信毅教材大系 · 通识系列

杨寿渊 编著

测度论与实分析基础

Introduction to Measure Theory and Real Analysis

G

復旦大學出版社

信毅教材大系 · 通识系列

测度论与实分析基础

Introduction to Measure Theory and Real Analysis

杨寿渊 编著

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

测度论与实分析基础/杨寿渊编著. —上海：复旦大学出版社，2019. 8
信毅教材大系. 通识系列
ISBN 978-7-309-14466-6

Ⅰ. ①测…　Ⅱ. ①杨…　Ⅲ. ①测度论-高等学校-教材　Ⅳ. ①O174. 12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 145949 号

测度论与实分析基础
杨寿渊　编著
责任编辑/陆俊杰

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号　邮编：200433
网址：fupnet@fudanpress. com　http://www. fudanpress. com
门市零售：86-21-65642857　团体订购：86-21-65118853
外埠邮购：86-21-65109143　出版部电话：86-21-65642845
上海四维数字图文有限公司

开本 787×1092　1/16　印张 15. 25　字数 334 千
2019 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-14466-6/O · 670
定价：38. 00 元

“信毅教材大系”编委会

总 序

世界高等教育的起源可以追溯到1088年意大利建立的博洛尼亚大学，它运用社会化组织成批量培养社会所需要的人才，改变了知识、技能主要在师徒间、个体间传授的教育方式，满足了大家获取知识的需要，史称“博洛尼亚传统”。

19世纪初期，德国的教育家洪堡提出“教学与研究相统一”和“学术自由”的原则，并指出大学的主要职能是追求真理，学术研究在大学应当具有第一位的重要性，即“洪堡理念”，强调大学对学术研究人才的培养。

在洪堡理念广为传播和接受之际，爱尔兰天主教大学（爱尔兰国立都柏林大学的前身）校长纽曼发表了“大学的理想”的著名演说，旗帜鲜明地指出“从本质上讲，大学是教育的场所”，“我们不能借口履行大学的使命职责，而把它引向不属于它本身的目标”。强调培养人才是大学的唯一职能。纽曼关于“大学的理想”的演说让人们重新审视和思考大学为何而设、为谁而设的问题。

19世纪后期到20世纪初，美国威斯康星大学查尔斯·范海斯校长提出“大学必须为社会发展服务”的办学理念，更加关注大学与社会需求的结合，从而使大学走出了象牙塔。

2011年4月24日，胡锦涛总书记在清华大学百年校庆庆典上指出，高等教育是优秀文化传承的重要载体和思想文化创新的重要源泉，强调要充分发挥大学文化育人和文化传承创新的职能。

总而言之，随着社会的进步与变革，高等教育不断发展，大学的功能不断扩展，但始终都在围绕着人才培养这一大学的根本使命，致力于不断提高人才培养的质量和水平。

对大学而言，优秀人才的培养，离不开一些必要的物质条件保障，但更重要的是高效的执行体系。高效的执行体系应该体现在三个方面：一是科学合理的学科专业结构；二是能洞悉学科前沿的优秀的师资队伍；三是作为知识载体和传播媒介的优秀教材。教材是体现教学内容与教学方法的知识载体，是进行教学的基本工具，也是深化教育教学改革，提高人才培养质量的重要保证。

一本好的教材，要能反映该学科领域的学术水平和科研成就，能引导学生沿着正确的学术方向步入所向往的科学殿堂。因此，加强高校教材建设，对于提高教育质量、稳定教学秩序、实现高等教育人才培养目标起着重要的作用。正是基于这样的考虑，江西财经大学与复旦大学出版社达成共识，准备通过编写出版一套高质量的教材系列，以期进一步锻炼学校教师队伍，提高教师素质和教学水平，最终将学校的学科、师资等优势转化为人才培养优势，提升人才培养质量。为凸显江财特色，我们取校训"信敏廉毅"中一前一尾两个字，将这个系列的教材命名为"信毅教材大系"。

"信毅教材大系"将分期分批出版问世，江西财经大学教师将积极参与这一具有重大意义的学术事业，精益求精地不断提高写作质量，力争将"信毅教材大系"打造成业内有影响力的高端品牌。"信毅教材大系"的出版，得到了复旦大学出版社的大力支持，没有他们的卓越视野和精心组织，就不可能有这套系列教材的问世。作为"信毅教材大系"的合作方和复旦大学出版社的一位多年的合作者，对他们的敬业精神和远见卓识，我感到由衷的钦佩。

王　乔

2012 年 9 月 19 日

编者自序

严格化和定量化是当前的学科发展趋势，不限于数学、物理、计算机等理工科，还包括统计、金融、经济、管理乃至社会科学，数学已经成为研究这些学科的基本语言和工具。随着大数据的兴起，作为概率统计的基础语言的测度论与 Lebesgue 积分已成为学习和研究上述学科不可或缺的基础知识。传统的初等概率论教材由于没有测度论和 Lebesgue 积分理论作为基础，许多重要的概念和定理是没法讲清楚的，这就给学生阅读现代文献和做研究带来了障碍，而且如果没有本科的相关课程作基础，这个障碍是难以逾越的。

近年来江西财经大学领导越来越重视数学等基础课的教学，但由于课时的限制，无法同时开设实变函数与测度论这两门重要课程，而这两门课程又是学习高等概率论、随机过程、金融数学、金融工程等后续课程不可或缺的。为了解决这个矛盾，笔者尝试将这两门课程的教学融合在一起，撰写了这本讲义。

本书分为 6 章，内容涵盖了测度论与基础实分析的核心内容，在选材上力求兼顾学生的接受能力以及知识的覆盖面和必要的深度。

第 1 章为预备知识，重点讲述集合的基数、$\mathbb{R}^n$ 上的点集拓扑以及连续映射等内容，为学生学习后续章节作铺垫。

第 2 章讲述测度的基础知识，包括 σ-代数和一般测度的定义，外测度和 Lebesgue 测度，Dynkin $\pi-\lambda$ 定理和测度的唯一性，以及测度的扩张定理。前三项一般的实变函数教材都有，但本书在写法上与大多数教材不同，在保证逻辑严密的同时尽量保留直观，让学生明白抽象概念的来龙去脉。后两项则是一般的实变函数教材没有的内容，但它们是抽象测度论的核心内容，也是现代概率与随机分析的基本证明工具。

第 3 章讲述可测函数的概念与性质。笔者把重点放在用简单函数和连续函数逼近可测函数的问题上，同时也彻底辨析了依测度收敛与几乎处处收敛的关系，对 Riesz 定理的证明也作了提炼，使其更简洁。

第 4 章讲述 Lebesgue 积分理论，重点是五大定理，即单调收敛定

理、Fatou 引理、Lebesgue 控制收敛定理、Tonelli 定理和 Fubini 定理。关于后两个定理的证明，笔者觉得现有的大多数实变函数教材都没有讲清楚，本书花了比较大的篇幅，从乘积测度讲起，算是理清了这两个重要定理的证明，同时也为学生更深入地学习测度论打下了基础。

第 5 章讲述 Lebesgue 微分定理和 Radon-Nikodym 定理。与传统实变函数教材不同，本书通过 Hardy-Littlewood 极大函数法直接证明了 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 微分定理，这么做的目的一方面是使证明更简洁，结论更一般化，另一方面是在可能的情况下让学生尽可能早地接触现代实分析方法。Radon-Nikodym 定理在一般的实变函数教材上是没有的，但它又是学习高等概率论、随机分析、金融数学等课程不可或缺的工具，因此我们花了一定的篇幅来证明这个定理，证明过程也是让学生熟悉测度论推理证明方法的重要途径。

第 6 章讲述 L^p -空间、Fourier 级数和 Fourier 变换。笔者对 Hölder 不等式、Minkowski 不等式、L^p -空间的完备性以及 L^p -空间的对偶都作了比较详细的论证，这么做的目的一方面是为确保逻辑严密自恰，另一方面是在证明推理过程中训练学生使用 Hölder 不等式、Minkowski 不等式和 Radon-Nikodym 定理，使学生熟悉这些不等式和定理。在讲 L^2 -空间时，笔者是结合一般的 Hilbert 空间来讲的，目的是让学生尽早接触现代泛函分析语言，能够在更高的观点下思考问题。最后是 Fourier 级数与 Fourier 变换，这部分内容实变函数教材一般是不会列入的，数学分析课程会讲 Fourier 级数，但只限于点态收敛，很不完善。这部分内容应用非常广泛，几乎在所有理工类、经济、金融、管理类学科中都有应用，因此笔者花了一定的篇幅用现代的观点讲述这部分内容。

本书在写作上力求深入浅出，让学生易于接受，对一些抽象的概念尽可能从直观的例子入手，分析其原始动机，让学生能够自然接受。对一些较难或较长的证明，笔者仔细梳理分解，用循序渐进的方式论述。为了让学生抓住重点，每章开篇给出了本章学习要点。为了方便有余力、有兴趣的学生进一步拓展，笔者在每一章末给出了拓展阅读建议。为了提高学生的学习兴趣，让学生了解数学和数学家的历史是有益的，因此笔者在每一章末给了一则相关数学家的简介。

本书每章都配有一定量的习题，这些习题中有些是为了加深学生对定理或概念的理解而设计的，有些则是正文中没有证明的性质、命题、定理非关键部分或定理的推广。这些习题一般不会太难，学生完成这些习题可以加深对正文的理解，同时还能够提高自己的推理论证能力。还有一部分则是课内知识的延伸，主要是训练学生综合应用所学知识的能力。书末对部分习题给出了解答或提示，全部习题的详细解答可到课程网站下载。

在教学安排上，依笔者的经验，每周 5 课时、一个学期 16 周可以

讲完全部内容，还可留一定时间复习。如果课时比较紧，可以不讲6.3、6.6和6.7节，这样每周4课时也基本够用。

在写作本书的过程中，笔者参考了国内外一些经典的测度论、实变函数、实分析、调和分析和泛函分析教材，如程士宏教授的测度论经典教材[10]，周民强教授的实变函数经典教材[2]和调和分析经典教材[17]，Stein和Shakarchi的实分析教材[15]和Fourier分析教材[14]，潘文杰教授的Fourier分析经典教材[13]，还有张恭庆院士与林源渠教授的泛函分析经典教材[23]，以及其他经典著作，这里就不一一列举了，笔者在此对这些教材和著作的作者表示衷心感谢！

最后，由于笔者学识水平有限，尽管作了最大努力，可能还会有很多不妥甚至是错误，望广大读者给予批评指正，谢谢.

杨寿渊
江西财经大学
2018年8月

目 录

本书使用的记号

$A\cup B$	集合A与B的并集	（第2页）
$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$	集合列或集族的并集	（第3页）
$A\cap B$	集合A与B的交集	（第3页）
$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$	集合列或集族的交集	（第3页）
$A\setminus B$	集合A与B的差	（第4页）
$\overline{A}$	集合A的补	（第4页）
$\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$	集合列$\{A_n\}$的上限集	（第4页）
$\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$	集合列$\{A_n\}$的下限集	（第4页）
$A\times B$	集合A与B的笛卡尔直积	（第6页）
$\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$	集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$的笛卡尔直积	（第6页）
$f:\ X\to Y$	从X到Y的映射	（第7页）
$f(A)$	集合A在映射f下的像	（第8页）
$f^{-1}(A)$	集合A在映射f下的原像	（第8页）
$g\circ f$	映射g与f的复合映射	（第9页）
id_X	X上的恒等映射	（第9页）
$A\sim B$	集合A与B对等	（第10页）
$\mathsf{Card}(A)$	集合A的基数	（第10页）
$\mathcal{P}(X)$	集合X的幂集	（第14页）
$\langle x, y\rangle$	向量x与y的内积	（第16页）
$\lvert x\rvert$	向量x的模长	（第16页）
$\mathsf{dist}(x, y)$	点x与y之间的距离	（第16页）
$B(x_0, r)$	以x_0为球心、r为半径的开球	（第17页）

E°	集合E的内部	（第17页）
∂E	集合E的边界	（第17页）
E^{cl}	集合E的闭包	（第19页）
$f\|_A$	映射f在集合A上的限制	（第22页）
$(\Omega, \mathcal{F})$	可测空间	（第32页）
$\sigma(\mathcal{A})$	由$\mathcal{A}$生成的σ-代数	（第33页）
$\mathcal{B}, \mathcal{B}^n$	Borel代数	（第33页）
$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$	测度空间	（第34页）
μ^*	Lebesgue外测度	（第36页）
$(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \mu)$	Lebesgue测度空间	（第43页）
$\Lambda(\mathcal{A})$	由$\mathcal{A}$生成的λ-系	（第45页）
$X_n \xrightarrow{\text{a.e.}} X$	X_n几乎处处收敛于X	（第61页）
$X_n \xrightarrow{\mu} X$	X_n依测度收敛于X	（第61页）
X^+, X^-	可测函数X的正部和负部	（第65页）
$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$	$\mathcal{F}$与$\mathcal{G}$的乘积代数	（第92页）
E_x, E^y	集合E的x-截面和y-截面	（第92页）
$\mu \otimes \nu$	测度μ与ν的乘积测度	（第95页）
f_x, f^y	函数$f(x,y)$的x-截面和y-截面	（第96页）
$\iint\limits_E f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y)$	$f(x,y)$关于乘积测度$\mu \otimes \nu$的积分	（第96页）
$(Mf)(x)$	$f(x)$的Hardy-Littlewood极大函数	（第112页）
$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$	ν对μ的Radon-Nikodym导数	（第121页）
$\\|f\\|_{L^p}$	f的L^p-范数	（第131页）
$L^p(\Omega)$	Ω上的L^p-空间	（第131页）
V^*	V的对偶空间	（第144页）
$\\|\cdot\\|_*$	$\\|\cdot\\|$的对偶范数	（第144页）
$\langle f, g\rangle$	f与g的内积	（第155页）
$S_\perp$	S的垂空间	（第155页）
$\omega(f;\delta)$	f的δ-连续模	（第166页）
$f * g$	函数f与g的卷积	（第173页）
$\widehat{f}$	函数f的Fourier变换	（第178页）

第1章　预备知识

学习要点

1. 集合的概念与运算律.
2. 映射与逆映射.
3. 集合的基数.
4. $\mathbb{R}^n$ 上的点集拓扑知识.
5. 连续映射与连续延拓定理.

§ 1.1 集合

1.1.1 集合的概念

集合是现代数学中最基本的概念之一, 基本到无法用更基本的概念来对其加以定义, 因此在几乎所有的数学书中, 对集合这个概念只是作直观描述, 而不是定义.

一般地, 我们把由一些对象所构成的全体叫作**集合**, 而称这些对象为该集合的**元素**.

例如"方程 $x^2-4=0$ 的根"就是一个集合, 它包含 -2, 2 两个元素, 用符号表示为

$$A=\{-2,2\}.$$

又如"能被 3 整除的整数"也构成一个集合, 它由 $0,\pm3,\pm6,\pm9,\cdots$ 等整数所构成, 用符号表示为

$$B=\{\cdots,-9,-6,-3,0,3,6,9,\cdots\}.$$

当然, 集合的元素不限于数, 可以是其他东西, 例如"中国的直辖市"这一集合包含四个元素, 即北京、上海、天津、重庆, 即

$$C = \{北京, 上海, 天津, 重庆\}.$$

对于一个集合 A, 如果某个对象 a 是集合 A 的元素, 则称 a 属于 A, 记作 $a \in A$; 否则称 a 不属于 A , 记作 $a \notin A$. 如果一个集合不包含任何元素, 我们就称它为**空集**, 记作 $\varnothing$. 例如方程 $x^2 + 1 = 0$ 的实根所构成的集合就是空集, 因为它不包含任何元素.

有些集合我们用固定的符号来表示, 例如用 $\mathbb{N}$ 表示自然数集, $\mathbb{Z}$ 表示整数集, $\mathbb{Q}$ 表示有理数集, $\mathbb{R}$ 表示实数集, $\mathbb{C}$ 表示复数集, 等等.

许多时候集合所包含的元素多到无法列举的程度, 这时候我们就要借助"性质描述法"来表示集合了, 例如非负实数集可表示为

$$A = \{x \in \mathbb{R}:\ x \geqslant 0\},$$

所有大于 0 但小于 1 的实数所构成的集合可表示为

$$B = \{x \in \mathbb{R}:\ 0 < x < 1\},$$

所有奇数所构成的集合可表示为

$$E = \{n \in \mathbb{Z}:\ n = 2k + 1,\ \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

设 A, B 是两个集合, 如果集合 A 中每一个元素都属于集合 B, 则称 A 是 B 的**子集**, 记作

$$A \subseteq B \ \ (或\ B \supseteq A),$$

读作 "A 含于 B" (或 "B 包含 A"). 例如自然数集 $\mathbb{N}$ 就是整数集 $\mathbb{Z}$ 的子集, 即 $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

对于两个集合 A, B, 如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称这两个集合**相等**, 记作 $A = B$. 不难看出, 两个集合相等当且仅当这两个集合所包含的元素完全相同.

1.1.2 集合的运算

对于两个集合 A 与 B, 定义其**并集**(union)为

$$A \cup B = \{x:\ x \in A \quad 或 \quad x \in B\}.$$

不难发现集合的并运算满足交换律和结合律, 即

$$A \cup B = B \cup A, \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

因此我们可以递归定义 n 个集合 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 的并集:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3, \qquad A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup A_4, \qquad \cdots,$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n.$$

我们通常将 n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并集记作

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

不难发现

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \{x:\ \exists\, k \in \mathbb{N}, k \leqslant n,\ \text{ s.t. } x \in A_k\},$$

其中符号“$\exists$”表示“存在”，“s.t.”是英文词组“such that”的缩写, 表示“使得”.

对于一列集合 $A_1, A_2, A_3, \cdots$, 我们定义其并集为

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{x:\ \exists\, k \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. } x \in A_k\}.$$

更一般地, 设有一族集合 $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, 其中 Λ 是指标集, 可以是无限集, 我们定义这一族集合的并集为

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x:\ \exists\, \lambda \in \Lambda\ \text{ s.t. } x \in A_\lambda\}.$$

两个集合 A, B 的**交集**(intersection)定义为

$$A \cap B = \{x:\ x \in A \ \text{ 且 } \ x \in B\},$$

不难验证集合的交运算也满足交换律和结合律, 即

$$A \cap B = B \cap A, \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

因此我们也可以递归定义 n 个集合的交集

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k,$$

并且有

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \{x:\ x \in A_k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}, k \leqslant n\},$$

其中符号“$\forall$”表示“任意”.

对于一族集合 $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, 其交集定义为

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x:\ x \in A_\lambda,\ \forall\, \lambda \in \Lambda\}.$$

两个集合 A 与 B 的**差**(difference)定义为

$$A \setminus B = \{x:\ x \in A \text{ 且 } x \notin B\},$$

例如 $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,5\}$, 则

$$A \setminus B = \{1,3\}.$$

如果我们所讨论的集合都是某个大的集合X的子集, 则把X称为**全集**(universal set); 对于$A \subseteq X$, 称$X \setminus A$为A的**补集**(complementary set), 记作$\overline{A}$.

除了交换律与结合律之外, 集合还有下列运算律:

吸收律: $A \cup A = A, \qquad A \cap A = A.$

分配律:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \qquad \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \cap C = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), \qquad \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \cup C = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cup C).$$

De Morgan律:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C), \qquad A \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A \setminus B_\lambda),$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C), \qquad A \setminus \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \setminus B_\lambda).$$

1.1.3 上限集与下限集

设$\{A_n : n = 1,2,3,\cdots\}$是一列集合, 令$B_n = \cup_{k=n}^{\infty} A_k$, 则$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \cdots$, 即$\{B_n : n = 1,2,\cdots\}$是一列单调减小的集合. 我们称$\cap_{n=1}^{\infty} B_n$为集列$\{A_n\}$的**上限集**, 记作$\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$, 即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n. \tag{1.1}$$

可以类似地定义$\{A_n\}$的**下限集**:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n. \tag{1.2}$$

命题 1.1 设$\{A_n : n = 1,2,\cdots\}$是一列集合, 则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subseteq \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n. \tag{1.3}$$