

数据加载失败，请稍后重试！

需要全本请访问 www.ertongbook.com

高师函授教材

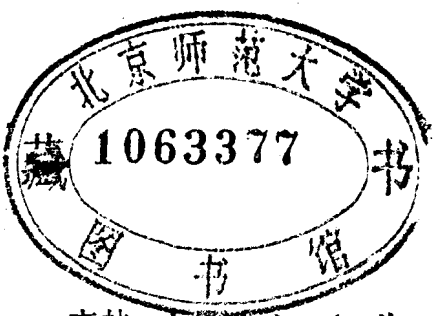
数学分析

中　　册

东北三省高师函授《数学分析》协编组 编

J11/234/01

北京师范大学
藏 1063377 书
图书馆



吉林人民出版社

高师函授教材

数 学 分 析

（中 册）

东北三省高师函授《数学分析》协编组 编

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春市印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 10$\frac{7}{8}$印张 240,000字

1983年1月第1版 1983年1月第1次印刷

印数：12,320册

书号：13091·127 定价：0.95元

目　　录

第七章　不定积分

§ 7·1　不定积分的概念与性质……1
§ 7·2　基本积分表……6
§ 7·3　分部积分法……10
§ 7·4　换元积分法……17
§ 7·5　有理函数的积分……41
§ 7·6　简单无理函数的积分……59
§ 7·7　三角函数有理式的积分……71
习题……77

第八章　定积分

§ 8·1　定积分的概念……81
§ 8·2　定积分的性质……91
§ 8·3　微积分学基本定理……99
§ 8·4　定积分的分部积分法和换元积分法……104
习题……112

第九章　定积分的应用

§ 9·1　定积分在几何上的应用……116
§ 9·2　定积分在物理上的应用……134
习题……142

第十章　实数基本定理·连续函数性质
证明·函数可积性

§ 10·1　实数基本定理……144

§10·2 闭区间上连续函数性质的证明…… 154
§10·3 函数的可积性…… 165
习题…… 179
第十一章 数项级数
§11·1 无穷级数的基本概念…… 180
§11·2 基本性质与收敛准则…… 193
§11·3 正项级数…… 200
§11·4 变号级数…… 217
习题…… 229
第十二章 函数项级数
§12·1 一般概念…… 232
§12·2 一致收敛性…… 236
§12·3 和函数的分析性质…… 248
习题…… 256
第十三章 幂级数
§13·1 幂级数的收敛问题…… 258
§13·2 幂级数的性质…… 266
§13·3 函数的幂级数展开…… 271
§13·4 幂级数在近似计算中的应用…… 289
§13·5 复数项幂级数·尤拉公式…… 294
习题…… 297
第十四章 傅里叶级数
§14·1 周期函数的傅氏级数…… 299
§14·2 傅氏级数的收敛性…… 311
§14·3 正弦展开与余弦展开…… 316
§14·4 以 $2l$ 为周期的函数展开…… 322
§14·5 傅氏级数的复数形式…… 327

需要全本请访问 www.ertongbook.com

习题…… 332

习题答案

第七章…… 333
第八章…… 337
第九章…… 338
第十章…… 339
第十一章…… 339
第十二章…… 340
第十三章…… 340
第十四章…… 342

第七章　不定积分

前面三章，我们研究了导数和微分，中值定理以及导数应用，这些内容称为一元函数的微分学．从这一章到第九章，将要研究一元函数的积分学．积分学分为不定积分和定积分两部分，首先研究不定积分．不定积分的计算是一个相当复杂的问题，应当下些工夫把它学好，因为它是积分学的基础．

§7·1　不定积分的概念与性质

微分学的基本问题是寻求一个已知函数的导数，这个问题有其重要意义，我们已经看到它的许多应用．但是在实际中，还广泛地存在着与此相反的另一类问题，这一类问题并不是要寻找某一个函数的导数；而是反过来，要寻找一个函数，使得它的导数恰好等于某一个已知函数．

例如，如果某物体的运动规律是由方程

$$s=f(t)$$

给出的，其中 t 是时间，s 是物体走过的路程．那么对函数 $f(t)$ 进行求导，就得到这个物体在时刻 t 的瞬时速度

$$v=f'(t)$$

但是在力学里，我们也常遇到相反的问题，即已知物体在任一时刻 t 的速度 $v=v(t)$，而要去找出这个物体的运动方程

$s=f(t)$. 从数学来看，这个问题就是要找一个函数 $s=f(t)$，使其导数 $f'(t)$恰好等于已知函数 $v(t)$. 这正是微分学的逆问题，即已经知道了函数的导数，而要找出原来的函数. 这就是本章要讨论的中心问题.

一、原函数与不定积分 我们首先引进原函数的概念。

定义 设已知函数 $f(x)$，如果存在函数 $F(x)$，使得

$$F'(x)=f(x)$$

则把$F(x)$叫做$f(x)$的**原函数.**

由于 $F'(x)=f(x)$与 $dF(x)=f(x)dx$ 是等价的，所以也可以说：$F(x)$是微分$f(x)dx$的原函数.

例如$\sin x$ 是 $\cos x$的原函数. 因为 $(\sin x)'=\cos x$. 又如表示自由落体下降距离的函数$s=\frac{1}{2}gt^2$是速度 $v=gt$ 的原函数. 因为$s'=\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'=gt$.

对于一个给定的函数 $f(x)$，假如 $F(x)$ 是它的一个原函数，即 $F'(x)=f(x)$，则 $F(x)+C$ (C 为任意常数) 也是它的原函数. 因为

$$[F(x)+C]'=F'(x)+C'=f(x)$$

这就是说，如果一个函数有原函数，则必有无穷多个.

随之而来的问题是：除了形如$F(x)+C$的函数外，$f(x)$是否还有其他的原函数？即是说，一个函数的无穷多个原函数之间，仅仅就在常数项上有区别吗？下述定理肯定地回答了这个问题.

定理 如果函数 $f(x)$有原函数 $F(x)$，则 $f(x)$ 的无穷多个原函数都包括在函数族 $F(x)+C$之内.

证明 设$F_1(x)$和$F_2(x)$都是$f(x)$的原函数，根据定义，则$F_1'(x)=F_2'(x)=f(x)$。由拉格朗日中值定理的推论2，得$F_1(x)=F_2(x)+C$。由此可知，如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$f(x)$的其他原函数必然可以写成$F(x)+C$的形状。这就是说，$F(x)+C$是$f(x)$的原函数的一般表达式。

这个定理的重要意义在于：如果要想找出$f(x)$的所有原函数，只要随便找出其中某一个就行了，在所找出的原函数上加上一个任意常数，便包括了所有的原函数。

定义 函数$f(x)$的全体原函数，叫做$f(x)$(或$f(x)dx$)的**不定积分**，记为

$$\int f(x)dx$$

函数$f(x)$叫做**被积函数**，微分$f(x)dx$叫做**被积表达式**，x叫做**积分变量**。

如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，由定义有

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

其中C是任意常数，也称**积分常数**。

根据不定积分定义，上式右端的任意常数C是必须有的，并且正是由于表达式$F(x)+C$中有个任意常数，才称为不定积分。

例 函数$f(x)=x^2$的不定积分是

$$\int x^2\,dx\text{①}=\frac{x^3}{3}+C$$

这可以用求导法来验证：

①应注意：积分号$\int$下面所写的是微分x^2dx，而不是只写被积函数x^2，初学者容易丢掉dx，总之，积分号下永远是微分表达式。

$$\left(\frac{x^3}{3}+C\right)'=x^2$$

又 $f(x)=\sin x$ 的不定积分是

$$\int \sin x dx=-\cos x+C$$

因为 $(-\cos x+C)'=\sin x$

应当知道，检验一个函数$F(x)$是否是另一个函数$f(x)$的原函数的方法，就是求$F(x)$的导数，看看$F'(x)$是否等于$f(x)$。这个验证方法，今后在判断我们所得到的积分结果是否正确时，是一个基本的方法。

不定积分的几何意义 现在讨论一下不定积分的几何意义，先从一个具体例子说起，然后讲一般的情况。

设有不定积分 $\int 2xdx=x^2+C$，这是一族函数，各个函数只差一个常数。所有原函数 $y=x^2+C$ 的导数都等于被积函数，即

$$y'=(x^2+C)'=2x$$

这就是说，各个原函数在同一点 x 的导数值都是相等的。从几何上（图7—1），这个函数族的图象是抛物线族 $y=x^2+C$（皆以y轴为对称轴，开口向上），如果将某一条抛物线沿y轴平行移动，便可得到抛物线族中的另外任何一条（比如若将 $y=x^2$ 上移一个单位便得 $y=x^2+1$，下移一个单位便得 $y=x^2-1$，等等）。在每一条抛物线上横标相同的点处作切线，它们的斜率都相等（比如在横标为$x=1$的各点处的切线斜率都是$y'|_{x=1}=2x|_{x=1}=2$），亦即这些切线都是平行的。

一般的，$\int f(x)dx=F(x)+C$ 是一族函数且 $[F(x)+C]'=f(x)$。它们的图象是曲线族 $y=F(x)+C$，这些曲线叫做函数 $f(x)$ 的**积分曲线**。曲线族可以由其中的某一条比如

$y=F(x)$ 沿 y 轴平移而全部得到。如果在每一条曲线上横标相同的各点处作切线，则这些切线都是平行的（图7—2）。

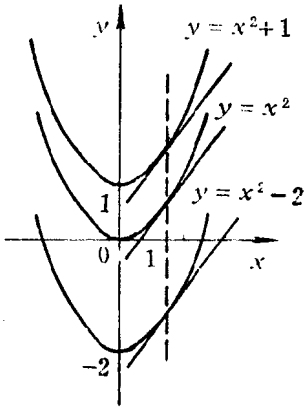


图 7—1

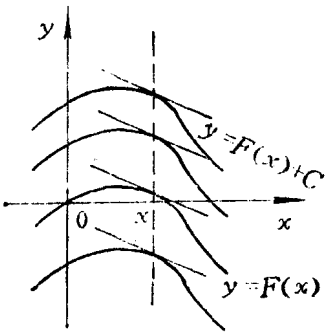


图 7—2

二、不定积分的性质

1°根据原函数和不定积分的定义，显然有

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \qquad (1)$$

此外，对于函数$F(x)$，先求导$F'(x)$，后求不定积分，则有

$$\int F'(x)dx = F(x)+C \qquad (2)$$

这就是说：若先积分后微分（求导），则两者的作用抵消；反之，若先微分后积分，则抵消后相差一个任意常数。

求原函数的运算称为积分运算，它显然与微分运算（求导运算）是互逆的运算。

2°被积函数中的常因子可提到积分号外面来：

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx \qquad (3)$$

3°有限个函数的代数和的积分等于各个函数的积分的代数和：

$$\int [f(x)\pm\varphi(x)\pm\cdots\pm\phi(x)]dx$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com

$$=\int f(x)dx\pm\int\varphi(x)dx\pm\cdots\pm\int\phi(x)dx \quad (4)$$

公式（3）和（4）容易由微分法直接验证。例如

$$\{\int[f(x)\pm\varphi(x)\pm\cdots\pm\phi(x)]dx\}'$$
$$=f(x)\pm\varphi(x)\pm\cdots\pm\phi(x)$$

又
$$[\int f(x)dx\pm\int\varphi(x)dx\pm\cdots\pm\int\phi(x)dx]'$$
$$=[\int f(x)dx]'\pm[\int\varphi(x)dx]'\pm\cdots\pm[\int\phi(x)dx]'$$
$$=f(x)\pm\varphi(x)\pm\cdots\pm\phi(x)$$

可见公式（4）成立.

求不定积分时，经常要应用（3）和（4），这是两个基本公式.

§7·2 基本积分表

从这一节开始研究不定积分的计算. 关于导数的计算，首先有一批导数公式（导数表）作为基础，然后又有几个求导法则，于是便可以进行求导的计算. 就这一点来看，不定积分的计算与导数的计算颇为类似，它也有一批积分公式（积分表）作为基础，并且也有几个最基本的法则. 不过有一点值得提起注意，这就是不定积分的计算远不象导数计算那样简单了，应当作出相当的努力.

下面介绍一批积分公式，即所谓基本积分表，这些公式在积分运算中是离不开的，应当牢牢记住. 公式的导出很简单，我们通过几个例子加以说明.

如果$F'(x)=f(x)$，则按不定积分定义，便有

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

例如，因$(C)'=0$，所以

$$\int 0dx=C$$

因 $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'=x^{\alpha}$，所以

$$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$$

因 $(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$，所以

$$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\mathrm{tg}x+C$$

上面几个例子清楚地说明：有一个求导公式，就可以得到一个相应的积分公式．因此，把第四章的导数表中所列举的求导公式，逆转过来，就可以推出相应的积分公式，下面把这些公式列成表．

基本积分表

1．$\int 0dx=C$

2．$\int 1dx=x+C$（即$\int dx=x+C$）

3．$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C(\alpha\neq -1)$

4．$\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C\quad(x>0)$

$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$① $(x>0$或$x<0)$

① 当$x<0$时，$\ln(-x)$的导数为$[\ln(-x)]'=\frac{(-x)'}{-x}=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$，因此当$x<0$时，$\int\frac{dx}{x}=\ln(-x)+C$．可见，不论$x>0$或$x<0$，公式$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$恒成立．

5. $\int e^x dx = e^x + C$

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

12. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$

计算一下各式右端的导数，便知分别等于左端的被积函数，从而公式成立。

利用前面的不定积分性质2°，3°和基本积分表，我们可以计算一些简单函数的不定积分。

例1 $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

（注意，从哪一步开始不含积分号 $\int$，就从这一步加上任意常数 C）

例 2 $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$

$$= -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

例 3 $\int (5x^2 - 3x + 4)dx = \int 5x^2dx - \int 3xdx + \int 4dx$

$$= 5\int x^2dx - 3\int xdx + 4\int dx$$

$$= \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$$

（这里出现了三个不定积分，固然各有一个任意常数；但若干个任意常数之和仍是一个任意常数，因此只加一个任意常数 C 就行了）

例 4 $\int \left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3c\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

$$= 2a\int x^{-\frac{1}{2}}dx - b\int x^{-2}dx + 3c\int x^{\frac{2}{3}}dx$$

$$= 2a\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - b\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 3c\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C$$

$$= 4a\sqrt{x} + \frac{b}{x} + \frac{9}{5}cx\sqrt[3]{x^2} + C$$

例 5 $\int \frac{\sqrt[3]{u^2} - \sqrt[4]{u}}{\sqrt{u}}du = \int (u^{(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})} - u^{(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})})du$

$$= \int u^{\frac{1}{6}}du - \int u^{-\frac{1}{4}}du = \frac{6}{7}u^{\frac{7}{6}} - \frac{4}{3}u^{\frac{3}{4}} + C$$

例 6 求 $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$

按多项式除法，被积函数化为

$$\frac{x^4}{x^2+1}=x^2-1+\frac{1}{x^2+1}$$

于是 $$\int\frac{x^4}{x^2+1}dx=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\int x^2dx-\int dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-x+\operatorname{arctg}x+C$$

例7. $$\int(10^x+\operatorname{ctg}^2x)dx=\int 10^xdx+\int\frac{\cos^2x}{\sin^2x}dx$$

$$=\int 10^xdx+\int\frac{1-\sin^2x}{\sin^2x}dx$$

$$=\int 10^xdx+\int\frac{1}{\sin^2x}dx-\int dx$$

$$=\frac{10^x}{\ln 10}-\operatorname{ctg}x-x+C$$

例8 $$\int\frac{x+\cos^2x}{x\cos^2x}dx=\int\frac{1}{\cos^2x}dx+\int\frac{1}{x}dx$$

$$=\operatorname{tg}x+\ln|x|+C$$

§ 7·3 分部积分法

分部积分法体现为一个公式，它是从两个函数乘积的求导公式出发而推得的。

设 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 是两个可微函数，由乘积的求导法则有

$$(uv)' = uv' + u'v$$

即
$$uv' = (uv)' - u'v$$

两端取积分，得

$$\int uv'dx = \int [(uv)' - u'v]dx$$

$$= \int (uv)'dx - \int u'vdx$$

根据不定积分的性质1°，便有分部积分公式：

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx \qquad (\text{I})$$

分部积分公式还可以表为另一形式．因 $v'dx = dv$，$u'dx = du$，所以（I）式又可写成

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (\text{II})$$

总之，分部积分公式有两个表达形式，对于初学者还是（I）式较为方便，我们在下面也就着（I）式说明它的使用要领。

（I）式左端是要计算的给定的积分，其被积函数是u和v'的乘积；而右端第一项是两个函数(一个是u，另一是v'的原函数）的乘积，第二项则是一个新的积分$\int u'vdx$．这个公式的作用显然是，把所给的左端的积分转化为右端的另一个积分，如果右端的积分比较容易计算，那么这个公式便收到了效用．公式之所以称为分部积分法，则是由于把被积函数 uv' 的一部分 v' 分出来，先求出它的积分，而将问题转化为另外的一个积分．下面通过例子，说明使用要领．

例1 求 $\int \underset{(u)}{x}\ \underset{(v')}{e^x}\ dx$

解 被积函数是x与e^x的乘积，要把其中一个取作u，另一个取作v'．从公式看出，首先要从v'求出它的原函数v来，

需要全本请访问 www.ertongbook.com