中国科学院大学本科生教材系列

数学分析讲义

（第二卷）

丁彦恒 刘笑颖 吴 刚 编

科 学 出 版 社

中国科学院大学教材出版中心资助

中国科学院大学本科生教材系列

数学分析讲义

(第二卷)

丁彦恒　刘笑颖　吴　刚　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书始于实数的基本理论. 接着进入一元微积分学, 包括极限、连续、级数、微分、复数、积分等，重视它对现代数学的启迪，适时介绍些抽象概念(如对基的极限), 以利于拓展到一般分析学. 其次探讨拓扑空间(特别是度量空间、欧氏空间 $\mathbb{R}^n$)的映射，展开多元微积分学，其中涉及隐函数定理、集合上的积分、流形(特别是 $\mathbb{R}^n$ 中的曲面)及微分形式、流形(特别是曲线与曲面)上微分形式的积分、向量分析与场论. 继而研究线性赋范空间中的微分学、函数项级数与函数族的基本分析运算、含参变量的积分(特别是函数的卷积与广义函数等)、傅里叶变换、渐近展开等.

全书分 3 卷出版, 本书为第二卷. 第一、二卷大体上适合那些仅安排在 1 学年时间内学习“数学分析”课程的学生, 而全套则可用以安排 3 个或 4 个学期的“数学分析”课程.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义. 第二卷/丁彦恒, 刘笑颖, 吴刚编. —北京：科学出版社, 2019.12

中国科学院大学本科生教材系列

ISBN 978-7-03-063297-5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①丁… ②刘… ③吴… Ⅲ. ①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 255519 号

责任编辑: 胡庆家 贾晓瑞 / 责任校对: 彭珍珍

责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 12 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5

2019 年 12 月第一次印刷 印张: 17 1/4

字数: 350 000

定价: 68.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

本书是编者授课“数学分析”的讲义. 它形成于教学实践中, 特别是在与中国科学院大学 2014 级、2016 级、2017 级 (本科)、北京师范大学 2017 级 (励耘班) 的同学们一道学习由华东师范大学数学系①、卓里奇 B A② 分别编著的《数学分析》的过程中. 为了缓解同学们边听课边做笔记而引发的忙碌, 应他们的建议, 基本上沿用上述两书的框架和内容, 师生互动组稿成书.

全书分 3 卷出版. 第一、二卷大体上适合那些仅安排在 1 学年时间里学习“数学分析”的学生, 而全套则可用以安排 3 个或 4 个学期的“数学分析”课程. 本书由中国科学院大学教材出版中心资助.

丁彦恒

2018 年 1 月于北京

① 华东师范大学数学系. 数学分析. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

② 卓里奇 B A. 数学分析 (第一卷、第二卷). 第 4 版. 蒋铎, 王昆扬, 周美珂, 邝荣雨译, 周美珂校. 北京: 高等教育出版社, 2012.

目　　录

第 6 章 拓扑空间及映射的极限与连续性

6.1 拓扑空间

6.1.1 拓扑空间的基本概念

1. 基本定义

定义 1 称集合 X 装备了拓扑空间结构或装备了拓扑, 或者称 X 是拓扑空间, 如果指定了 X 的一个子集族 τ, 它具有下列性质:

(1) $\varnothing \in \tau; X \in \tau$.

(2) $(\forall \alpha \in A; \tau_\alpha \in \tau) \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} \tau_\alpha \in \tau$.

(3) $(\tau_i \in \tau; i = 1, \cdots, n) \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} \tau_i \in \tau$.

换句话说, 拓扑空间是由集合 X 和 X 的具有上述性质的子集族 τ 所组成的序对 $(X;\tau)$. τ 包含空集和整个集 X, 族 τ 中的任意多个集合的并集是族 τ 中的集合, 并且族 τ 中的有限个集合之交是族 τ 中的集合.

定义 2 如果 (X, τ) 是拓扑空间, 那么族 τ 中的集合 G 称为开集, 而它关于 X 的余集 $G^c := X \setminus G$ 称为 (X, τ) 的闭集.

一般而言, 不易用列出集族 τ 中的所有集合来给出集合 X 的拓扑, 通常是只指出 X 的一些子集组成的一个集类, 而族 τ 的任一集合可以由该集类中集合的并或交得到.

定义 3 X 的开子集族 $\mathcal{B}$ 称为拓扑空间 $(X;\tau)$ 的基 (开基或拓扑基), 如果每个开集 $G \in \tau$ 是 $\mathcal{B}$ 中某些元素的并.

于是, 为了给出拓扑 τ, 只要给出这个拓扑的基. 一个拓扑空间可以有许多不同的拓扑基.

定义 4 称拓扑空间的基的最小势为该拓扑空间的权.

我们通常涉及的是有可数拓扑基的拓扑空间.

定义 5 称子集 $V \subset X$ 为点 $x \in X$ 的邻域, 如果 $\exists G \in \tau$ 满足 $x \in G \subset V$. 称子集族 $\mathcal{U}_x = \{V_\alpha\}$ 为 x 的邻域系, 如果各 V_α 是 x 的邻域, 且对 x 的任意邻域 V 有 α 使 $V_\alpha \subset V$.

显然, 如果在 X 上给出了拓扑 τ, 那么就确定了每个点 $x \in X$ 的邻域系.

注 1 显然, 拓扑空间的所有点的邻域系合起来可以作为这个空间的拓扑基.

人们常基于此引进拓扑，即 $\forall x \in X$, 指定一个包含点 x 的子集族 $\mathcal{U}_x$, 则 $\mathcal{B} := \bigcup\limits_{x\in X} \mathcal{U}_x$ 为拓扑基, 而 τ 便是由 $\mathcal{B}$ 的元素经 "任意并 (2)" 和 "有限交 (3)" 而得. 以后讨论度量空间时正是这样做的[①].

例 1　设 X 是一集合. 显然 $\{\varnothing, X\}$ 是 X 的一个拓扑结构 (*平凡拓扑*); X 的所有子集 (包括空集 $\varnothing$) 作成的族是 X 的一个拓扑结构 (*最强拓扑*).

例 2　设 $X=\mathbb{R}^1$. $\tau_{\mathbb{R}}$ *是由* $\varnothing, \mathbb{R}$, *所有若干个开区间之并及所有有限多个开区间之交做成的子集族*，则 $(\mathbb{R}^1;\tau_{\mathbb{R}})$ 是拓扑空间, 而 $\mathcal{U}_x := \{(x-r,x+r)\,|\,r>0\}$ 是 x 的一个邻域系，$\mathcal{B} := \bigcup\limits_{x\in X} \mathcal{U}_x$ 是 $\tau_{\mathbb{R}}$ 的一个基. 显然 $\mathcal{B} = \{(x-r,x+r)\,|\,x\in\mathbb{R}^1, 0<r\in\mathbb{Q}\}$ 也是 $\tau_{\mathbb{R}}$ 的一个基, 故 $(\mathbb{R}^1;\tau_{\mathbb{R}})$ 的权是可数的.

例 3　考虑连续函数的*芽集*. 称函数 $f,g\in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ 在点 $a\in\mathbb{R}$ 是等价的, 如果存在这点的邻域 $U(a)$, 使得

$$\forall x \in U(a), \quad f(x)=g(x).$$

所引进的关系确实是等价关系 (它是自反的、对称的和传递的). 在点 $a\in\mathbb{R}$ 彼此等价的连续函数类称为在这一点的*连续函数芽*. 如果 f 是在点 a 生成芽的函数之一, 那么芽本身将用记号 f_a 表示. 现在我们定义芽的邻域. 设 $U(a)$ 是 $\mathbb{R}$ 中点 a 的邻域, f 是定义在 $U(a)$ 上并在点 a 生成芽 f_a 的一个函数. 这个函数 f 在任意点 $x\in U(a)$ 生成自己的芽 f_x. 相应于一切点 $x\in U(a)$ 的芽的集 $\{f_x\}$ 称为芽 f_a 的*邻域*. 把所有不同芽的这样的邻域组成的集取作拓扑基, 连续函数的芽集就成了拓扑空间. 值得注意的是, 在所得到的拓扑空间中, 两个不同点 (芽)f_a, g_a 可以没有不相交的邻域 (图 35).

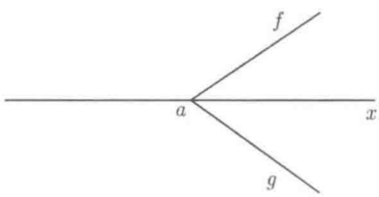

图 35

定义 6　称拓扑空间为*豪斯多夫空间*, 如果它满足*豪斯多夫空间公理*: 空间的任意两个不同点有不相交的邻域.

下节会看到任一度量空间都是豪斯多夫空间. 而具有最简单的拓扑 $\tau=\{\varnothing, X\}$

① 度量空间和拓扑空间的概念在20世纪初就给出了明确的陈述. 法国数学家弗雷歇 (M.R. Fréchet) (1878—1973) 在 1906 年引进了度量空间的概念, 德国数学家豪斯多夫 (F. Hausdorff)(1868—1942) 在 1914 年定义了拓扑空间.

的拓扑空间就是非豪斯多夫拓扑空间, 即便只有两个点, $(X;\tau)$ 也不是豪斯多夫拓扑空间. 此外, 在这个空间中, 点的补集 $X\backslash\{x\}$ 不是开集.

定义 7 称集合 $E\subset X$ 是拓扑空间 $(X;\tau)$ 中的*处处稠密集*, 如果对任意点 $x\in X$ 和它的任一邻域 $U(x)$, 交集 $E\cap U(x)$ 都非空.

可以证明, 在每个拓扑空间中存在势不超过这个拓扑空间权的处处稠密集.

定义 8 具有可数处处稠密集的拓扑空间称为*可分空间*.

例 4 如果在 $\mathbb{R}$ 中考察标准拓扑 $\tau_{\mathbb{R}}$, 那么有理数集 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中处处稠密, 从而 $\mathbb{R}$ 是可分空间.

定义 9 (点与子集间的关系) 称 $x\in X$ 是 $E\subset X$ 的:

• *内点*: 如果 x 有某个邻域含在 E 中. E 的全体内点所成的集合称为 E 的*内部*, 记为 $\mathring{E}$.

• *外点*: 如果 x 是 E 在 X 中的余集的内点.

• *边界点*: 如果 x 既不是 E 的内点, 又不是 E 的外点 (即点 x 的任一邻域中既有属于 E 的点, 也有不属于 E 的点). E 的全体边界点所成的集合称为 E 的*边界*, 记为 ∂E.

• *极限点*: 如果对于点 x 的任意邻域 $U(x)$, 集合 $(E\backslash\{x\})\cap U(x)\neq\varnothing$. 称集合 E 和它在 X 中所有极限点组成的集合之并集为 E 在 X 中的*闭包*, 用 $\overline{E}$ 表示.

命题 1 若 X 是豪斯多夫空间, 则 (F是X中的闭集) $\Leftrightarrow$ (在X中有$F=\overline{F}$).

证 设 F 是 X 中的闭集, $x\in X, x\notin F$. 这时, 开集 $G=X\backslash F$ 是点 x 的邻域, 它不含 F 的点. 这就证明了, 如果 $x\notin F$, 则 x 不是 F 的极限点.

设 $F=\overline{F}$. 要证 $G=X\backslash\overline{F}$ 是 X 中的开集. 如果 $x\in G$, 则 $x\notin\overline{F}$, 因此 x 不是 F 的极限点, 这意味着存在点 x 的一个邻域, 它仅含 F 的有限个点 $x_1,\cdots,x_n$. 因为 $x\notin F$, 所以可找到 x 的邻域 $O_1(x),\cdots,O_n(x)$, 使得 $x_i\notin O_i(x)$. 这时 $O(x)=\bigcap\limits_{i=1}^{n}O_i(x)$ 是点 x 的邻域且不含 F 的点, 即 $O(x)\subset X\backslash F$. 这就是说, $X\backslash F=X\backslash\overline{F}=G$ 是开集, 因而 F 是 X 中的闭集. □

注 2 此命题的豪斯多夫空间, 即 τ_2 要求可减弱为 τ_1 条件 (见练习题 3).

2. 拓扑空间的子空间

设 $(X;\tau_X)$ 是拓扑空间, 而 Y 是 X 的子集. 定义 Y 的子集族

$$\tau_Y:=\{Y\cap G_X\,|\,G_X\in\tau_X\}.$$

不难验证, Y 的子集族 τ_Y 满足拓扑结构公理. 通常称 τ_Y 是 τ_X 在 Y 中的*诱导拓扑*或*相对拓扑*.

定义 10 称拓扑空间 $(X;\tau)$ 的子集 $Y\subset X$ 为 $(X;\tau)$ 的*子空间*, 如果在 Y 中装备了诱导拓扑 τ_Y.

显然, $(Y;\tau_Y)$ 中的开集不一定是 $(X;\tau_X)$ 中的开集.

3. 连通的拓扑空间

定义 11　称拓扑空间 $(X;\tau)$ 是连通的, 如果在 $(X;\tau)$ 中除了 X 本身和空集以外没有别的开–闭集 (即同时是开的和闭的). 直观地说: 拓扑空间 X 是连通的当且仅当 X 不能表为它的两个非空不交的闭 (开) 子集的并.

定义 12　拓扑空间 $(X;\tau)$ 中的集合 E 称为是连通集, 如果它作为 $(X;\tau)$ 的拓扑子空间 (具有诱导拓扑) 是连通的.

从定义 12 和定义 11 推知, 集合 E 连通的性质不依赖于包含它的空间. 更精确地说, 如果 $(X;\tau_X)$ 和 $(Y;\tau_Y)$ 是包含 E 并且在 E 上导出同一个拓扑的拓扑空间, 那么 E 在 X 和 Y 中同时连通, 或者同时不连通.

4. 拓扑空间的直积

设 $(X_1;\tau_1)$ 和 $(X_2;\tau_2)$ 是两个拓扑空间, 我们来定义 $X_1\times X_2$ 上的拓扑基以引进拓扑.

定义 13　拓扑空间 $(X_1\times X_2;\tau_1\times\tau_2)$ 称为拓扑空间 $(X_1;\tau_1),(X_2;\tau_2)$ 的直积, 如果它的拓扑基由形如 $G_1\times G_2$ 的集所组成, 其中 G_i 是拓扑空间 $(X_i;\tau_i), i=1,2$ 中的开集.

应当注意, 形如 $G_1\times G_2$ 的集合 (其中 $G_1\in\tau_1, G_2\in\tau_2$) 只组成 $(X_1\times X_2;\tau_1\times\tau_2)$ 的拓扑基, 但不是所有开集.

5. 紧集

定义 14　拓扑空间 $(X;\tau)$ 中的集合 K 称为紧集 (在拓扑学中有时称为紧致集或重紧致集), 如果能从 X 的任一覆盖 K 的开集族中选出 K 的有限覆盖.

与拓扑空间中集合成为开集或闭集的相对性质不同, 集合成为紧集的性质在下述意义下是绝对的, 即不依赖于它作为哪个空间的子空间, 更确切地说, 成立以下的命题.

命题 2　拓扑空间 $(X;\tau)$ 的子集 K 是 X 中的紧集, 当且仅当 K 是其本身作为 $(X;\tau)$ 的子空间中的紧集.

证　所述命题可以从紧集的定义和在 K 中诱导拓扑 τ_K 的每个开集 G_K 都是 X 中的某个开集 G_X 与 K 的交推出. □

于是, 如果拓扑空间 $(X;\tau_X)$ 与 $(Y;\tau_Y)$ 在集 $K\subset(X\cap Y)$ 上诱导出同一个拓扑, 那么无论 K 是在 X 中还是在 Y 中同时是紧集, 或者同时不是紧集.

下面证明紧集的一些重要性质.

命题 3　紧集具有下述性质.

(1) (紧集的闭性引理) 如果 K 是豪斯多夫空间 $(X;\tau)$ 中的紧集, 那么 K 是 X 的闭子集.

(2) (紧集套引理) 如果 $K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots$ 是非空的紧集套, 那么 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ 非空.

(3) (紧集的闭子集引理) 紧集 K 的闭子集 F 是紧集.

证 (1) 根据集合的闭性判别准则, 只要验证 K 的任一极限点 $x_0 \in X$ 都属于 K. 假设 $x_0 \notin K$. 对于每个 $x \in K$, 作 x 的开邻域 $G(x)$, 使它与 x_0 的某邻域不相交. 所有这些邻域 $G(x), x \in K$ 组成 K 的一个开覆盖, 从中选出有限覆盖 $G(x_1), \cdots, G(x_n)$. 如果点 x_0 的邻域 $O_i(x_0)$ 使得 $G(x_i) \cap O_i(x_0) = \varnothing$, 那么集合

$$O(x_0) = \bigcap_{i=1}^{n} O_i(x_0)$$

也是点 x_0 的邻域, 且有

$$G(x_i) \cap O(x_0) = \varnothing, \quad i = 1, \cdots, n.$$

所以 $K \cap O(x_0) = \varnothing$, 即点 x_0 不可能是 K 的极限点.

(2) 由 (1), 集合 $G_i = K_1 \backslash K_i, i = 1, 2, \cdots$ 是 K_1 中的开集. 如果 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} K_i = \varnothing$, 那么集列 $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset \cdots$ 全体组成 K_1 的覆盖. 从中选出有限覆盖, 必有某个元素 $G_m \supset K_1$, 这与条件

$$K_m = K_1 \backslash G_m \neq \varnothing$$

矛盾, (2) 得证.

(3) 设 $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ 是 F 的开覆盖. 增加一个开集 $G = K \backslash F$, 得到紧集 K 的开覆盖. 从中可以选出 K 的有限覆盖. 因为 $G \cap F = \varnothing$, 这意味着从族 $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ 中选出了集 F 的有限覆盖. □

练 习

1. (1) 在自然数集 $\mathbb{N}$ 中, 令公差 d 与 n 互质的等差序列为 $n \in \mathbb{N}$ 的邻域. 试问, 这样生成的拓扑空间是否是豪斯多夫空间?

(2) $\mathbb{N}$ 作为取标准拓扑的实数集 $\mathbb{R}$ 的子空间时具有怎样的拓扑?

(3) 写出 $\mathbb{R}$ 的所有开子集.

2. (1) 试用闭集的语言叙述拓扑空间的公理.

(2) 证明: $\overline{(\overline{E})} = \overline{E}$.

(3) 证明: 任一集合的边界是闭集.

(4) 证明: 如果 F 是 $(X;\tau)$ 的闭集, G 是 $(X;\tau)$ 的开集, 那么 $G\setminus F$ 是 $(X;\tau)$ 的开集.

(5) 证明: 如果 $(Y;\tau_Y)$ 是拓扑空间 $(X;\tau_X)$ 的子空间, 集合 E 满足: $E\subset Y\subset X$, 且 $E\in\tau_X$, 那么 $E\in\tau_Y$.

3. 给定拓扑空间 $(X;\tau)$, 如果其任意单点集都是闭集, 则称它是强意义下的拓扑空间或 τ_1-空间. 试证:

(1) 任何豪斯多夫空间都是 τ_1-空间 (豪斯多夫空间叫 τ_2-空间);

(2) 并非所有 τ_1-空间都是 τ_2-空间;

(3) 两点集 $X=\{a,b\}$, 在其中定义开集族 $\tau=\{\varnothing,X\}$, 则它不是 τ_1-空间;

(4) 在 τ_1-空间中, 集合 F 是闭集, 当且仅当它包含自己的一切极限点.

6.1.2 度量空间

1. 定义和例子

定义 15 设 X 是个集合. 若 $\forall x,y\in X$, 都有唯一确定的实数 $d(x,y)$ 与之对应, 满足公理:

(1) (唯一性) $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;

(2) (对称性) $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) (三角不等式) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$,

则称 $(X;d)$ 为*度量空间*, $d(\cdot,\cdot)$ 为 X 上的*度量*, X 中的元素为*点*(简记 $X=(X,d)$).

注 3 (1) 由 (1)—(3) 推出映射

$$d: X\times X\to\mathbb{R}^+\,(:=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geqslant 0\}), \tag{6.1.1}$$

即 d 是非负的: $0\leqslant d(x,y)$. 事实上, $0=d(x,x)\leqslant d(x,y)+d(y,x)=2d(x,y)$.

(2) 若以

(1′) (非负性) $d(x,y)\geqslant 0$

取代 (1), 则称满足 (1′), (2), (3) 的对应 $d(\cdot,\cdot)$ 为 X 上的*半度量*.

例 5 实数集 $\mathbb{R}$ 是一个度量空间, 如果定义 $d(x,y)=|x-y|$ (称为 $\mathbb{R}$ 的标准度量).

例 6 以 $C[a,b]$ 记闭区间 $[a,b]$ 上的全体连续函数组成的集合. 规定

$$d(f,g)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|,\quad \forall f,g\in C[a,b]. \tag{6.1.2}$$

易验证 $C[a,b]$ 是度量空间. 称 (6.1.2) 式为 $C[a,b]$ 中的*一致度量*或*切比雪夫度量*. 也可对 $p\geqslant 1$ 定义度量

$$d_p(f,g)=\left(\int_a^b|f(x)-g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p},\quad \forall f,g\in C[a,b] \tag{6.1.3}$$

使得 $C[a,b]$ 为度量空间.

例 7 以 $C^{(k)}[a,b]$ 记 $[a,b]$ 上有 k 阶连续导数的函数集. 规定

$$d(f,g)=\max\{M_0,\cdots,M_k\},\quad \text{其中 } M_i:=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(i)}(x)-g^{(i)}(x)|,\quad i=0,1,\cdots,k, \tag{6.1.4}$$

则 $C^{(k)}[a,b]$ 是度量空间.

例 8 在集合 $\mathcal{R}[a,b]$ 中引进等价关系 "$\sim$": $f\sim g \Leftrightarrow$ 如果它们至多在一个零测集上不相等. 将这些等价类组成的集合记作 $\widetilde{\mathcal{R}}[a,b]$. 易验证由 (6.1.3) 式定义的 $d_p(\cdot,\cdot)$ 为 $\widetilde{\mathcal{R}}[a,b]$ 上的度量. 记这个度量空间为 $\widetilde{\mathcal{R}}_p[a,b]$.

2. 度量空间的拓扑结构

下面总是设 X 是一个度量空间.

首先注意: *度量空间是拓扑空间*. 为说明此事, 按 6.1.1 小节注 1, 只需注意到每一点 $a\in X$ 具有如下的邻域系

$$B(a;\delta):=\{x\in X\,|\,d(a;x)<\delta\},\quad \delta>0, \tag{6.1.5}$$

称 $B(a;\delta)$ *为以 a 为中心, 以 δ 为半径的球*.

注 4 对于度量空间, 有关拓扑概念可用距离进一步描述.

• $E\subset X$ 是开集 $\Leftrightarrow \forall x\in E,\exists\delta>0$ 使得 $B(x;\delta)\subset E$. 特别 $B(x;\delta)$ 是开集.

• $x\in X$ 是子集 $E\subset X$ 的极限点 $\Leftrightarrow \exists\{x_n\}\subset E$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x,x_n)=0$. 从而, $E\subset X$ 是闭集 $\Leftrightarrow$ 由 $\{x_n\}\subset E$, $\lim\limits_{n\to\infty}d(x,x_n)=0$ 推出 $x\in E$.

• 任一度量空间 $(X;d)$ 都是豪斯多夫空间, 因为对于任意不重合的两个点 $a,b\in X$, 有 $d(a,b)>0$, 取 $\delta=\dfrac{1}{2}d(a,b)$, 则 $B(a;\delta)\cap B(b;\delta)=\varnothing$.

• 如果 $(X_1;d_1)$ 和 $(X_2;d_2)$ 是两个度量空间, 那么它们的直积 $X_1\times X_2$ 也是度量空间. 可引进度量 d: $\forall(x_1,x_2)\in X_1\times X_2,(x_1',x_2')\in X_1\times X_2$,

$$d((x_1,x_2),(x_1',x_2'))=\sqrt{d_1^2(x_1,x_1')+d_2^2(x_2,x_2')},$$

或者

$$d((x_1,x_2),(x_1',x_2'))=d_1(x_1,x_1')+d_2(x_2,x_2'),$$

或者

$$d((x_1,x_2),(x_1',x_2'))=\max\{d_1(x_1,x_1'),d_2(x_2,x_2')\}.$$

容易看出, 在上述每一种情形, 我们都得到 $X_1\times X_2$ 上的度量.

3. 度量紧性

首先给出度量空间中的有界集和收敛序列的概念.

• 设 $E \subset X$. $d(E) = \sup\limits_{x,y \in E} d(x,y)$ 称为E 的直径. 若 $d(E) < +\infty$, 则说 E 是有界集; 若 $d(E) = +\infty$, 则说 E 是无界集.

• 设 $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$，则称 $\{x_n\}$ 收敛于 x，并称 $\{x_n\}$ 为收敛序列, x 为 $\{x_n\}$ 的极限，常记作 $x_n \to x$.

定义 16 称集合 $E \subset X$ 是度量空间 $(X;d)$ 的 ε-网, 如果对于任一点 $x \in X$, 有点 $e \in E$, 使得 $d(e,x) < \varepsilon$.

命题 4 (有限 ε-网引理) 如果度量空间 $(K;d)$ 是紧的, 那么对任意的 $\varepsilon > 0$, 在 $(K;d)$ 中 K 有有限的 ε-网.

证 对每个点 $x \in K$, 取开球 $B(x;\varepsilon)$. 然后从这些球的开覆盖中选取有限覆盖 $B(x_1;\varepsilon), \cdots, B(x_n;\varepsilon)$. 显然, 点 $x_1, \cdots, x_n$ 组成所求的 ε-网. □

推论 1 如果度量空间 $(K;d)$ 是紧的, 则它是有界的.

证 设 $B(x_1;1), \cdots, B(x_n;1)$ 是命题 4 的证明中出现的有限 1-网. $\forall\, x, y \in K$, $\exists\, x_i, x_j$ 使得 $d(x,x_i) < 1$, $d(y,x_j) < 1$. 于是

$$d(x,y) \leqslant d(x,x_i) + d(x_i,x_j) + d(x_j,y) \leqslant 2 + \max\{d(x_i,x_j) \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n\}.$$

这意味着 $d(K) < \infty$. □

命题 5 (度量紧集的准则) 度量空间 $(K;d)$ 是紧的, 当且仅当它的任一点列有子列收敛到 K 中某个点.

在证明命题 5 之前, 先给出下述引理.

预备引理 如果从度量空间 $(K;d)$ 的任一点列中可以选出在 K 中收敛的子列, 则

(1) $\forall \varepsilon > 0$, K 有有限 ε-网;

(2) K 的任一非空闭子集套有非空的交集.

证 (1) 假如存在某个 $\varepsilon_0 > 0$, 在 K 中无有限 ε_0-网, 那么可构造 K 中点列 $\{x_n\}$, 满足: $\forall n \in \mathbb{N}$ 和 $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, 均有 $d(x_n, x_i) > \varepsilon_0$. 显然, 这个序列中不能选出收敛子列.

(2) 如果 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ 是 K 中的闭集列, 取 $x_n \in F_n, n = 1, 2, \cdots$, 得到 K 中点列 $\{x_n\}$, 从中选出收敛子列 $\{x_{n_i}\}$. 根据作法, 它的极限 $a \in K$ 必定属于闭集列中的每一个 $F_i, i \in \mathbb{N}$. □

命题 5 的证明 “$\Rightarrow$”. 设 $(K;d)$ 是紧的. $\forall \{x_n\} \subset K$, 兹证它有子列在 K 中收敛. 如果序列 $\{x_n\}$ 只有有限个不同的点, 那么结论显然成立, 因此可以认为 $\{x_n\}$ 有无限个不同的点. 对于 $\varepsilon_1 = 1/1$, 构作有限 1-网, 并取包含序列无限多项的

闭球 $\tilde{B}(a_1;1)$. 根据 6.1.1 小节命题 3 (紧集的闭子集引理), $\tilde{B}(a_1;1)$ 本身是紧集, 在 $\tilde{B}(a_1;1)$ 存在有限 $\varepsilon_2=1/2$-网和包含序列无限多项的闭球 $\tilde{B}(a_2;1/2)$, 这就得到了一个紧集套

$$\tilde{B}(a_1;1)\supset\tilde{B}(a_2;1/2)\supset\cdots\supset\tilde{B}(a_n;1/n)\supset\cdots,$$

根据 6.1.1 小节命题 3(紧集套引理), 它们有公共点 $a\in K$. 在 $\tilde{B}(a_1;1)$ 中取序列的点 x_{n_1}, 然后在 $\tilde{B}(a_2;1/2)$ 中取序列的点 x_{n_2}, 且 $n_2>n_1$, 等等. 如此我们得到了子序列 $\{x_{n_i}\}$, 根据作法, $\{x_{n_i}\}$ 收敛到 a.

"$\Leftarrow$". 设 $(K;d)$ 的任一点列有在 K 中收敛的子列, 兹证 $(K;d)$ 是紧的. (反证) 事实上, 如果从 $(K;d)$ 的某个开覆盖 $\{G_\alpha:\alpha\in A\}$ 中不能选出有限覆盖, 那么由预备引理, 构作 K 的有限 $\varepsilon_1=1$-网, 并且可以找到闭球 $\tilde{B}(a_1;1)$, 使 $\{G_\alpha:\alpha\in A\}$ 不含 $\tilde{B}(a_1;1)$ 的有限覆盖. 对 $\tilde{B}(a_1;1)$ 构作有限的 1/2-网, 从中可以找出闭球 $\tilde{B}(a_2;1/2)$, $\{G_\alpha,\alpha\in A\}$ 不含 $\tilde{B}(a_2;1/2)$ 的有限覆盖. 这样一来, 便得到了闭集套

$$\tilde{B}(a_1;1)\supset\tilde{B}(a_2;1/2)\supset\cdots\supset\tilde{B}(a_n;1/n)\supset\cdots,$$

由预备引理及作法可见, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{B}(a_n;1/n)=\{a\}\subset K$. 自然点 a 被某个 $G_{\alpha_0},\alpha_0\in A$ 覆盖, 因为 G_{α_0} 是开集, 所以对于充分大的 n, $\tilde{B}(a_n;1/n)\subset G_{\alpha_0}$. 导致矛盾, 命题 5 得证. □

4. *度量完备性*

a. 基本定义和例子

定义 17 度量空间 $(X;d)$ 的点列 $\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ 叫做**基本列或柯西列**, 如果 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, 使当 $m,n\in\mathbb{N}$ 且 $m,n>N$ 时, 有 $d(x_m,x_n)<\varepsilon$.

现在我们给出完备度量空间的定义.

定义 18 称度量空间 $(X;d)$ 是**完备的**, 如果它的每个基本列是收敛列.

例 9 由数列的柯西收敛准则推出, 具有标准度量的实数集 $\mathbb{R}$ 是完备的度量空间.

显然度量空间的一切收敛列都是基本列, 所以在完备度量空间的定义中, 实质上是要求空间满足序列收敛性的柯西准则.

例 10 在标准度量下, 集合 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 不是完备度量空间. 事实上, $\left\{\dfrac{1}{n}\middle|n\in\mathbb{N}\right\}$ 是基本列, 但在 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 中没有极限.

例 11 考察定义在区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上具有度量

$$d(f,g)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)| \tag{6.1.6}$$

的实值连续函数集 $C[a,b]$(见本节例 5).