名师优学
高考系列丛书

决胜高考数学

压轴题（理科）

王芝平　王　坤　编著

数学特级教师团队　全国高考命题研究专家

诠释命题要点　归纳题型特征　解析真题精髓　分享解题智慧

中国科学技术大学出版社

名师优学

高考系列丛书

决胜高考数学

压轴题（理科）

王芝平　王　坤　编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书通过剖析近几年全国卷和地方卷的部分高考数学压轴题，归纳总结了解答压轴题所涉及的基础知识、基本技能、基本思想和基本经验．把令人生畏的压轴题解法简单化、模式化、规范化，并精选了部分高考题和模拟题（含参考解答）供读者演练，以达到“做一题，通一类”“向前一小步，能力一大步”，吃透压轴题，决胜高考创奇迹．

本书适合高三学生第二轮复习时使用，对于优秀的高一、二年级的学生也有较大的帮助，当然也可以作为教师的教学参考用书．

图书在版编目（CIP）数据

决胜高考数学压轴题（理科）/王芝平，王坤编著．—合肥：中国科学技术大学出版社，2016.12

ISBN 978-7-312-04034-4

Ⅰ．决…　Ⅱ．①王…②王…　Ⅲ．理科（教育）—课程—高中—习题集—升学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 209660 号

出　版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，邮编：230026
http://press.ustc.edu.cn
https://zgkxjsdxcbs.tmall.com
印　刷　安徽省瑞隆印务有限公司
发　行　中国科学技术大学出版社
经　销　全国新华书店
开　本　787 mm×1092 mm　1/16
印　张　21.75
字　数　556 千
版　次　2016 年 12 月第 1 版
印　次　2016 年 12 月第 1 次印刷
定　价　58.00 元

前　言

现在放在你面前的《决胜高考数学压轴题(理科)》,是几位作者根据北京市"十二五"立项课题——"基于培养学生创新意识的数学开放性变式学习的实践研究"和"北京市首届中小学名师工程"——"创新取向的高中数学变式教学"的研究成果,结合自己几十年的高考备考经验和对试题的研究体会,精心编写的参考书.作者从近几年的全国各地高考题中,精选出了几十道压轴题,通过抽丝剥茧般的分析,梳理了其中所涉及的知识,剖析了解题的通用策略.希望本书能助你理解数学相关概念、提高数学基本技能、感悟数学思想、积累数学解题基本经验,形成你自己的解决问题的常用策略.

1. 压轴题及其特点

按照《辞海》(1989年版)的解释,"压轴"是戏曲术语,指一台折子戏演出中的倒数第二个剧目.由于其紧压最末一个被称为"大轴"的剧目而得名;而且演压轴戏的一般是戏班挂头牌的主要演员.后来这个术语被移植过来,用以指一张试卷里安排在靠后出现的、比较难的大题目.我们这本书里的压轴题就是指高考数学文、理科试卷最后出现的两三个解答题,而且主要涉及解析几何、函数与导数方面的试题.这类题目表面上看是分数多、难度大、知识面广,实质上,压轴题还有以下特点:

※综合性:在多个核心知识的网络交汇处命制,渗透多个数学思维方法.

※探究性:条件不完备,或结论不确定,或解法不常规,或答案不唯一;这类问题常来源于课本知识的拓展和研究性学习的成果.

※灵活性:在解决问题时,常常在"动与静""变与不变""数与形""特殊与一般""设参与消参""设而不求""正难则反"及"猜想与演绎",甚至"数学实验"和"数学思维"等辩证思想和方法间巧妙转化与变换.

因而,压轴题在历年高考中,变化无穷,常考常新.这就促使我们去研究,力图帮助你在解决压轴题的"战斗"中,决战而"决胜"!

2. "决胜"的落实

在本书中,对于每一道精选的高考压轴题目,解前有思路分析,寻找合理、简捷、有效的解题途径,表述中有准确、规范的解答示范,解后有反思与启迪以形成超越本题的更加广阔与深入的思路.解答数学高考压轴题的方法与经验千头万绪,归根到底可有下面四句话概括:

※回到定义去.

※有图析图,无图画图.

※设计有效运算.

※抓住本质,莫忘细节.

3. 本书的结构设置

全书分两篇：

解析几何篇——代数运算表其外，几何性质蕴其中；

函数与导数篇——函数问题变无穷，导数应用显神通.

每篇各分 15 章，每章以几道压轴题为例，都取了一个简明、概括的诗一般的题目，用以表述该题的特点，并对解题方法进行精准的“点穴”式的说明，以助同学们对例题有本质上的掌握. 事实上，每节标题的内容，就是当你忘记了具体题目之后应该留在脑海里的内容，这才是你真正学到的浓缩了的精华.

每章例题下设两个板块：

❖板块 1　真题解析

每个真题包括三个部分：

谋定思路有方向；

规范解答不失分；

解后反思要升华.

特别指出，有些高考题目，作者对解答进行了再加工，甚至“向前多走了一步”或“搭了脚手架”，目的是助你“解难释疑”.

❖板块 2　变式练习

我们根据主编老师的“变式研究”的研究成果，结合多年高考备考经验和研究体会，每章精选了 4～6 个高考题或模拟题供同学们练习，目的是希望同学们通过自己的解题实践，消化学习成果，克服“眼高手低”的毛病；在“平淡”中练能力，在“过程”中抓创新. 此外，在有的练习题的参考解答后面，作者写了“反思与启迪”，作为对所学习题目的认识，算是与你一起讨论解法时的“发言”，希望你也提出自己的反思、总结，由“一题”到“一类”，变“似懂”为“真懂”.

4. 作者寄语

“年年岁岁花相似，岁岁年年人不同”.

数学解题无定式，自悟贯通是真谛.

决胜高考压轴题，剖析真题加练习；

细心观察多联想，数学本质莫忘记.

几何代数别分家，计算正确明算理；

举一反三练能力，复习过程创新意.

5. 致谢

本书在最后的校订工作中，得到了学而思培优全国高中总监邓杨先生团队的大力支持，谨此致谢！

作　者

2016 年 9 月

目　　录

解析几何篇——代数运算表其外,几何性质蕴其中

函数与导数篇——函数问题变无穷,导数应用显神通

解析几何篇

代数运算表其外，几何性质蕴其中

解析几何是通过坐标系用代数方法研究几何问题的一门数学学科，所以探求平面内动点的轨迹方程就自然成为用坐标法解决平面几何问题的第一步.有关动点的几何条件有诸多表现形式,其不同形式有不同的解决方法.本篇将通过一些具体的例子,分析如何用不同的方法解决有关动点轨迹的问题.

1　待定系数求方程,几何转至代数中

圆锥曲线的方程是用代数方法研究其几何性质的必要基础,所以求圆锥曲线方程的问题是高考的热点问题,在历年的高考试卷中大量出现.

1.1　真题解析

例 1.1　(2013・湖南)过抛物线 $E:x^2=2py(p>0)$ 的焦点 F 作斜率分别为 k_1,k_2 的两条不同的直线 l_1,l_2,且 $k_1+k_2=2$,l_1 与 E 相交于点 A,B,l_2 与 E 相交于点 C,D.以 AB,CD 为直径的圆 M,圆 N(M,N 为圆心)的公共弦所在的直线记为 l.

(Ⅰ) 若 $k_1>0,k_2>0$,证明:$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}<2p^2$;

(Ⅱ) 若点 M 到直线 l 的距离的最小值为 $\frac{7\sqrt{5}}{5}$,求抛物线 E 的方程.

谋定思路有方向

第(Ⅰ)问中,首先,确定研究的目标是 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}$ 的取值范围,因此需要通过研究点 M,N 的坐标(用 k_1,k_2 表示),进而用 k_1,k_2 表示 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}$,将其形式与 $2p^2$ 进行比较,在已知 $k_1+k_2=2$ 的条件下,选用均值定理来证明目标不等式.

第(Ⅱ)问中,容易求得两圆的方程,作差,求得公共弦的方程,结合(Ⅰ)中的部分结论,可以将公共弦方程化简,然后表示出点到直线的距离,进而通过研究二次函数的最值,确定距离取得最小值时的参数 k_1 的取值,进而知道 p 的值,然后求出抛物线的方程.

规范解答不失分

解　(Ⅰ) 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$.由题设知,焦点 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$.

联立 $\begin{cases} y=k_1x+\frac{p}{2} \\ x^2=2py \end{cases}$,消去 y,得 $-x^2+2pk_1x+p^2=0$,所以 $\begin{cases} x_1+x_2=2pk_1 \\ x_1x_2=-p^2 \end{cases}$,则

$$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=k_1p,\quad y_M=k_1x_M+\frac{p}{2}=k_1^2p+\frac{p}{2},$$

所以 $\overrightarrow{FM}=(k_1p,k_1^2p)$.同理,$\overrightarrow{FN}=(k_2p,k_2^2p)$.则

$$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=p^2k_1k_2(k_1k_2+1).$$

因为 $k_1>0,k_2>0,k_1\neq k_2$,所以 $2=k_1+k_2>2\sqrt{k_1k_2}\Rightarrow k_1k_2<1$,因此

$$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}<p^2\cdot 1\cdot(1+1)=2p^2.$$

(Ⅱ) 设圆 M,圆 N 的半径分别为 r_1,r_2,则

$$r_1=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{p}{2}+y_1\right)+\left(\frac{p}{2}+y_2\right)\right]=\frac{1}{2}\left[p+2\left(k_1^2p+\frac{p}{2}\right)\right]=k_1^2p+p,$$

$$r_2=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{p}{2}+y_3\right)+\left(\frac{p}{2}+y_4\right)\right]=\frac{1}{2}\left[p+2\left(k_2^2p+\frac{p}{2}\right)\right]=k_2^2p+p.$$

因为圆 M 的方程为 $(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r_1^2$,圆 N 的方程为 $(x-x_N)^2+(y-y_N)^2=r_2^2$,所以直线 l 的方程为

$$[(x-x_M)^2-(x-x_N)^2]+[(y-y_M)^2-(y-y_N)^2]=r_1^2-r_2^2,$$

即

$$2(x_N-x_M)x+2(y_N-y_M)y+x_M^2-x_N^2+y_M^2-y_N^2-r_1^2+r_2^2=0.$$

由(Ⅰ),得

$$2(k_2-k_1)px+2(k_2^2-k_1^2)py+(x_M-x_N)(x_M+x_N)$$
$$+(y_M-y_N)(y_M+y_N)-(r_1+r_2)(r_1-r_2)=0,$$

进而得

$$2(k_2-k_1)px+2(k_2^2-k_1^2)py+p^2(k_1^2-k_2^2)+p^2(k_1^2-k_2^2)$$
$$\cdot(k_1^2+k_2^2+1)-p^2(k_1^2-k_2^2)(k_1^2+k_2^2+2)=0,$$

化简为 $x+(k_1+k_2)y=0$.因为 $k_1+k_2=2$,所以 $x+2y=0$,即直线 l 的方程为 $x+2y=0$.

点 M 到直线 l 的距离为

$$\frac{|k_1p+2k_1{}^2p+p|}{\sqrt{5}}=\frac{p\cdot|2k_1{}^2+k_1+1|}{\sqrt{5}}=\frac{p\cdot\left|2\left(k_1+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\right|}{\sqrt{5}}$$

$$\geqslant\frac{\frac{7}{8}p}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5},$$

所以 $p=8$,抛物线方程为 $x^2=16y$.

解后反思要升华

本题两问集中考查了解析几何中的范围、定值和最值问题,这也是解析几何的基本题型之一,需要引起注意.

在本题的构造当中有如下几个问题需要引起我们的重视:

第一:弦中点的性质及相关计算.弦中点有时代表着“弦的特征性质”但不受“弦的具体位置”的影响,需要注意到这一现象,同时有关弦中点的坐标计算,可以考虑“代入法”结合韦达定理来研究,有时也可以考虑采用“点差法”来研究.本题中,弦 AB 的中点 M 的坐标就可以通过“点差法”来求得.

第二:等式或者不等式的证明,一般需要分析与综合结合进行,找准突破点,选好方法,铺垫条件.从这一点来说,和写作一篇议论文很相似,为了证明论点,需要结合论据,正反论证.

第三:在抛物线中蕴含着非常多漂亮的结论,本题第(Ⅱ)问实际上就涉及两个结论,即:

性质 1 若过抛物线 $E:x^2=2py(p>0)$ 的焦点 F 作斜率分别为 k_1,k_2 的两条不同的直线 l_1,l_2,且 $k_1+k_2=a$,l_1 与 E 相交于点 A,B,l_2 与 E 相交于点 C,D,则 AB,CD 中点 M,N 所在直线的斜率为 a.

性质 2 若过抛物线 $E:x^2=2py(p>0)$ 的焦点 F 作斜率分别为 k_1,k_2 的两条不同的直线 l_1,l_2,且 $k_1+k_2=a$,l_1 与 E 相交于点 A,B,l_2 与 E 相交于点 C,D,则以 AB,CD 为直径的圆 M,圆 N(M,N 为圆心)的公共弦所在的直线 l 的方程为:$x+ay=0$.

特别地,当 $a=0$ 时,直线 l 实际上就是 y 轴.

性质 1 中的条件 $k_1+k_2=a$,若改为 $k_1k_2=-1$,则直线 MN 过定点 $\left(\frac{3}{2}p,0\right)$.

其他的性质,留给读者去继续挖掘!

例 1.2 (2010 · 辽宁)设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F,过点 F 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A,B 两点,直线 l 的倾斜角为 60°,$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的离心率;

(Ⅱ)如果 $|AB|=\frac{15}{4}$,求椭圆 C 的方程.

谋定思路有方向

由已知写出直线 l 的方程,并与椭圆方程联立,考虑到条件 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$ 蕴含 A,B 两点坐标的关系,而其中纵坐标的关系更直接些,因此可消去 x,得到关于 y 的方程,解得 A,B 两点的纵坐标 y_1,y_2,建立参数 a,b 的方程,就可以获得该椭圆的离心率了.

线段 A,B 的长,即 A,B 两点的距离,可以用 A,B 两点的纵坐标 y_1,y_2 表示,进而表示为 a,b 满足的方程,再结合椭圆的离心率,便可以求出 a,b 的取值,即得椭圆 C 的方程.

规范解答不失分

解 设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由题意知 $y_1>0,y_2<0$.

(Ⅰ)直线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}(x+c)$,其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$. 由 $\begin{cases} y=\sqrt{3}(x+c) \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$,消去 x,得

$$(3a^2+b^2)y^2-2\sqrt{3}b^2cy-3b^4=0.$$

解得

$$y_1=\frac{\sqrt{3}b^2(c+2a)}{3a^2+b^2},\quad y_2=\frac{\sqrt{3}b^2(c-2a)}{3a^2+b^2}.$$

因为 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$,所以 $y_1=-2y_2$,则

$$\frac{\sqrt{3}b^2(c+2a)}{3a^2+b^2}=2\times\frac{\sqrt{3}b^2(c-2a)}{3a^2+b^2},$$

化简得离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$.

(Ⅱ)因为

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(y_1-y_2)^2\left[\frac{(x_1-x_2)^2}{(y_1-y_2)^2}+1\right]}$$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{3}}\cdot|y_2-y_1|,$$

所以$\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4\sqrt{3}ab^2}{3a^2+b^2}=\frac{15}{4}$.

由$\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$得$b=\frac{\sqrt{5}}{3}a$.所以$\frac{5}{4}a=\frac{15}{4}$,即$a=3,b=\sqrt{5}$.故椭圆$C$的标准方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

解后反思要升华

这是一道朴实无华的常规题目,与平时训练过的题目极其相似,在平平淡淡中考查解析几何的基本思想方法.解题过程中涉及含字母的方程组运算、向量运算,考查圆锥曲线离心率的概念与求解、弦长的计算方法等,整体运算量较大.

如果读者有圆锥曲线统一定义的知识,可以将椭圆上的点到焦点的距离转化成到对应的准线的距离,充分运用F为焦点且$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$这一关键条件,就可大大减小运算量.请读者自行尝试.

1.2　变式练习

题 1.1　(2015 · 安徽)设椭圆E的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,点$O$为坐标原点,点$A$的坐标为$(a,0)$,点$B$的坐标为$(0,b)$,点$M$在线段$AB$上,满足$|BM|=2|MA|$,直线$OM$的斜率为$\frac{\sqrt{5}}{10}$.

(Ⅰ)求E的离心率e;

(Ⅱ)设点C的坐标为$(0,-b)$,N为线段AC的中点,点N关于直线AB的对称点Q的纵坐标为$\frac{7}{2}$,求E的方程.

解　(Ⅰ)由题设条件可知,点M的坐标为$\left(\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}b\right)$,又$k_{OM}=\frac{\sqrt{5}}{10}$,从而$\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{5}}{10}$,进而$a=\sqrt{5}b$,$c=\sqrt{a^2-b^2}=2b$,所以离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(Ⅱ)由题设条件和(Ⅰ)的结果可知,直线AB的方程为$\frac{x}{\sqrt{5}b}+\frac{y}{b}=1$,点$N$的坐标为$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}b,-\frac{1}{2}b\right)$.

设N关于直线AB的对称点Q的坐标为$\left(x_1,\frac{7}{2}\right)$.则由线段$NQ$被直线$AB$垂直平分,

可得

$$\begin{cases}\dfrac{\dfrac{\sqrt{5}}{4}b+\dfrac{x_1}{2}}{\sqrt{5}b}+\dfrac{-\dfrac{b}{4}+\dfrac{7}{4}}{b}=1\\ \dfrac{\dfrac{7}{2}+\dfrac{1}{2}b}{x_1-\dfrac{\sqrt{5}}{2}b}=\sqrt{5}\end{cases},$$

解得 $b=3$. 所以 $a=3$，故椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{9}=1$.

反思与启迪　椭圆一直是解答题中考查解析几何知识的重要载体，不管对其如何进行改编与设计，抓住基础知识、考基本技能是不变的话题.

解析几何主要研究两类问题：一是根据已知条件求曲线方程；二是利用曲线方程研究曲线的几何性质.

求曲线方程可分为两类：若已知曲线类型，则采用待定系数法；若曲线类型未知，则可利用直接法、定义法、相关点法等求解.

本题是第一种类型，要利用给定条件求出 a,b.

题 1.2　已知双曲线的中心在原点，焦点在 x 轴上，离心率为 2，过其右焦点且倾斜角为 45°的直线被双曲线截得的弦 MN 的长为 6.

（Ⅰ）求此双曲线的方程；

（Ⅱ）若直线 $l: y=kx+m$ 与该双曲线交于两个不同点 A,B，且以线段 AB 为直径的圆过原点，求定点 $Q(0,-1)$到直线 l 的距离 d 的最大值，并求此时直线 l 的方程.

解　（Ⅰ）设双曲线的方程是$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则由于离心率 $e=\frac{c}{a}=2$，所以 $c=2a$，$b^2=3a^2$. 从而双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$，且其右焦点为 $F(2a,0)$. 把直线 MN 的方程 $y=x-2a$ 代入双曲线的方程，消去 y 并整理，得

$$2x^2+4ax-7a^2=0.$$

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-2a$，$x_1x_2=-\frac{7}{2}a^2$. 由弦长公式，得

$$|MN|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(-2a)^2-4\left(-\frac{7}{2}a^2\right)}=6.$$

所以 $a=1$，$b^2=3a^2=3$.

从而双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）由 $y=kx+m$ 和$x^2-\frac{y^2}{3}=1$，消去 y，得$(3-k^2)x^2-2kmx-m^2-3=0$. 根据条件，得

$$\Delta=4k^2m^2-4(3-k^2)(-m^2-3)>0\quad 且\quad 3-k^2\neq 0.$$

所以 $m^2+3>k^2\neq 3$.

设 $A(x_3,y_3)$,$B(x_4,y_4)$,则 $x_3+x_4=\dfrac{2km}{3-k^2}$,$x_3x_4=\dfrac{m^2+3}{k^2-3}$. 由于以线段 AB 为直径的圆过原点,所以 $x_3x_4+y_3y_4=0$. 即

$$(1+k^2)x_3x_4+km(x_3+x_4)+m^2=0.$$

从而有

$$(1+k^2)\cdot\frac{m^2+3}{k^2-3}+km\cdot\frac{2km}{3-k^2}+m^2=0,\quad 即\quad 1+k^2=\frac{2}{3}m^2.$$

所以点 Q 到直线 $l:y=kx+m$ 的距离为

$$d=\frac{|1+m|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|1+m|}{\sqrt{\dfrac{2}{3}m^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}\left|1+\frac{1}{m}\right|.$$

由 $k^2=\dfrac{2}{3}m^2-1\geqslant 0$,解得 $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\leqslant\dfrac{1}{m}\leqslant\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 且 $\dfrac{1}{m}\neq 0$. 由 $k^2=\dfrac{2}{3}m^2-1\neq 3$,解得 $\dfrac{1}{m}\neq\pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

所以当 $m=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 时,d 取最大值 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}\left(1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}$,此时 $k=0$. 因此 d 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}$,此时直线 l 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

题 1.3　(2010 · 辽宁)设 F_1,F_2 分别为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点,过 F_2 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A,B 两点,直线 l 的倾斜角为 60°,F_1 到直线 l 的距离为 $2\sqrt{3}$.

(Ⅰ) 求椭圆 C 的焦距;

(Ⅱ) 如果 $\overrightarrow{AF_2}=2\overrightarrow{F_2B}$,求椭圆 C 的方程.

解　(Ⅰ) 设焦距为 $2c$,由已知可得 F_1 到直线 l 的距离 $\sqrt{3}c=2\sqrt{3}$,即 $c=2$.

所以椭圆 C 的焦距为 4.

(Ⅱ) 设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$. 由题意知 $y_1<0$,$y_2>0$,且直线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-2)$. 联立

$$\begin{cases} y=\sqrt{3}(x-2) \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases},$$

得 $(3a^2+b^2)y^2-4\sqrt{3}b^2y-3b^4=0$,解得

$$y_1=\frac{-\sqrt{3}b^2(2+2a)}{3a^2+b^2},\quad y_2=\frac{-\sqrt{3}b^2(2-2a)}{3a^2+b^2}.$$

因为 $\overrightarrow{AF_2}=2\overrightarrow{F_2B}$,所以 $-y_1=2y_2$,即

$$\frac{\sqrt{3}b^2(2+2a)}{3a^2+b^2}=2\cdot\frac{-\sqrt{3}b^2(2-2a)}{3a^2+b^2},$$

得 $a=3$. 而 $a^2-b^2=4$,所以 $b=\sqrt{5}$. 故椭圆 C 的方程为

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1.$$

题 1.4　(2013 · 广东)已知抛物线 C 的顶点为原点,其焦点 $F(0,c)(c>0)$ 到直线 l: $x-y-2=0$ 的距离为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. 设 P 为直线 l 上的点,过点 P 作抛物线 C 的两条切线 PA,PB,

其中 A,B 为切点.

（Ⅰ）求抛物线 C 的方程；

（Ⅱ）当点 $P(x_0,y_0)$ 为直线 l 上的定点时,求直线 AB 的方程；

（Ⅲ）当点 P 在直线 l 上移动时,求 $|AF|\cdot|BF|$ 的最小值.

解 （Ⅰ）依题意,设抛物线 C 的方程为 $x^2=4cy$,由 $\dfrac{|0-c-2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,解得 $c=1$.

所以抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$.

（Ⅱ）抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$,即 $y=\dfrac{1}{4}x^2$,求导得 $y'=\dfrac{1}{2}x$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$(其中 $y_1=\dfrac{{x_1}^2}{4},y_2=\dfrac{{x_2}^2}{4}$),则切线 PA,PB 的斜率分别为 $\dfrac{1}{2}x_1,\dfrac{1}{2}x_2$,所以切线 PA 的方程为

$$y-y_1=\frac{x_1}{2}(x-x_1),\quad \text{即}\quad y=\frac{x_1}{2}x-\frac{{x_1}^2}{2}+y_1,$$

所以

$$x_1x-2y-2y_1=0,$$

同理可得切线 PB 的方程为

$$x_2x-2y-2y_2=0.$$

因为切线 PA,PB 均过点 $P(x_0,y_0)$,所以

$$x_1x_0-2y_0-2y_1=0,\quad x_2x_0-2y_0-2y_2=0.$$

从而 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 为方程 $x_0x-2y_0-2y=0$ 的两组解.所以直线 AB 的方程为

$$x_0x-2y-2y_0=0.$$

（Ⅲ）由抛物线定义可知 $|AF|=y_1+1,|BF|=y_2+1$,所以

$$|AF|\cdot|BF|=(y_1+1)(y_2+1)=y_1y_2+(y_1+y_2)+1.$$

由 $\begin{cases}x^2=4y\\x_0x-2y-2y_0=0\end{cases}$,消去 x,整理得

$$y^2+(2y_0-{x_0}^2)y+{y_0}^2=0.$$

由一元二次方程根与系数的关系可得 $y_1+y_2={x_0}^2-2y_0,y_1y_2={y_0}^2$.所以

$$|AF|\cdot|BF|=y_1y_2+(y_1+y_2)+1={y_0}^2+{x_0}^2-2y_0+1.$$

又点 $P(x_0,y_0)$ 在直线 l 上,所以 $x_0=y_0+2$,

$${y_0}^2+{x_0}^2-2y_0+1=2{y_0}^2+2y_0+5=2\left(y_0+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}.$$

所以当 $y_0=-\dfrac{1}{2}$ 时,$|AF|\cdot|BF|$ 取得最小值,且最小值为 $\dfrac{9}{2}$.