_1(u(0, t) - Q_1(t) - l_1)$.

与建立弦振动方程的过程完全类似, 容易导出区间 $[0, \Delta x]$ 对应的弦线 \widehat{AB} 的运动方程为

$$T_0 u_x(\Delta x, t) - k_1(u(0, t) - Q_1(t) - l_1) + f_0(x_1, t)\Delta x = \rho \Delta x u_{xx}(x_2, t)$$

其中 $x_1, x_2 \in [0, \Delta x]$, f_0 (力密度) 为弦受到的外力. 令 $\Delta x \rightarrow 0^+$, 得

$$T_0 u_x(0, t) - k_1(u(0, t) - Q_1(t) - l_1) = 0, \quad t \geq 0$$

即

$$u_x(0, t) - \sigma_1 u(0, t) = g_1(t), \quad t \geq 0$$

其中 $\sigma_1 = k_1/T_0 > 0, g_1(t) = -\sigma_1(Q_1(t) + l_1)$. 式(1.1.10)得证.

类似可得右端 $x=l$ 的边界条件为

$$u_x(l, t) + \sigma_2 u(l, t) = g_2(t), \quad \sigma_2 = k_2/T_0 > 0, \quad g_2(t) = \sigma_2(Q_2(t) + l_2)$$

上述三类边界条件分别称为第一、第二和第三类边界条件. 初始条件和边界条件统称为定解条件. 一个微分方程连同相应的定解条件组成一个定解问题. 如下定解问题是施加第一类边

界条件构成的定解问题。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \end{cases} \quad (1.1.12)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = g_1(t), u(l, t) = g_2(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.1.13)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (1.1.14)$$

这种定解问题既包含初始条件,又包含边界条件,因此常称为弦振动方程的混合问题。还需注意,弦两端所加的边界条件可以是同一类型的条件,也可以是不同类型的条件。

有些定解问题只包含初始条件,而没有边界条件。例如,当弦振动方程定义域为 $-\infty < x < \infty$ 时,则其定解问题不含边界条件而只有初始条件,可表示为

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & -\infty < x < \infty, t > 0 \end{cases} \quad (1.1.15)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (1.1.16)$$

这种只含初始条件的定解问题,称为弦振动方程的初值问题(或柯西(Cauchy)问题)。

注1 如果考虑膜的微小振动规律,则类似于弦振动方程的建立过程可导出其方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t)$$

而声波在空气中传播所满足的方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t)$$

上述两个方程分别称为二维和三维波动方程(wave equation),其中“二维”或“三维”均指在 u 的空间自变量的维数。一维弦振动方程也称为一维波动方程。

1.1.2 热传导方程和定解条件

物理模型

考虑三维空间中一均匀、各向同性的导热体。假定它内部有热源,并且与周围介质有热交换,求物体内部温度的分布。

一般而言,由于材料属性的差异,各点处导热特性不同,即使是在给定点处,各个方向上的导热特性也可能不同。物理上,用导热系数 $k(x, y, z)$ 描述物体的导热特性。

这里“各向同性”是指导热体内任一点在各个方向上的传热特性相同,而“均匀”则意味着 $k(x, y, z)$ 与点的位置无关。例如,当导热体由同一种金属构成时,就认为导热体具有各向同性性质。在本问题假设下,导热系数 $k(x, y, z)$ 为正常数。

方程导出

设导热体在空间占据的区域为 Ω (如图 1.4 所示),边界为 $\partial\Omega$,导热体的体密度为 $\rho(\text{kg}/\text{m}^3)$,比热容为 $c(\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K}))$,热源强度为 $f_0(x, y, z, t)(\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{s}))$,在时刻 t 导热体内点 $(x, y, z) \in \Omega$ 的温度为 $u(x, y, z, t)(\text{K})$ 。

我们注意到, $u(x, y, z, t)$ 的变化是由热传导引起的。当热量流入(或流出)点 (x, y, z) 的

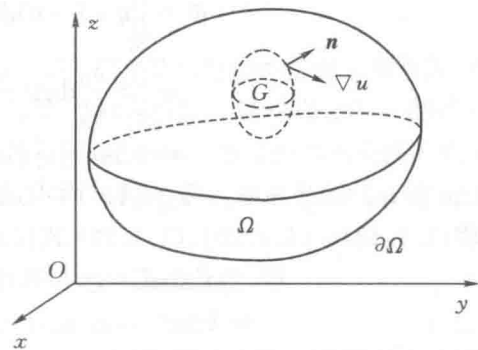


图 1.4 导热体传热分析

邻域时,点 (x, y, z) 处的温度将升高(或降低)。因此我们将注意力集中于点 (x, y, z) 的邻域内的热量变化分析。

任取点 $(x, y, z) \in \Omega$ 的一个充分小邻域 $G \subset \Omega$, G 的边界为 ∂G 。则在充分小的时段 $[t_1, t_2]$ 上,区域 G 内的热量变化满足如下的等量关系式。

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{热量 } Q_2 \\ t = t_2 \end{array}} - \boxed{\begin{array}{c} \text{热量 } Q_1 \\ t = t_1 \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} \text{热源生成} \\ \text{的热量 } W \end{array}} + \boxed{\begin{array}{c} \text{通过边界 } \partial G \\ \text{流入的热量 } \Phi \end{array}} \quad (1.1.17)$$

此式即为热力学第二定律的积分形式。下面分别计算并简化(1.1.17)式中各项。

由于区域 G 充分小,时段 $[t_1, t_2]$ 也充分小,所以在 G 内可视 u 为常数。利用热量计算公式 $Q = mcu$,可得

$$Q_2 = \rho \Delta x u(x_1, y_1, z_1, t_2) \quad (1.1.18)$$

$$Q_1 = \rho \Delta x u(x_1, y_1, z_1, t_1) \quad (1.1.19)$$

$$W = f_0(x_1, y_1, z_1, \bar{t}_1) \rho \Delta v \Delta t \quad (1.1.20)$$

其中 $(x_1, y_1, z_1) \in G, \bar{t}_1 \in [t_1, t_2], \Delta v$ 为区域 G 的体积, $\Delta t = t_2 - t_1$ 。在物体均匀假设下,体密度 ρ 为常数。

为了计算通过边界流入区域 G 的热量 Φ ,我们先考虑导热过程中,在单位时间内通过单位截面(垂直于热流动方向)的热量。该热量用一个称为热流量的向量 \mathbf{q} ($\text{J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$)来描述,其方向表示热量的流动方向。根据傅里叶(Fourier)热传导定律: \mathbf{q} 与温度的梯度成正比,即 $\mathbf{q} = -k(x, y, z) \nabla u$,其中 $\nabla u = (u_x, u_y, u_z)$ 是 u 在点 (x, y, z) 的梯度, $k(x, y, z)$ 为导热体在点 (x, y, z) 的导热系数,与介质的性态有关,在导热体均匀、各向同性的假设下, $k(x, y, z) = k$ 为正常数。由于梯度 ∇u 指向温度升高的方向,所以负号表示热量从温度高处流向温度低处。

傅里叶定理表明,热流量 \mathbf{q} 的方向与 $-\nabla u$ 相同。因此在单位时间内,通过 G 的边界面元 ds ,流入区域 G 的热量为 $d\Phi = \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n})ds$,这里 \mathbf{n} 为 ∂G 的单位外法向量, $\mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n})$ 为沿 $-\mathbf{n}$ 方向流动的热量(其值是代数值,为方便起见,也简称为热流量)。沿 G 的边界积分,可得 $\Delta t = t_2 - t_1$ 时间内流入区域 G 的热量

$$\Phi = \iint_{\partial G} \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) ds \Delta t \quad (1.1.21)$$

假设 u 对空间变量具有二阶连续偏导数,对时间变量具有一阶连续偏导数,利用高斯公式可得

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\partial G} \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) ds \Delta t = \iint_{\partial G} k \nabla u \cdot \mathbf{n} ds \Delta t \\ &= \iint_{\partial G} k \frac{\partial u}{\partial n} ds \Delta t = k \iiint_G \Delta u dv \Delta t \\ &= k \Delta u(x_2, y_2, z_2, \bar{t}_2) \Delta v \Delta t \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

其中 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, $(x_2, y_2, z_2) \in G, \bar{t}_2 \in [t_1, t_2]$ 。

将(1.1.18)–(1.1.20)、(1.1.22)式代入到(1.1.17)式中,可得

$$\begin{aligned} &\rho c \Delta v u(x_1, y_1, z_1, t_2) - \rho c \Delta v u(x_1, y_1, z_1, t_1) \\ &= k \Delta u(x_2, y_2, z_2, \bar{t}_2) \Delta v \Delta t + f_0(x_1, y_1, z_1, \bar{t}_1) \rho \Delta v \Delta t \end{aligned}$$

应用微分中值定理于等式左端,则有

$$\rho c u_t(x_1, y_1, z_1, \bar{t}_3) \Delta v \Delta t = k \Delta u(x_2, y_2, z_2, \bar{t}_2) \cdot \Delta v \Delta t + f_0(x_1, y_1, z_1, \bar{t}_1) \rho \Delta v \Delta t$$

其中 $\bar{t}_3 \in (t_1, t_2)$ 。上式两边同除以 $\Delta v \Delta t$, 并令 $G \rightarrow (x, y, z), t_2 \rightarrow t_1$, 可得

$$\rho c u_t(x, y, z, t_1) = k \Delta u(x, y, z, t_1) + \rho f_0(x, y, z, t_1)$$

由 t_1 的任意性知, 对任意 $t > 0$, 有

$$u_t(x, y, z, t) = a^2 \Delta u(x, y, z, t) + f(x, y, z, t) \quad (1.1.23)$$

或简写为

$$u_t = a^2 \Delta u + f \quad (1.1.24)$$

其中 $a^2 = k/(\rho c) > 0, f(x, y, z, t) = f_0(x, y, z, t)/c$ 。

方程(1.1.24)刻画了导热体内温度分布所服从的一般规律, 称其为三维热传导方程(heat-conduction equation)。在特殊情况下, 温度 u 和热源 f_0 只与部分空间变量有关, 这时方程(1.1.24)可简化为如下一维或二维热传导方程

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t)$$

例 1.1 假定侧面绝热的均匀细杆内没有热源, 试给出描述温度分布的方程。

解 在侧面绝热假设下, 细杆内热量只能通过两端与外部介质交换。因此在细杆充分细的假设下, 任意横截面上各点处温度可近似地认为相等, 即对给定时间 t , 细杆任意截面上温度 u 只与坐标 x 有关, 如图 1.5 所示。这时热传导方程(1.1.24)就简化为一维热传导方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

其中常数 a^2 与细杆的材料性质有关。

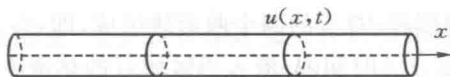


图 1.5 细杆温度分析

同理考虑均匀薄板的温度分布, 就可得到二维热传导方程。

注 2 对高等数学中微积分运算比较熟练的读者, 容易想到(1.1.17)式中各项也可以写成如下积分形式

$$Q_2 = \iint_G \rho c u |_{t=t_2} dv, \quad Q_1 = \iint_G \rho c u |_{t=t_1} dv$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_G \rho f_0 dv, \quad \Phi = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\partial G} \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) ds$$

将上面各式代入(1.1.17)式, 同样可导出方程(1.1.24)。

注 3 虽然方程(1.1.24)通常称为热传导方程, 但它并不是仅用来描述导热体内温度分布, 它还可以刻画自然界中许多其他的物理现象, 如分子在介质(如空气、水……)中的扩散即为此例, 因此也称(1.1.24)式为扩散方程。

对于一个给定的导热体来说, 内部温度分布(在 $t > 0$ 时)显然与初始温度分布有关。不仅如此, 内部温度分布与导热体边界所受到的约束也有关。譬如, 加热的铁块在空气中的冷却速度慢于水中的冷却速度, 其原因在于当铁块置于两种不同介质中时, 通过边界面交换的热量不同。我们称这些边界约束为热传导方程的边界条件。下面对初始条件和边界条件作进一步的介绍。

初始条件: 初始条件是指在初始时刻($t = 0$)导热体内的温度分布, 即

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{\Omega} \quad (1.1.25)$$

其中 $\varphi(x, y, z)$ 是已知函数。

边界条件: 边界条件通常有如下三类, 分别称为第一类边界条件、第二类边界条件和第三

类边界条件。

为方便起见,以下记 $\Sigma = \partial\Omega \times [0, \infty) = \{(x, y, z, t) \mid (x, y, z) \in \partial\Omega, t \geq 0\}$ 。

(1) 第一类边界条件:已知边界 $\partial\Omega$ 上的温度分布,即

$$u|_{\Sigma} = g(x, y, z, t) \quad (1.1.26)$$

其中 g 是已知函数。

(2) 第二类边界条件:已知通过边界 $\partial\Omega$ 上的热流量。这里热流量理解为沿 $-\mathbf{n}$ 的热流量 $-k \nabla u \cdot (-\mathbf{n}) = k \frac{\partial u}{\partial n}$, 其中 \mathbf{n} 为边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。于是边界条件可表示为

$$k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = g(x, y, z, t) \quad (1.1.27)$$

其中 g 是已知函数。当 $g > 0$ 时,有热量流入 Ω , 而 $g < 0$ 表示热量流出 Ω , $g = 0$ 表示边界绝热。

(3) 第三类边界条件:导热体置于介质之中,该介质温度已知。这时边界条件表示为

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = g, \quad (x, y, z, t) \in \Sigma \quad (1.1.28)$$

其中 $\sigma > 0$ 为常数, g 是已知函数。

现在推导边界条件(1.1.28)。类似于热传导方程的建立,考虑边界面上任意一点 (x, y, z) 的充分小区域 G 。在 G 上,等量关系式(1.1.17) 仍然成立。但应注意,该小区域 G 的边界由位于 Ω 内部和 $\partial\Omega$ 上的两个曲面块组成,即 $\partial G = \sigma_1 \cup \sigma_2$, 其中 $\sigma_1 \subset \partial\Omega, \sigma_2 \subset \Omega$, 如图 1.6 所示。所以在 $[t_1, t_2]$ 时间内,流入小区域 G 的热量 Φ 包括导热体通过 σ_1 与周围介质交换的热量和通过 σ_2 流入 G 的热量。

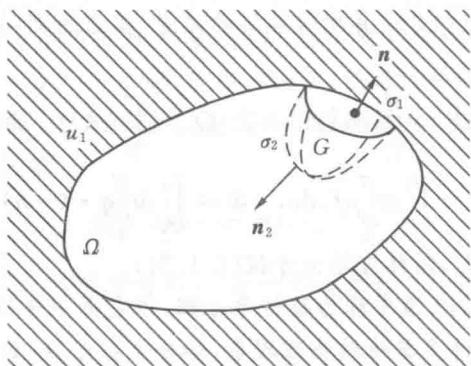


图 1.6 导热体置于介质之中的情况

根据牛顿定律(热传导的另一实验定律),从物体内部流到外部的热流量与两介质间的温度差成正比,即有 $\mathbf{q}_1 = k_1(u - u_1)\mathbf{n}$, 其中 \mathbf{n} 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $u_1(x, y, z, t)$ 为边界 $\partial\Omega$ 外侧的介质温度, k_1 为两种介质之间的热交换系数, $k_1 > 0$ 。再设 \mathbf{n}_2 为 σ_2 上的单位外法向量, 则在 $[t_1, t_2]$ 时间内,流入小区域 G 的热量

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\sigma_1} (\mathbf{q}_1) \cdot (-\mathbf{n}) ds \Delta t + \iint_{\sigma_2} (\mathbf{q}) \cdot (-\mathbf{n}_2) ds \Delta t \\ &= \iint_{\sigma_1} -k_1(u - u_1) ds \Delta t + \iint_{\sigma_2} k \frac{\partial u}{\partial n_2} ds \Delta t \end{aligned}$$

其中两被积函数中的自变量 t 均可取区间 $[t_1, t_2]$ 内的任一值 \bar{t} 。

将 Q_1, Q_2, W 和 Φ 代入到(1.1.17)式中得

$$\begin{aligned} \rho \Delta x u(x_1, y_1, z_1, t_2) - \rho \Delta x u(x_1, y_1, z_1, t_1) &= f_0(x_1, y_1, z_1, \bar{t}_1) \rho \Delta v \Delta t \\ &+ \iint_{\sigma_1} -k_1(u - u_1) ds \Delta t + \iint_{\sigma_2} k \frac{\partial u}{\partial n_2} ds \Delta t \end{aligned}$$

令 σ_2 趋于 σ_1 , 则 n_2 趋于 $-n$, 区域 G 的体积 Δv 趋于零, 于是上式可化简为

$$\iint_{\sigma_1} \left[k \frac{\partial u}{\partial n} + k_1(u - u_1) \right] ds = 0$$

注意到 σ_1 是边界面 $\partial\Omega$ 上任意的小曲面块, 所以上述积分的被积函数

$$\left(k \frac{\partial u}{\partial n} + k_1(u - u_1) \right) \Big|_{t=\bar{t}} = 0$$

再令 $t_2 \rightarrow t_1$, 并用 t 代替 t_1 , 则有

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = g, \quad (x, y, z, t) \in \Sigma$$

其中 $\sigma = k_1/k > 0, g = \sigma u_1$ 。(1.1.28)式得证。

(1.1.28)式有时也记为 $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) \Big|_{\Sigma} = g$, 其物理意义是在边界上导热体与周围介质按牛顿定律进行自然的热交换。

注4 (1.1.28)式也可以利用热流量公式直接给出。注意到在导热体边界内部和外部的热流量分别为 $q = -k\nabla u$ 和 $q_1 = k_1(u - u_1)n$, 它们在 n 上的投影应相同, 即等于在单位时间内流过单位截面的热量, 因此有

$$q_1 \cdot n = q \cdot n$$

或

$$k_1(u - u_1) = -k \frac{\partial u}{\partial n}$$

由该式可得(1.1.28)式。

注5 由弦振动方程的边界条件(1.1.10)式和(1.1.28)式的推导过程可以看出, 边界条件和方程的导出过程是基本相同的, 区别仅在于导出方程时, 要取小区间 $[x, x + \Delta x]$ 位于 $(0, l)$ (或小区域 G 位于 Ω) 之内; 而在推导边界条件时, 要取包含区间端点的小区间 (或包含 Ω 的边界面的小区域 G)。

初始条件和边界条件统称为热传导方程的定解条件。求解一个具体的温度分布问题, 需要给方程施加定解条件, 使其构成一个定解问题。

如果热传导方程定解问题既包含初始条件也包含边界条件, 那么称其为混合问题。有些定解问题可能只包含初始条件, 而无边界条件。例如, 当导热体体积充分大时, 可认为导热体体积为无穷大, 这时定解条件就只有初始条件而无边界条件, 此类定解问题通常称为初值问题或柯西问题。

如果定解问题只包含边界条件, 而无初始条件, 则称其为边值问题。对这类定解问题在1.1.3小节将进行分解。

1.1.3 泊松方程和定解条件

在导热体温度分布问题中, 如果热源 f_0 和边界条件都与 t 无关, 则经过充分长时间后, 区