




普通高等教育农业农村部“十三五”规划教材配套用书
全国高等农林院校“十三五”规划教材

高等数学学习指导 与习题解析

下册

第三版

叶彩儿 王家军 徐光辉 © 主编

 中国农业出版社

普通高等教育农业农村部“十三五”规划教材配套用书
全国高等农林院校“十三五”规划教材

高等数学学习指导 与习题解析 下册

第三版

叶彩儿 王家军 徐光辉 主编

中国农业出版社
北京

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学学习指导与习题解析. 下册 / 叶彩儿, 王家军, 徐光辉主编. —3 版. —北京: 中国农业出版社, 2018. 11

普通高等教育农业农村部“十三五”规划教材配套用书 全国高等农林院校“十三五”规划教材

ISBN 978-7-109-24947-9

I. ①高… II. ①叶… ②王… ③徐… III. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 264850 号

中国农业出版社出版

(北京市朝阳区麦子店街 18 号楼)

(邮政编码 100125)

北京

北京发行所发行

月第 3 版

印刷

张: 17.75

字数: 320 千字

定价: 32.00 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

全国普通高等院校“十三五”规划教材
普通高等教育“十三五”规划教材

《高等数学学习指导与习题解析》

内容简介

本书是普通高等教育农业农村部“十三五”规划教材《高等数学》(下册,第三版)配套的学习参考书,针对原教材的各个章节依序修订而成。内容包含原教材中各章节的学习要求、内容提要及解难释疑、解题方法与典型例题解析等指导性材料,并给出了各章节练习题、测试题的参考解答等辅助性材料。既为本科学生学习高等数学提供方便,也为其深造考研提供具体指导与帮助。

本书分为上、下两册。上册包括函数与极限、连续性、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程等内容。下册包括空间解析几何与向量代数初步、多元微分学、重积分、曲线与曲面积分、无穷级数等内容。

机械工业出版社
北京

第三版编写人员名单

主 编 叶彩儿 王家军 徐光辉

副主编 张居丽 顾庆凤 王胜奎
张立溥 杨曼丽

参 编 方惠兰 贺志民 胡海龙

第一版编写人员名单

主 编 王家军 徐光辉

副主编 方惠兰 王胜奎 张立溥

参 编 顾庆凤 贺志民

第二版编写人员名单

主 编 贺志民 王家军 徐光辉

副主编 张居丽 顾庆凤 王胜奎
张立溥

参 编 方惠兰 夏慧珠 胡海龙

第三版前言

本书是与王家军为总主编的普通高等教育农业农村部“十三五”规划教材《高等数学》(下册)配套的学习指导书。其编写原则,是对照原教材各章节的内容编写学习要求、学习指导(解难释疑)、解题方法与典型例题解析等指导性材料。其主要宗旨是:为初学者深刻理解高等数学知识、全面掌握高等数学方法提供适时的针对性帮助。本书也可作为高等数学课程考研学习的参考书目。

考虑到高等数学课程可能出现的学习困难,特别是初入校的大学生学习负担较重的现象,本书对原教材中的全部练习题给出了参考解答。同时,为了照顾到不同学习基础、不同学习要求者的学习需要,每章末安排了测试题并附有参考解答(其中某些题目,以及每章总练习的一些题目已接近考研水准),供学有余力的同学作为探究性学习的练习材料。必须指出,所有习题的参考解答,仅应作为读者在自行练习之后自我检测的参考依据,以免影响学习效果。

编者

2018年3月于杭州

目 录

第三版前言

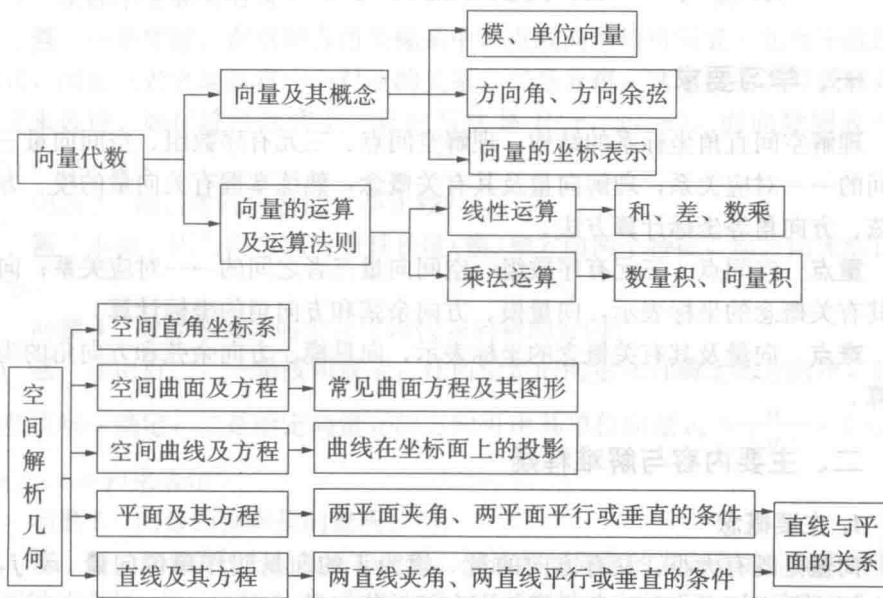
第八章 空间解析几何与向量代数初步	1
第1节 空间直角坐标系和向量代数	2
第2节 数量积 向量积 混合积	8
第3节 曲面及其方程	13
第4节 空间曲线及其方程	17
第5节 平面及其方程	21
第6节 空间直线及其方程	25
总练习八参考解答	34
第八章测试题	38
第八章测试题参考解答	39
第九章 多元微分学	43
第1节 多元函数及其极限	44
第2节 偏导数	52
第3节 全微分	57
第4节 多元复合函数的求导法则	63
第5节 隐函数的求导法	70
第6节 多元微分学的几何应用	79
第7节 方向导数与梯度	85
第8节 多元函数的极值	90
第9节 二元函数的泰勒公式	99
总练习九参考解答	102
第九章测试题	109
第九章测试题参考解答	109

第十章 重积分	113
第 1~3 节 二重积分的概念、性质、计算与换元积分	114
第 4 节 三重积分	130
第 5 节 重积分应用	138
总练习十参考解答	145
第十章测试题	151
第十章测试题参考解答	152
第十一章 曲线与曲面积分	156
第 1 节 第一型曲线积分	157
第 2 节 第二型曲线积分	164
第 3 节 格林公式及其应用	172
第 4 节 第一型曲面积分	181
第 5 节 第二型曲面积分	187
第 6、7 节 高斯公式、斯托克斯公式	194
总练习十一参考解答	203
第十一章测试题	210
第十一章测试题参考解答	211
第十二章 无穷级数	215
第 1 节 数项级数	216
第 2 节 正项级数	221
第 3 节 一般项级数	228
第 4 节 幂级数	232
第 5 节 函数的幂级数展开	237
第 6 节 幂级数的简单应用	244
第 7、8 节 傅里叶级数、正弦和余弦级数	247
总练习十二参考解答	257
第十二章测试题	268
第十二章测试题参考解答	269
参考文献	275

第八章 空间解析几何与向量代数初步

在中学已经知道,平面解析几何是通过建立平面直角坐标系,用代数方法来研究平面几何问题的数学学科.而空间解析几何则要建立空间坐标系,用代数方法研究立体几何问题.这不仅是对中学数学知识的提高,也是学习多元函数微积分的必要基础(正如前面我们学习一元函数微积分时所体会到的那样).

一、知识框图



二、学习要求

了解空间直角坐标系的有关内容;理解向量及其有关概念,能熟练进行向

量运算；理解曲面与方程的概念，了解常用二次曲面的方程及其图形；会求以坐标轴为旋转轴的各种旋转曲面，以及母线平行于坐标轴的柱面方程；熟练掌握平面的点法式方程、一般式方程等常用形式及其求法；能够判别空间点、直线、平面及其相互位置关系；熟练掌握常用直线方程的求取方法。

三、学习指导

有关向量运算的概念与方法，可以结合其几何意义予以理解；两向量垂直和平行的充要条件，不仅是理解直线、平面及其相互关系的关键，也往往是求直线方程、平面方程所需要的基本条件。

对照平面解析几何的有关知识来理解本章内容，是非常重要和有效的学习方法。虽然某些空间图形难以描绘，但结合该立体在每个坐标面上的投影，即可综合想象其大致形状。特别地，自觉培养空间图形的想象能力，不仅是学习多元函数积分学的需要，也是数学训练十分重要的目的之一！

第1节 空间直角坐标系和向量代数

一、学习要求

理解空间直角坐标系的结构，理解空间点、三元有序数组、空间向量三者之间的一一对应关系；理解向量及其有关概念，熟练掌握有关向量的模、方向余弦、方向角等坐标计算方法。

重点 空间点、三元有序数组、空间向量三者之间的一一对应关系；向量及其有关概念的坐标表示，向量模、方向余弦和方向角的坐标计算。

难点 向量及其有关概念的坐标表示，向量模、方向余弦和方向角的坐标计算。

二、主要内容与疑难释疑

1. 主要概念

向量是既有大小，又有方向的量。模为1的向量叫作单位向量。 i, j, k 是空间直角坐标系中与三条坐标轴同向的单位向量。

设向量 $a = (a_x, a_y, a_z)$ ， $b = (b_x, b_y, b_z)$ ，则 a 的模为 $|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ ， a 的方向角为 $\alpha = (\widehat{a}, i)$ ， $\beta = (\widehat{a}, j)$ ， $\gamma = (\widehat{a}, k)$ ， a 的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

与向量 \mathbf{a} 同方向的单位向量记为

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(a_x, a_y, a_z)}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

向量的加、减及数乘运算，分别定义为

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z),$$

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z), \quad \lambda \text{ 为非零常数.}$$

向量 \mathbf{a} 在 u 轴上的投影，记为 $\text{Prj}_u \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \varphi$ ，其中 φ 为向量 \mathbf{a} 与 u 轴的夹角。

2. 解难释疑

问题 1 空间直角坐标系只需用到“右手系”一种形式吗？

答 否，右手系只是习惯采取的一种空间直角坐标形式。在实际问题的讨论中，根据物体的位置或形状，往往需要灵活选用适当的坐标系（如左手系），这对简化问题和寻求其他解决方法是十分必要的。

问题 2 如何理解空间点、三元有序数组、空间向量三者之间的一一对应关系？实际中又如何分辨？

答 一是理解：在空间直角坐标系中，点或向量均可写成三元有序数组的形式，因而三者之间具有一一对应的关系；二是分辨：这需借助符号或联系上下文来进行。如在符号形式上，点的写法是 $P(x, y, z)$ ，而向量则表示为 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 。

问题 3 能否进行向量的大小比较？

答 不能。因为向量同时兼具长度（模）和方向两个特征，而方向无法比较大小。

问题 4 为什么说方向余弦可以代表向量的方向？

答 理由有二：一是按照规定，任何给定的向量均有确定的方向角，且其余弦值唯一确定；二是给定向量 \mathbf{a} 的方向可由其单位向量 $\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 来表示。

问题 5 向量的投影是向量吗？

答 否，向量的投影是数而非向量。但该数与向量的方向有关：如果向量与投影轴的方向一致，该数为正；如果向量与其投影轴的方向相反，则该数为负。

三、解题方法与例题解析

运用坐标进行向量的有关运算，必须遵守相关的运算律和规则，其主要题

型有：求向量的模、方向角、方向余弦，以及加减、数乘运算等。

例 1 已知点 $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -4)$, $C(-1, 1, 2)$, 试求点 D , 使得以 A, B, C, D 为顶点的四边形是平行四边形。

解 若所求点 D 与 A 相对, 依题意得 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. 设点 D 的坐标为 (x, y, z) , 有

$(x-3, y+1, z-2) = (-2, 3, -6) + (-4, 2, 0) = (-6, 5, -6)$, 于是 $x-3=-6, y+1=5, z-2=-6$, 得

$$x = -3, y = 4, z = -4,$$

即所求点 D 的坐标为 $(-3, 4, -4)$.

附注 对给定三点, 可以作出不同位置的三种平行四边形. 在其余两种形式下, 同上可得 D 的坐标分别为 $(1, -2, 8)$ 和 $(5, 0, -4)$.

例 2 某向量的终点为 $B(2, -1, 7)$, 且在 x, y, z 轴上的投影依次为 $4, -4, 7$, 求此向量的始点坐标、方向余弦和方向角。

解 设始点 A 的坐标为 (x, y, z) , 则由题意

$$2-x=4, -1-y=-4, 7-z=7,$$

可得

$$(x, y, z) = (-2, 3, 0),$$

所以 $\overrightarrow{AB} = (4, -4, 7)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 7^2} = 9$, $e_{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{9}(4, -4, 7)$,

从而所求方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{4}{9}, \cos \beta = -\frac{4}{9}, \cos \gamma = \frac{7}{9};$$

所求方向角为

$$\alpha = \arccos \frac{4}{9}, \beta = \arccos \left(-\frac{4}{9}\right), \gamma = \arccos \frac{7}{9}.$$

例 3 设向量 a 与 xOy, yOz, zOx 三坐标面所成的角分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $(0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq \frac{\pi}{2})$, 求 $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3$.

解 设向量 a 的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, 则有 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

记向量 a 与 x, y, z 轴所成的角分别为 α, β, γ , 由题意: α_1 与 γ, α_2 与 α, α_3 与 β 均互为余角. 从而

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 &= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \\ &= 3 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = 2. \end{aligned}$$

注意 此题求解主要利用了向量方向余弦的性质、向量的方向角及其与坐

标垂直的关系.

习题 8-1 参考解答

思考题

1. 在空间直角坐标系中, 指出下列各点所在的卦限:

解 $A(1, -2, 3)$ 在第Ⅳ卦限; $B(3, 1, -5)$ 在第Ⅴ卦限; $C(2, -3, -4)$ 在第Ⅷ卦限; $D(-1, 4, 5)$ 在第Ⅱ卦限.

2. **解** (1) 点 $M(4, -3, 2)$ 关于 xOy 面的对称点为 $(4, -3, -2)$, 关于 yOz 面的对称点为 $(-4, -3, 2)$, 关于 zOx 面的对称点为 $(4, 3, 2)$;

(2) 点 $M(4, -3, 2)$ 关于 x 轴的对称点为 $(4, 3, -2)$, 关于 y 轴的对称点为 $(-4, -3, -2)$, 关于 z 轴的对称点为 $(-4, 3, 2)$;

(3) 点 $M(4, -3, 2)$ 关于坐标原点的对称点为 $(-4, 3, -2)$.

3. 当点 M 的坐标 (x, y, z) 分别满足下列条件时, 点 M 的位置如何?

解 (1) $x=0, y=0$ 表示点 M 在 z 轴上;

(2) $x=a$ 表示点 M 在过点 $(a, 0, 0)$ 且垂直于 x 轴的平面上;

(3) $x=a, y=b$ 表示点 M 在过点 $(a, b, 0)$, 且平行于 z 轴的直线上;

(4) $x^2+y^2+z^2=1$ 表示点 M 在以原点为球心的单位球面上.

4. **解** 由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, 验证可知: 只有(1)可以作为一个向量的方向余弦.

5. 设向量的方向余弦分别满足: (1) $\cos\alpha=0$; (2) $\cos\beta=1$; (3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$, 问这些向量与坐标面或坐标轴的关系如何?

解 (1) $\cos\alpha=0$ 表示向量垂直于 x 轴, 即平行于 yOz 平面;

(2) $\cos\beta=1$ 表示向量方向与 y 轴的正向一致, 即垂直于 zOx 平面;

(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$ 表示向量平行于 z 轴, 即垂直于 xOy 平面.

练习题

1. 某向量的坐标依次为 4、-4、7, 终点为 $B(2, -1, 7)$, 求始点 A 的坐标.

解 由于 $\vec{AB}=(4, -4, 7)=\vec{OB}-\vec{OA}$, 所以

$$\vec{OA}=\vec{OB}-\vec{AB}=(2, -1, 7)-(4, -4, 7)=(-2, 3, 0),$$

所以始点 A 的坐标为 $(-2, 3, 0)$.

2. 设 $\mathbf{a}=(3, -1, 2)$, $\mathbf{b}=(1, 2, -1)$, 求:

(1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$; (2) $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$; (3) $|\mathbf{a}|\mathbf{b}-\mathbf{a}|\mathbf{b}|$.

解 (1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(3, -1, 2)+(1, 2, -1)=(4, 1, 1)$;

$$(2) 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = 3(3, -1, 2) - 2(1, 2, -1) = (7, -7, 8);$$

(3) 由于 $|\mathbf{a}| = \sqrt{14}$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{6}$, 所以

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}| |\mathbf{b} - \mathbf{a}| |\mathbf{b}| &= \sqrt{14}(1, 2, -1) - \sqrt{6}(3, -1, 2) \\ &= (\sqrt{14} - 3\sqrt{6}, 2\sqrt{14} + \sqrt{6}, -\sqrt{14} - 2\sqrt{6}). \end{aligned}$$

3. 设 $A(1, -1, 2)$, $B(1, 1, 0)$, $C(-1, 4, 2)$, 求 $\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{CA}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{CA} &= (0, 2, -2) + 3(-2, 3, 2) - 4(2, -5, 0) \\ &= (-14, 31, 4). \end{aligned}$$

4. 求与向量 $\mathbf{a} = (3, -1, 2)$ 同方向的单位向量.

解 因为 $|\mathbf{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$, 所以

$$\mathbf{e}_a = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, -1, 2) = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}} \right).$$

5. 已知两点 $A(4, \sqrt{2}, 1)$ 和 $B(3, 0, 2)$, 计算向量 \overrightarrow{AB} 的模、方向余弦和方向角.

解 由于 $\overrightarrow{AB} = (3, 0, 2) - (4, \sqrt{2}, 1) = (-1, -\sqrt{2}, 1)$, 所以

$$|\overrightarrow{AB}| = 2, \mathbf{e}_{\overrightarrow{AB}} = \frac{(-1, -\sqrt{2}, 1)}{2} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

从而
$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \gamma = \frac{1}{2},$$

所以
$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{3\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

6. 设向量 \mathbf{a} 的方向余弦 $\cos \beta = \frac{2}{3}$, $\cos \gamma = \frac{2}{3}$, $|\mathbf{a}| = 3$, 求向量 \mathbf{a} 的坐标表示式.

解 因为 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, $\cos \beta = \frac{2}{3}$, $\cos \gamma = \frac{2}{3}$,

所以 $\cos \alpha = \pm \frac{1}{3}$, 从而

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{e}_a = 3 \left(\pm \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) = (\pm 1, 2, 2).$$

7. 已知向量 \overrightarrow{AB} 的长度为 6, 方向余弦为 $-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, 点 A 的坐标为 $(3, 0, 4)$, 求点 B 的坐标.

解 因为 $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \mathbf{e}_{\overrightarrow{AB}} = 6 \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) = (-4, 2, 4)$,

所以 $\vec{OB} = \vec{AB} + \vec{OA} = (-4, 2, 4) + (3, 0, 4) = (-1, 2, 8)$,

故点 B 的坐标为 $(-1, 2, 8)$.

8. 设向量 r 的模为 4, 它与 u 轴的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 求 r 在 u 轴上的投影.

解 $\text{Prj}_u r = |r| \cos \varphi = 4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2$.

9. 已知点 $A(2, -1, 3)$ 是向量 a 的终点, 向量 $b = (-3, 4, 7)$ 和 $c = (0, 0, 5)$ 与 a 满足 $a = 3b - 2c$, 求向量 a 的起点 B 及 a 在各坐标轴上的投影.

解 因为 $b = (-3, 4, 7)$, $c = (0, 0, 5)$, 所以

$$a = 3b - 2c = 3(-3, 4, 7) - 2(0, 0, 5) = (-9, 12, 11),$$

于是 a 在 x, y, z 坐标轴上的投影分别为: $-9, 12, 11$;

$$\text{又 } \vec{OB} = \vec{OA} - a = (2, -1, 3) - (-9, 12, 11) = (11, -13, -8),$$

故 a 的起点 B 的坐标为 $(11, -13, -8)$.

10. 求与向量 $r = (16, -15, 12)$ 平行、方向相反, 且长度为 75 的向量.

解 由于 $|r| = \sqrt{16^2 + (-15)^2 + 12^2} = 25$, 故所求向量为

$$75 \frac{(-r)}{|r|} = -3(16, -15, 12) = (-48, 45, -36).$$

11. 点 M 的向径与 x 轴成 45° 角, 与 y 轴成 60° 角, 其长度为 6 个单位, 若其在 z 轴上的坐标为负值, 求点 M 的坐标.

解 因为 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \beta = \frac{1}{2}$, 所以 $\cos \gamma = \pm \frac{1}{2}$.

由题设, 该向量在 z 轴上的坐标为负值, 故取 $\cos \gamma = -\frac{1}{2}$, 由此得向径

$$\vec{OM} = 6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) = (3\sqrt{2}, 3, -3),$$

从而点 M 的坐标为 $(3\sqrt{2}, 3, -3)$.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知点 $A(1, -2, 3)$, $B(-2, -2, 7)$, $C(6, -4, -11)$, 从点 A 出发的中线交 BC 于 D , 求与 \vec{AD} 同方向的单位向量.

解 由于 $\vec{AC} = (6, -4, -11) - (1, -2, 3) = (5, -2, -14)$, $\vec{AB} = (-2, -2, 7) - (1, -2, 3) = (-3, 0, 4)$, 根据中线定义, 有

$$\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AB}) = \frac{1}{2}(2, -2, -10) = (1, -1, -5), \quad |\vec{AD}| = 3\sqrt{3},$$

于是与 \vec{AD} 同方向的单位向量

$$e_{\vec{AD}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{9}, -\frac{\sqrt{3}}{9}, -\frac{5\sqrt{3}}{9} \right).$$

13. 向量 \mathbf{a} 的方向角 α, β, γ 满足 $\alpha = \beta, \gamma = 2\alpha$, 求 \mathbf{e}_a .

解 因为 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, 所以 $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$, 由此解得

$$\cos\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\gamma = 0 \text{ 或 } \cos\alpha = \cos\beta = 0, \cos\gamma = -1,$$

所以 $\mathbf{e}_a = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ 或 $(0, 0, -1)$.

第2节 数量积 向量积 混合积*

一、学习要求

理解向量的数量积、向量积(和混合积*)的概念及其几何意义;熟练掌握数量积、向量积(及混合积*)的坐标计算方法;熟悉并会应用两向量垂直、平行的条件.

重点 数量积、向量积(及混合积*)的概念及其坐标计算方法;两向量垂直、平行的条件.

难点 向量积(及混合积*)的坐标计算, 向量垂直、平行的判别及应用.

二、主要内容与解难释疑

1. 主要概念

设向量 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 定义:

数量积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos\theta$, 其中 $\theta = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

由此易得: $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

向量积 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k}$

仍是向量, 且当 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 时, 规定:

(1) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ (大小);

(2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$ (方向), 且 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 依次构成右手坐标系.