University

大学物理

Physics

（少学时）

主　编　刘　崧　辛　勇

副主编　胡爱荣　刘笑兰

高等教育出版社

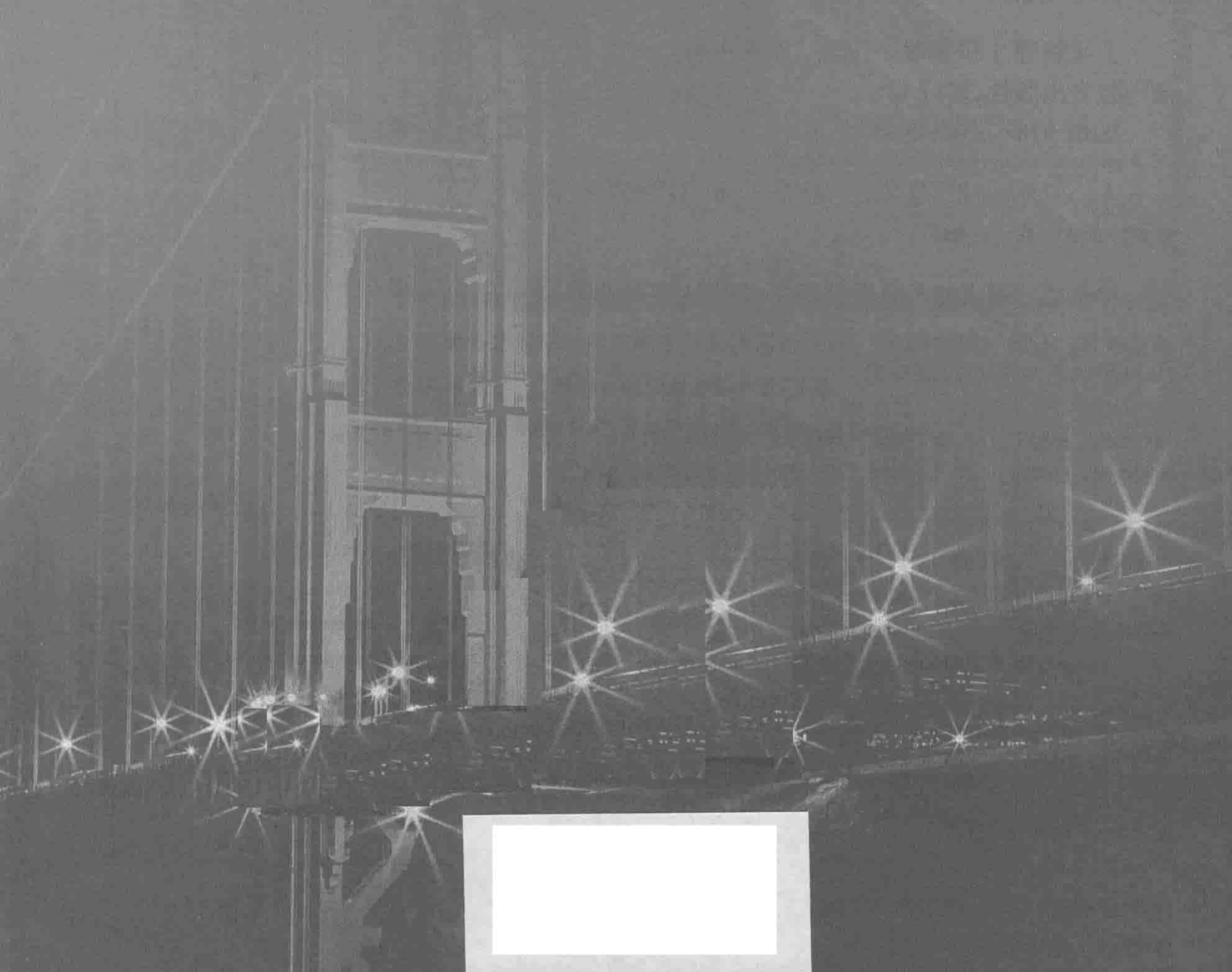
University Physics

大学物理

（少学时）

主编 刘 崧 辛 勇

副主编 胡爱荣 刘笑兰



DAXUE WULI (SHAO XUE SHI)

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是参照教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会编制的《理工科类大学物理课程教学基本要求》(2010年版),根据70学时左右的少学时大学物理课程特点,在罗圆圆教授主编的《大学物理》(第2版)的基础上改编而成的。全书共13章,主要内容包括质点运动学、质点动力学、刚体力学基础、狭义相对论力学基础、静电场、恒定磁场、电磁感应、气体动理论、热力学基础、振动学基础、机械波、波动光学、量子物理基础。

全书突出基本概念、基本规律,突出物理思路、方法及其应用,注意联系生活实际,联系工程实际,力求物理图像清晰,着力培养学生分析问题、解决问题以及独立获取知识的能力。本书力求在保持《大学物理》(第2版)必要的系统性的同时,删繁就简,压缩篇章,确保科学准确,力求易教易学。每章之后附有习题,以供读者系统训练,书后附有参考答案。

本书可作为高等学校理工科各专业48~96学时的大学物理课程的教材,也可供高职、高专、成人高校等选用及有关科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理:少学时/刘崧,辛勇主编. -- 北京:高等教育出版社,2017.12

ISBN 978-7-04-049175-3

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①刘… ②辛… Ⅲ. ①物理学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第327802号

DAXUE WULI(SHAOXUESHI)

策划编辑 程福平　责任编辑 程福平　封面设计 李树龙　版式设计 杜微言
插图绘制 杜晓丹　责任校对 李大鹏　责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京玥实印刷有限公司

开　　本 787mm × 1092mm　1/16
印　　张 24.25
字　　数 510千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
　　　　 http://www.hepmall.com
　　　　 http://www.hepmall.cn
版　　次 2017年12月第1版
印　　次 2017年12月第1次印刷
定　　价 49.20元

物 料 号 49175-00

大学物理
(少学时)

主　编　刘　松
　　　　辛　勇
副主编　胡爱荣
　　　　刘笑兰

1　计算机访问http://abook.hep.com.cn/12440416，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。

2　注册并登录，进入"我的课程"。

3　输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。

4　单击"进入课程"按钮，开始本数字课程的学习。

课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

物理学家简介　　阅读材料　　演示实验　　精彩视频

http://abook.hep.com.cn/12440416

前　言

物理学是研究物质的基本结构、相互作用和物质最基本最普遍的运动形式及其相互转化规律的学科。物理学研究的对象具有极大的普遍性,研究的内容极其广泛,它是自然科学中最具有活力的带头学科,是整个自然科学和工程技术的基础,也是高新技术发展的源泉和先导。

随着科学技术的发展,不同学科间相互渗透和融合的趋势日益明显,科学技术正在更高层次走向综合化和整体化。近代物理学的概念、研究方法和实验技术在许多自然科学领域和工程技术中得到广泛的应用,促使新型的交叉学科不断出现,并由此形成了一系列高新技术部门,迅速地影响着人类对自然的基本认识和人类的社会生活。因此,物理学是各类人才所必须具备的基础知识。

本书是参照教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会编制的《理工科类大学物理课程教学基本要求》(2010 年版)以及 70 学时左右的少学时大学物理课程特点,在编者多年教学实践的基础上,同时参考了国内外的优秀教材编写而成的。全书共 13 章,主要内容包括质点运动学、质点动力学、刚体力学基础、狭义相对论力学基础、静电场、恒定磁场、电磁感应、气体动理论、热力学基础、振动学基础、机械波、波动光学、量子物理基础。全书突出基本概念、基本规律,突出物理思路、方法及其应用,注意联系生活实际,联系工程实际,力求物理图像清晰,着力培养学生分析问题、解决问题以及独立获取知识的能力。本书力求在保持必要的系统性的同时,删繁就简,压缩篇章,确保科学准确,力求易教易学。每章之后附有习题,以供读者系统训练,书后附有参考答案。

参加本书编写工作的有刘崧、辛勇、胡爱荣、刘笑兰、钟双英、廖清华、邓新发、姜卫群、杨蓓、魏昇、陈华英、赵书毅、陈国云、刘文兴等,钟双英在本书编写和插图绘制过程中做了大量工作,在此表示感谢。全书由刘崧统稿。由于编者水平有限,加之本书编写时间仓促,书中难免存在不妥之处,恳切希望读者批评指正。

编　者

2017 年 9 月

目录

第1章

质点运动学

质点运动学的任务是研究和描述做机械运动的物体在空间的位置随时间变化的关系,并不追究运动发生的原因. 本章在引入参考系、坐标系、质点等概念的基础上,定义描述质点运动的物理量,如位置矢量、位移、速度和加速度等,进而讨论这些量随时间的变化以及相互关系,然后讨论曲线运动中的切向加速度和法向加速度,最后将介绍相对运动.

§1.1 质点空间位置的描述

一、质点

任何物体都有一定形状和大小,一般物体在运动时,其上各点的运动状态也各不相同,但在一定条件下,物体上各点运动状态的差异对于所研究的问题影响甚微,以致可以忽略不计. 我们可以把这样的**物体抽象为不计形状和大小,而仅具有一定质量的几何点,即质点**.

我们将物体视为质点,对实际问题进行抽象化处理,从而使所研究的问题简化,以便从理论上去研究它,找出其遵循的规律. 这种被抽象了的模型称为**理想模型**. 质点就是实际物体的理想模型,后面我们还会建立刚体、点电荷、理想气体等理想模型. 建立理想模型在处理实际问题中是很有意义的科学方法.

二、参考系和坐标系

自然界中一切物质都处在永不停息地运动变化之中,物质运动是绝对的,但运动的描述是相对的,在描述一个具体物体运动时,必须选定另外一个物体或几个相对静止的物体系作为参考,被选作参考的物体或物体系称为**参考系**. 然而参考系的选择,原则上可以是任意的,主要根据问题的性质和研究问题的方便而定.

为了定量描述物体相对于参考系的运动,还需要建立固定在参考系中的**坐标系**. 因此,**坐标系是参考系的数学抽象**. 常用的是固定在参考系上的直角坐标系,根据问题的需要,也可选用其他坐标系,如自然坐标系、极坐标系、球面坐标系或柱面坐标系等.

三、确定质点空间位置的方法

为了描述质点在空间的运动,首先要确定质点在任一时刻的位置,通常有以下几种方法.

1. 坐标法

在选取的参考系上建立如图 1.1 所示的三维直角坐标系 $Oxyz$,设某时刻质点运动到 P 点,这样,P 点在空间的位置就可用直角坐标(x,y,z)来表示.

如果质点从 P 点沿某一平面运动,则可在该平面建立二维直角坐标系 Oxy,质点位置只需两个坐标(x,y)来确定,如果质点仅沿某一直线运动,取该直线为 Ox

轴,质点位置只需一个坐标 x 就可确定了.

2. **位矢法**

质点的位置还可以用一个矢量来确定,由原点 O 到 P 点作有向线段$\overrightarrow{OP}$,如图 1.1 所示,有向线段的长度为质点到原点的距离,方向规定为由坐标原点指向质点所在位置 P 点,$\overrightarrow{OP}$被称质点的位置矢量,简称位矢,记为 $\boldsymbol{r}$,显然 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$,且有

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{1.1}$$

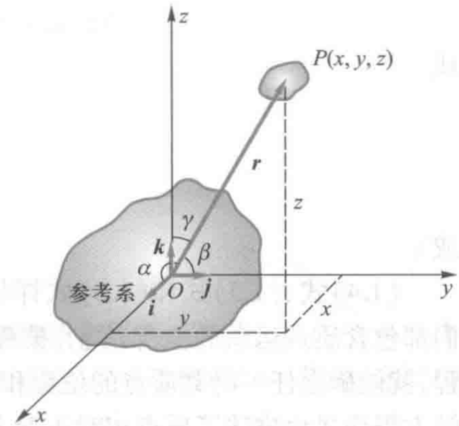


图 1.1

式中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别为 x、y、z 轴上的单位矢量.

$\boldsymbol{r}$ 的大小为

$$|\boldsymbol{r}|=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1.2}$$

$\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \cos\beta=\frac{y}{r},\quad \cos\gamma=\frac{z}{r} \tag{1.3}$$

位置矢量有三个基本特性:(1) 矢量性,$\boldsymbol{r}$ 是矢量,既有大小,又有方向;(2) 瞬时性,质点空间位置随时间变化,质点不同时刻的位置对应不同时刻的位矢;(3) 相对性,选择不同的坐标系,描述质点的位矢也不同,可见质点的位矢与坐标系的选择有关.

3. **自然法**

如果质点相对参考系的运动轨迹是已知的,例如,火车(视为质点)相对于地面的轨迹(路轨)是已知的,这种情况下,采用下述自然法描述其运动状态较方便.

在运动质点的轨迹曲线上任取一点作为坐标原点 O(见图 1.2),规定从 O 点起沿轨迹的某一方向(例如向右)量得轨迹的长度 s 取正值,这个方向称为自然坐标的正向,反之为负向,s 取负值. 这样,曲线长度 s(s 为标量)可唯一确定质点在空间的位置,并称 s 为质点 P 的自然坐标. 显然,s 是代数量,其大小反映了质点与原点之间的曲线距离,其正负表明这个曲线距离从 O 点起沿哪个方向量取的. 任一时刻,在质点所在处,取两个互相垂直的位置矢量 $\boldsymbol{e}_t$ 和 $\boldsymbol{e}_n$,$\boldsymbol{e}_t$ 沿轨迹的切线,其指向与自然坐标 s 的正向一致;$\boldsymbol{e}_n$ 沿轨迹法线与 $\boldsymbol{e}_t$ 垂直,指向轨迹凹的一侧,$\boldsymbol{e}_t$ 与 $\boldsymbol{e}_n$ 的大小恒等于 1,但它们的方向随质点在轨迹上位置变化而变化,$\boldsymbol{e}_t$ 称为切向单位矢量,$\boldsymbol{e}_n$ 称为法向单位矢量.

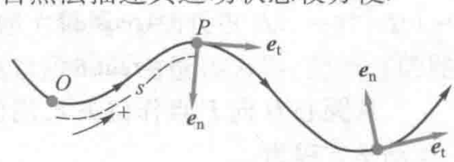


图 1.2

四、质点的运动学方程

当质点相对于参考系运动时,用来确定质点位置的位矢 $\boldsymbol{r}$,或直角坐标(x,y,z),或自然坐标 s 等都将随时间 t 变化,都是 t 的单值连续函数,即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1.4}$$

或

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases} \tag{1.5}$$

或

$$s=s(t) \tag{1.6}$$

(1.4)式、(1.5)式和(1.6)式详尽地描述了质点相对于参考系的运动情况. 它们都包含质点运动的全部信息,被称为**质点的运动学方程**. 已知质点的运动学方程,就能确定任一时刻质点的位置和速度,从而确定质点的运动状态. 所以说,运动学方程详尽地描述了质点相对于参考系的运动情况. 质点运动学的一个重要任务就是根据具体的已知条件,建立质点的运动学方程.

运动质点在空间所经过的路径称为质点的轨迹,即位矢的矢端在空间移动的曲线,从(1.5)式中消去时间 t,可得轨迹方程

$$f(x,y,z)=0$$

[例1.1] 一质点做半径为 r 的匀速率圆周运动,角速度为 ω,如图1.3所示,试分别写出用直角坐标、位矢、自然坐标表示的质点运动学方程.

[解] 以圆心 O 为原点建立直角坐标系 Oxy,取质点经过 x 轴上 O' 点的时刻为计时起始时刻,即 $t=0$,设 t 时刻质点位于 P 点,P 点的直角坐标为(x,y),如图1.3所示. 由题设条件,质点做匀速率圆周运动,$\angle O'OP=\omega t$,用直角坐标表示的质点运动学方程为

$$x=r\cos\omega t$$
$$y=r\sin\omega t$$

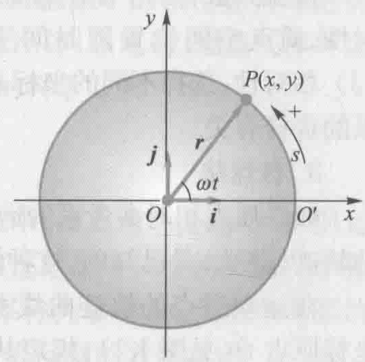


图 1.3

从圆心 O 向 P 点作位矢 $\boldsymbol{r}$,用位矢表示的质点运动学方程为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=r\cos\omega t\boldsymbol{i}+r\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

取轨迹与 x 轴的交点 O' 为自然坐标原点,以逆时针方向为自然坐标的正向,用自然法表示的质点运动学方程为

$$s=r\omega t$$

可见,为了正确地写出质点运动学方程,必须首先选定参考系,并建立坐标系,根据题设条件,找出质点坐标随时间变化的函数关系即可.

复习思考题

1.1 一质点做匀速率圆周运动,圆半径为 R,角速度为 ω,试分别写出用直角坐标、位矢、自然坐标表示的质点运动学方程,并写出直角坐标系下质点的轨迹方程.

1.2 质点的轨迹方程与它的运动学方程有何区别?

§1.2 位移 速度 加速度

一、位移

质点运动时,其位置将随时间变化. 为了描述质点的位置变化,我们引入一个新的物理量——位移. 如图 1.4 所示,设曲线 LM 是质点运动轨道的一部分,在时刻 t,质点位于 P 点,位矢为 $\boldsymbol{r}(t)$;而经时间 Δt 后,质点到达 Q 点,位矢为 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$. 在这 Δt 时间内,质点位置的变化可用从起点 P 到终点 Q 的有向线段 $\overrightarrow{PQ}$ 来表示,称为质点在该 Δt 时间内的位移.

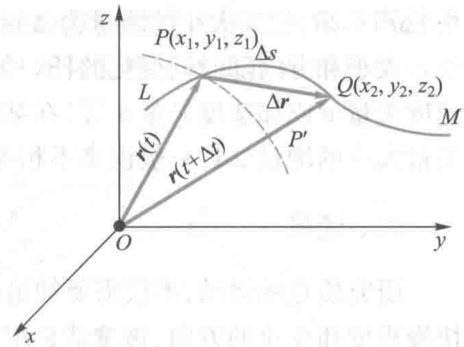


图 1.4

显然,位移是矢量,它反映在一段时间内质点始末位置的变化. 以位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 为例,它既有大小,由 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 表示 PQ 间的距离;又有方向,表示 Q 点相对于 P 点的方位. 由图 1.4 可知位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与位矢 $\boldsymbol{r}$ 的关系是

$$\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)=\Delta\boldsymbol{r} \tag{1.7}$$

即质点在某段时间内的位移等于同一时间内位矢的增量. 而路程表示质点在一段时间内实际经过的那段运动轨迹的路径长度,是标量. 在图 1.4 中,质点在 Δt 时间内,质点从 P 点运动到 Q 点的过程中走过路程即为弧线 $\widehat{PQ}$ 的长度 Δs,一般 $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta s$. 例如质点沿圆周运动一圈回到原处时,它在这段时间的位移为零,而经过的路程是这个圆的周长.

在图 1.4 中 P、Q 两点的位置矢量分别为

$$\boldsymbol{r}(t)=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$$

因此,质点由 P 运动到 Q 的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k} \tag{1.8}$$

位移的大小为

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1.9}$$

其方向可由方向余弦表示为

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{|\Delta\boldsymbol{r}|},\quad \cos\beta=\frac{y_2-y_1}{|\Delta\boldsymbol{r}|},\quad \cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{|\Delta\boldsymbol{r}|} \tag{1.10}$$

为了正确理解,我们对位移作以下说明:

(1) 位置矢量与坐标原点的选取有关,而位移与坐标原点的选取无关.

（2）位移与路程 Δs 不同. 位移是矢量，它只取决于质点的始末位置，与路径的形状无关；而路程为标量，它表示质点运动的实际路径的长度.

（3）只有当 Δt 趋于零时或单向直线运动时，位移的大小才与路程相等.

还要指出的是，位移 $\Delta\boldsymbol{r}$（即位矢的增量）的大小 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 与位矢大小的增量 Δr 一般是不相等的. 设时间 Δt 内位矢大小的增量为 Δr，即

$$\Delta r=|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)|-|\boldsymbol{r}(t)|$$

在图 1.4 中，以 O 为圆心，以 $\boldsymbol{r}(t)$ 的长度为半径作圆弧，它与位矢 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 相交于 P'，则 $\overline{P'Q}$ 即为 Δr，而位移的大小则为 $|\Delta\boldsymbol{r}|=\overline{PQ}$. 因此一般情况下，$|\Delta\boldsymbol{r}|\neq|\Delta r|$. 例如：一质点以半径 R 做匀速圆周运动，以圆心为原点，半个周期内质点位移的大小 $|\Delta\boldsymbol{r}|=2R$，位矢大小的增量为 $\Delta r=R-R=0$.

大小和方向随时间变化的任一矢量 $\boldsymbol{A}$（$\boldsymbol{A}$ 可以是位矢也可以是后面即将介绍的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 或加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 等）在某段时间 Δt 内增量的大小 $|\Delta\boldsymbol{A}|$ 与同一时间内该矢量大小的增量 ΔA，一般说来不相等. 初学者对此往往容易搞错，故特别加以说明.

二、速度

研究质点的运动，不仅需要知道质点的位矢和位移，还有必要知道位置变化的快慢程度和变化的方向，速度就是用来描述质点运动快慢和方向的物理量.

1. 平均速度

如图 1.4 所示，设质点沿轨道 LM 做曲线运动，它在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内的位移是 $\Delta\boldsymbol{r}$，那么，位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与发生这段位移所经历的时间 Δt 的比值，称为质点在这段时间内的平均速度，用 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 表示. 即

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

显然，平均速度是矢量，它的方向与位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向相同，而且与所取的时间间隔有关. 用 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 来描写 t 时刻附近质点运动的快慢和方向只能是近似的，比较粗糙的. 因为 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与所取时刻 t 及时间间隔 Δt 有关，$\bar{\boldsymbol{v}}$ 给出的只是平均变化率.

在描述质点运动时，也常采用"速率"这个物理量. 我们把路程 Δs 与经历这段路程的时间 Δt 的比值 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 称为质点在这段时间内的平均速率. 平均速率是标量，等于质点在单位时间内所通过的路程，它并不给出运动的方向，也不能把平均速率与平均速度的大小等同起来. 例如，质点经过某一段时间又回到起始位置，显然质点的位移为零，所以平均速度也为零，但平均速率却不为零.

2. 瞬时速度

为了要精确地描述质点在某一时刻 t（或某一位置）的运动情况，我们应该用极限的概念，使 Δt 趋近于零，这时 $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ 便趋近一个确定的极限矢量，这个极限矢量精确地描述了质点在 t 时刻运动的快慢和方向. 因此，我们把 $\Delta t\to0$ 时平均速度 $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ 的极

限定义为质点在 t 时刻的**瞬时速度**,简称**速度**. 即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.11}$$

由(1.11)式可见,**质点在 t 时刻的速度 $\boldsymbol{v}$ 等于该时刻质点的位矢对时间的一阶导数**.

显然,速度是矢量,速度的方向是当 Δt 趋于零时的平均速度$\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$的方向或位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向. 如图 1.5 所示质点在曲线轨道上运动时,某段时间 Δt 内的位移 $\Delta \boldsymbol{r}=\overrightarrow{AB}$沿割线 AB 的方向,当 Δt 趋近于零时,B 点逐渐趋近 A 点,相应地,割线 AB 趋近于 A 点的切线. 所以,**质点在任一时刻的速度的方向总是沿该时刻质点所在处的轨道的切线,并指向运动的一侧**. 瞬时速度的方向反映了质点在该时刻的运动方向.

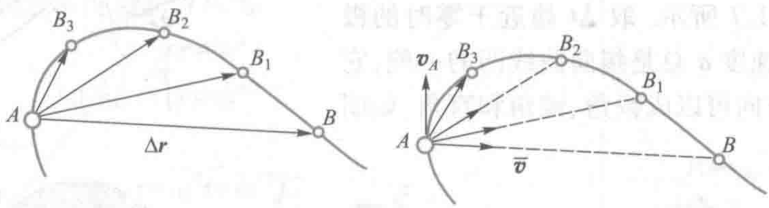


图 1.5

三、加速度

质点做曲线运动时,质点运动速度的方向随时间而变化,速度的大小一般也随时间而变化. 加速度就是用来描述速度的大小和方向变化情况的物理量.

1. 平均加速度

如图 1.6 所示,设质点沿轨道 LM 运动,t 时刻,质点位于 P 点,速度为$\boldsymbol{v}(t)$,$t+\Delta t$ 时刻,质点在 Q 点,速度为 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$. 于是,质点在 Δt 时间内的速度增量为 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)$. 质点在 Δt 时间内的**平均加速度** $\overline{\boldsymbol{a}}$ 定义为

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

平均加速度是矢量,其方向与该段时间间隔内速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的方向相同. 显然,平均加速度只给出了在 Δt 时间内速度的平均变化率,所以平均加速度只是对速度变化情况的粗糙描述.

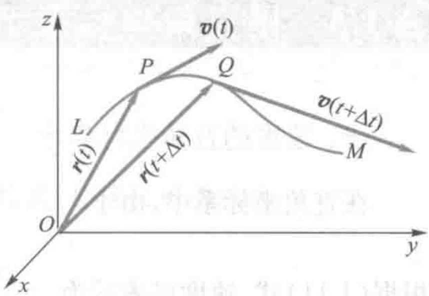


图 1.6

2. 瞬时加速度

为了精确地描述质点在某一时刻 t 的速度变化率,就必须引入瞬时加速度的概念.

质点在某一时刻或某位置的**瞬时加速度**(简称**加速度**)定义为当时间 Δt 趋近

于零时平均加速度的极限,即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.12}$$

加速度等于速度对时间的一阶导数,或位矢对时间的二阶导数.

显然,加速度也是矢量,其方向就是当 Δt 趋近于零时平均加速度$\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$的极限方向或速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 的极限方向. 应该特别指出的是:$\Delta \boldsymbol{v}$ 的方向及其极限方向一般不同于速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向,因而加速度的方向一般与同一时刻速度的方向也是不同的. 在直线运动的情况下,加速度 $\boldsymbol{a}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 在同一直线上,可有同向和反向两种可能,例如自由落体运动和竖直上抛运动. 在曲线运动中,因为速度是沿轨道曲线的切线方向,故在时间 Δt 内速度的增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 是指向曲线凹的一侧,如图 1.7 所示. 取 Δt 趋近于零时的极限,可知加速度 $\boldsymbol{a}$ 总是指向曲线凹的一侧,它与速度的方向可以成锐角、钝角和直角,如图 1.8 所示.

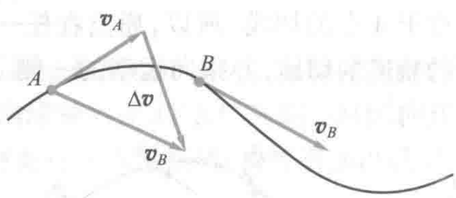
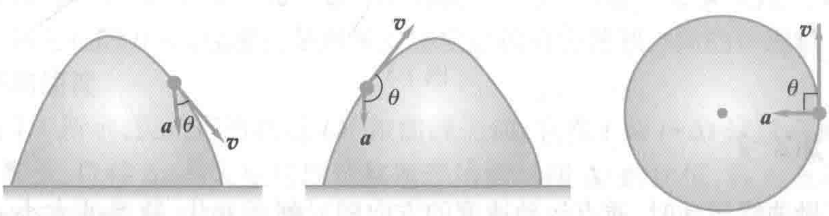


图 1.7



(a) $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{v}$成锐角 (b) $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{v}$成钝角 (c) $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{v}$成直角

图 1.8

§ 1.3 用直角坐标表示速度和加速度

一、速度的直角坐标表示

在直角坐标系中,由于

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

根据(1.11)式,速度可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\\&=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1.13}$$

其中

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

分别为 $\boldsymbol{v}$ 沿三个坐标轴的投影.

速度的大小,常称速率 v,是标量,恒取正值,在直角坐标系中,有

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

而速度的方向,则由三个方向余弦来确定

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{|\boldsymbol{v}|},\quad \cos\beta=\frac{v_y}{|\boldsymbol{v}|},\quad \cos\gamma=\frac{v_z}{|\boldsymbol{v}|}$$

α、β、γ 分别是速度 $\boldsymbol{v}$ 与 x、y、z 三个坐标轴的夹角,如图 1.9 所示.

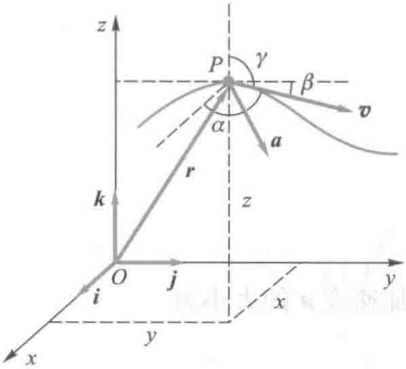


图 1.9

[例 1.2] 如图 1.10 所示,一质点在坐标系 Oxy 平面内运动,轨道方程为 $xy=16$,且 $x=4t^2(t\neq0)$,其中,x,y 以 m 计,t 以 s 计,求质点在 $t=1$ s 时的速度.

[解] 由题意求得运动方程为

$$\begin{cases}x=4t^2\\ y=4t^{-2}\end{cases}$$

即

$$\boldsymbol{r}=4t^2\boldsymbol{i}+4t^{-2}\boldsymbol{j}$$

对上式求导便可求得任一时刻的速度,即

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=8t\boldsymbol{i}+(-8t^{-3})\boldsymbol{j}$$

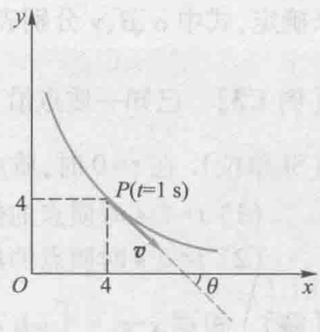


图 1.10

当 $t=1$ s 时,$x=4$ m,$y=4$ m,并求得 $v_x=8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,$v_y=-8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 此时,质点在 P 点的速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{8^2+(-8)^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=8\sqrt{2}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向可用它与 Ox 轴夹角 θ 表示,即

$$\theta=\arctan\frac{v_y}{v_x}=\arctan(-1)=-45^\circ$$

二、加速度的直角坐标表示

在直角坐标系中,将 $\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$ 代入(1.12)式,加速度可表示为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

可见,加速度 $\boldsymbol{a}$ 在各坐标轴方向的分量为

$$\left.\begin{aligned} a_x&=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\\ a_y&=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\\ a_z&=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

$\boldsymbol{a}$ 的方向由三个方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{a},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{a},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{a}$$

来确定,式中 α、β、γ 分别表示加速度 $\boldsymbol{a}$ 与 x、y、z 三个坐标轴的夹角.

[例 1.3] 已知一质点沿 x 轴方向运动,其速度与时间的关系为 $v=2t+\pi\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ (SI 单位). 在 $t=0$ 时,质点的位置 $x_0=-2$ m. 试求:

(1) $t=2$ s 时质点的位置;

(2) $t=3$ s 时质点的加速度.

[解] 根据 $x-x_0=\int_0^t v\mathrm{d}t$ 和 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$,得

$$\begin{cases} x=x_0+\int_0^t v\mathrm{d}t=x_0+t^2+6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\\ a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2-\pi\cdot\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\end{cases}$$

将初始条件代入可得

$t=2$ s 时质点位于 $(2+3\sqrt{3})$ m;

$t=3$ s 时,质点的加速度为 $\left(2-\frac{\pi^2}{6}\right)$ $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

直线运动是曲线运动的特例. 研究质点直线运动时,总是选坐标轴(例如 x 轴)与直线轨迹相重合. 由于运动总是沿着直线,因此质点的位移、速度、加速度均可看成代数量,它们为正时,表示方向沿着 x 轴正向;为负时,表示方向沿着 x 轴负向.

匀变速直线运动是直线运动的一个特例,其特点是加速度为常量. 设质点沿 x 轴做匀变速直线运动,加速度为 a,$t=0$ 时,坐标为 x_0,速度为 v_0,见图 1.11,现研究其速度 v 和坐标 x 随时间 t 的变化规律.

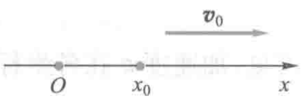


图 1.11

在直线运动中

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$