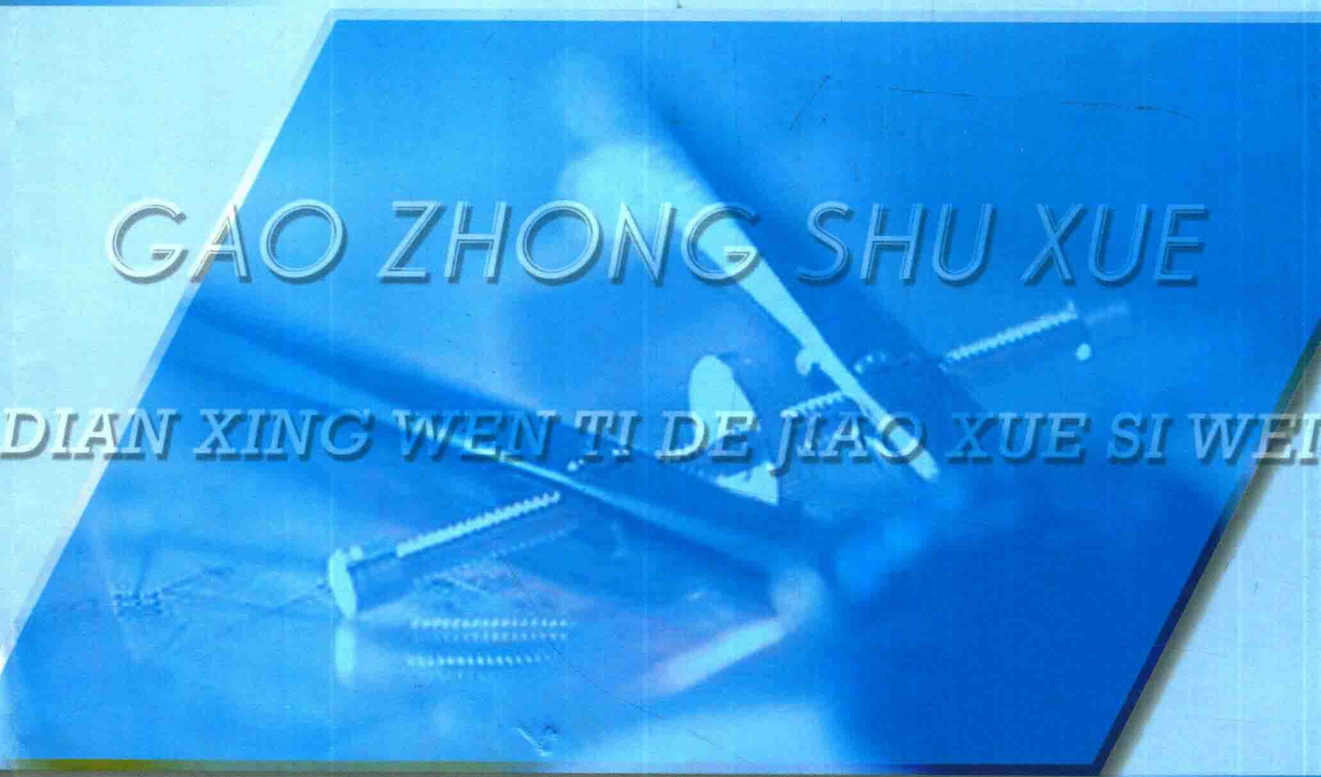
高中数学

典型问题的教学思维



王新兵 著

天津社会科学院出版社

高中数学
典型问题的教学思维

王新兵 著

图书在版编目（CIP）数据

高中数学典型问题的教学思维 / 王新兵著. -- 天津：天津社会科学院出版社，2014.5
ISBN 978-7-5563-0019-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①中学数学课－教学研究－高中 Ⅳ. ①G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第102957号

出版发行：天津社会科学院出版社
出 版 人：钟会兵
地　　址：天津市南开区迎水道7号
邮　　编：300191
电话/传真：（022）23366354
（022）23075303
网　　址：www.tass-tj.org.cn
印　　刷：天津兴德印刷有限公司

开　　本：787×1092　毫米　1/16
印　　张：21.75
字　　数：420千字
版　　次：2014年6月第1版　2014年6月第1次印刷
定　　价：48.00元

序

减轻过重的数学课业负担，主要是减少大运动量的题型重复训练。通过典型问题及其解题思路的自然展示，通过典型数学问题的解题教学思维的启发与诱导，让学生学会数学思维，是对付题海战术的利器，是提高高中生数学学习效率的法宝。进入高三总复习，势必需要一本让师生跳出数学题海的典型问题的解题思维专著，《高中数学典型问题的教学思维》正是这样一本专著。

全书贯穿着注重基础，渗透思维，提升效率的理念，突显着范例学习、类比学习、题组学习的高效学习特点。从思维方法和知识系统两个方面构成网络来揭示整个高中数学解题中的主要方法和技巧，不但脉络清晰，便于掌握，而且覆盖全面，实用性强。全书突出了以下几大亮点：

语言通俗：没有深奥拗口的理论阐述，取而代之的是平实朴素的辞藻，使读者读起来亲切、自然。

逻辑性强：基本是按照先代数后几何、先基础后综合、先一般后特殊的逻辑顺序进行编排，不但符合高中知识体系的安排顺序，更符合学生逻辑思维深化的过程。

总结全面：根据各个专题的自身特点，全面地归纳总结出该专题常用的通性通法，而且兼顾前一个专题思想方法的运用与呼应。

重视基础：从高中数学的基本知识、基本技能、基本技巧入手进行讲解，符合读者由浅入深、从低到高的思维过程。

启发思维：系统地揭示了那些常被“神化”的解题思路和技巧，并辩证地阐述了解题过程中转化和变通的常用方法，读后不但能使人知其然，而且能知其所以然，易于读者掌握和运用。

问题典型：每讲内容均配备典型问题，从多侧面、多角度阐述各讲核心内容。问题的选取既有历年经典高考题，又有作者编拟的新题，但均突出“典型”特征，即各种变式问题的“内核”题目。其中，给出的解法既切合实战，又见解独到，自然而然渗透数学思维，以训练解题思维能力，应付万变的各种数学问题类型。

王新兵先生是数学特级教师，数学教学水平甚高，是我心目中名副其实并且让我钦佩

的数学教学名师，作为学习《高中数学典型问题的教学思维》著作的第一位读者，收获颇多。相信各位读者学习后定能有收获，有启发。序者抛砖引玉之功用，请大家品味王新兵先生雕琢的精灵透彻的美玉——《高中数学典型问题的教学思维》吧！

王光明

2014年3月

前言

许多高中生都有这样一个梦想，那就是考上一所理想的大学，他们都希望在高考中发挥最高水平，展现最强实力，考出优异的成绩；每位教师都有这样一个追求，那就是希望自己在教学中说的每句话都能“一字千金”，都能对学生的高效学习有所启发、有所帮助，希望教的每一个问题都能让学生透彻领悟，学会举一反三，做到会一题而知一类，希望教的每一个学生都能金榜题名，考入自己心仪的理想学府，实现自己的大学梦。

为了帮助学生完成梦想，为了体现教师的价值追求，除了在日常的学习和教学中刻苦努力钻研外，教师还要在复习阶段，提高效益，提升层次，发展思维和能力，尤其是在规律性问题上有所突破，如解题思路、数学思想、思维能力等，以便达到“海阔凭鱼跃，天高任鸟飞”的境界。有人说，三流的教师讲知识，二流的教师讲方法，一流的教师教基本思想和方法产生的过程。让学生从学会走向会学，让学生掌握数学的基本思想并形成数学思维，形成自己的知识体系和结构，这是我的执着追求，更是编著《高中数学典型问题的教学思维》一书的初衷。

我一直有一个心愿，就是将自己近三十年的教学体会归纳总结，形成专题，希望对学生的学习和青年教师的教学起到一定的指导作用。正基于此，在闲暇之余，我便着手准备，积累资料，对近几年的各类数学考试试题进行分析、归类、挖掘解题思路和解题方法，使数学思维展现得淋漓尽致。从实际出发，从实战考虑，进行教学思维的探索与研究，历时一年，形成了共八个专题 26 讲的内容，并配有相应的练习，尽量使之系统化。

在编写的过程中，我遵循高中数学课程标准和考试大纲的要求，从函数与不等式、三角与向量、数列、导数、立体几何、解析几何、概率及其分布、线性规划等八个方面入手，将每一个方面中的规律性的知识都形成一个专题进行阐述，注重知识点组成问题的类型、思维方法和规律总结，以题带知识点，尽量使每个专题系统化。在这 26 讲中，每一讲中的问题除强调典型问题的教学思维外，还注重了以下原则：熟悉化原则、具体化原则、直观

化原则、坐标化原则和和谐化原则等，这些原则在问题解决中互相联系、相辅相成。同时，为了检验教学后的效果，在每一讲后配备了三个选择题、两个填空题、一个解答题，以利于学生对知识的理解和掌握。

我反对一味地好高骛远“玩儿”难题，但根据数学教学实际的情况我体会到，问题的解决并非无章可循，纵观历年的数学考题，总的来看，只要掌握了核心考点，充分领悟理论、方法、思维，无论问题如何“改头换面”，都会万变不离其宗，正确地解答出“似曾相识”的题目。本书正是秉承这个思想，力争实现重点知识系统化、网络化，形成特色，从而体现我的教学理念和思想。

我希望本书对青年教师的教学和高中学生的学习有所帮助，也希望与志同道合的教师们一道分享我的实践经验和探究思路。本书在编写的过程中难免有疏漏之处，恳请读者给予批评和指正.

作者书于2014年3月

目　录

第一章 函数与不等式

第1讲 关于抽象函数的几个问题

所谓抽象函数问题，是指没有具体地给出函数的解析式，只给出它的一些特征或性质，从而提出种种问题．涉及（1）函数定义，定义域、值域，两域的相互制约；（2）函数的性质：增减性、奇偶性、周期性、对称性等；（3）对数、分式、根式、三角函数式的特征．解决这类问题常涉及函数的概念和各种性质，具有抽象性、综合性和技巧性等特点．

一、抽象函数的定义域问题

这类问题在学习中经常出现，概括起来一般包括四种情况：

1．已知原函数定义域，求复合函数定义域

例 1．已知函数 $f(x)$ 定义域为 $(0,1)$，求函数 $f(2x+1)$ 的定义域．

联想到：定义域是 x，即自变量的变化范围，这里需换个字母，故由 $f(2x+1)$ 中的特点可令 $u=2x+1$，因 $f(x)$ 中的 x 和 $f(u)$ 中的 u “地位”相同，因此 $0<u<1$，即 $0<2x+1<1$，解得 $-\frac{1}{2}<x<0$．

$\therefore$ 函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 $(-\frac{1}{2},0)$．

归纳起来就是：若已知函数 $f(x)$ 定义域为 $\left[a,b\right]$，其复合函数 $f\left[g(x)\right]$ 的定义域可由不等式 $a\le g(x)\le b$ 求出．

如:（2013. 全国）已知函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(-1,0\right)$，则函数 $f\left(2x-1\right)$ 的定义域为（ ）

A. $\left(-1,1\right)$　　B. $(0,\frac{1}{2})$　　C. $\left(-1,0\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},1\right)$

答案：选 B.

还是上面两个函数，若前后颠倒，则变式为下一类型问题．

2．已知复合函数定义域，求原函数定义域

例 2．已知函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 $(-\frac{1}{2},0)$，求函数 $f(x)$ 的定义域．

这个题目虽与例 1 只是前后换位，但具有本质区别，函数 $f(2x+1)$ 的定义域是其中 x 的范围，而 $u=2x+1$ 与函数 $f(x)$ 中 x 的“地位”相当，这样求 $f(x)$ 的定义域实质上就是求 u 的范围，即 u 的值域问题．

$\because f(2x+1)$ 定义域为 $(-\frac{1}{2},0)$，即 $-\frac{1}{2}<x<0$，$\therefore 0<2x+1<1$．

故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$．

此类问题归纳起来就是：若已知函数 $f\left[g(x)\right]$ 定义域为 $\left[a,b\right]$，则 $f(x)$ 定义域即为

$g(x)$ 在 $x\in[a,b]$时的值域.

3．已知复合函数定义域，求另一复合函数的定义域

例 3．已知函数 $f(2x+1)$ 定义域为 $(0,1)$，求 $f(x-2)$ 的定义域.

本题目是前两种类型题目的结合，解决本题思路自然想到先由 $f(2x+1)$ 定义域求函数 $f(x)$ 定义域，再由函数 $f(x)$ 定义域求函数 $f(x-2)$ 定义域，这里的 $f(x)$ 起到“搭桥”的作用.

$\because f(2x+1)$ 定义域为 $(0,1)$，则 $0<x<1$，于是 $1<2x+1<3$，$\therefore f(x)$ 定义域为 $(1,3)$.

对于函数 $f(x-2)$，则有 $1<x-2<3$，$3<x<5$，

所以函数 $f(x-2)$ 的定义域为 $(3,5)$.

4．抽象函数与基本初等函数整合求函数的定义域.

例 4．已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$，那么函数 $g(x)=\dfrac{f(x^2)}{1+\lg(x+1)}$ 的定义域是____ .

$\because f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$，有 $0\le x^2\le 2$，$x+1$ 是真数，$x+1>0$，而 $1+\lg(x+1)$ 是分母，故 $1+\lg(x+1)\ne 0$．$\therefore \begin{cases} 0\le x^2\le 2 \\ x+1>0 \\ 1+\lg(x+1)\ne 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2} \\ x>-1 \\ x\ne -\dfrac{9}{10} \end{cases}$，$\therefore -1<x<-\dfrac{9}{10}$ 或 $-\dfrac{9}{10}<x\le\sqrt{2}$

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 的定义域为 $\left(-1,-\dfrac{9}{10}\right)\cup\left(-\dfrac{9}{10},\sqrt{2}\right]$.

以上是抽象函数定义域问题的求解方法，只要理解题意，分清类别，即强调定义域是 x 的取值范围，就不会再感到“抽象”.

二、抽象函数的值域问题

复合函数值域问题一般的是先给出一个原函数值域，然后求另外复合函数的值域，这样题目一般以选择题、填空题的形式出现．请看下面实例：

例 5．若函数 $y=f(x)$ 的值域是 $[1,3]$，则函数 $F(x)=1-2f(x+3)$ 的值域是（　）

A．$[-5,-1]$　　B．$[-2,0]$　　C．$[-6,-2]$　　D．$[1,3]$

此类问题中，$y=f(x)$ 和 $y=f(x+3)$ 函数图像间只是左右平移关系，函数值域不变，抓住这一关键，便使问题容易了.

$\because 1\le f(x)\le 3\ \ \therefore 1\le f(x+3)\le 3\ \ \therefore -6\le -2f(x+3)\le -2\ \ \therefore -5\le F(x)\le -1$，选 A.

例 6. 若函数 $y=f(x)$ 的值域是 $\left[\frac{1}{2},3\right]$，则函数 $F(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$ 的值域是（　）

A. $\left[\frac{1}{2},3\right]$　　B. $\left[2,\frac{10}{3}\right]$　　C. $\left[\frac{5}{2},\frac{10}{3}\right]$　　D. $\left[3,\frac{10}{3}\right]$

本题目虽表面上看是抽象函数值域问题，但略加变形，令 $t=f(x)$，$t\in\left[\frac{1}{2},3\right]$ 则化归为一般函数求取值范围问题.

$\because y=t+\frac{1}{t}\in\left[2,\frac{10}{3}\right]$,，结合图像知 $F(x)\in\left[2,\frac{10}{3}\right]$，选 B.

由此可见，抓本质重转化是解决本题的关键所在.

例 7.（2011.上海）设 $g(x)$ 是定义在 R 上，以 1 为周期的函数，若函数 $f(x)=x+g(x)$ 在区间 $[3,4]$ 上的值域为 $[-2,5]$，则 $f(x)$ 在区间 $[-10,10]$ 上的值域为______ .

看到这个题目后，似乎感到无从下手，但若想到求 $f(x)$ 值域，那就要寻求 $f(x)$ 变化规律，那就只有以 $g(x)$ 是周期为 1 的函数为切入点进行探究.

$\because g(x)$ 是周期为 1 的函数，且 $f(x)=x+g(x)$，联想到 $f(x+1)=x+1+g(x+1)$，又 $g(x+1)=g(x)$，所以 $f(x+1)=x+g(x)+1$，即 $f(x+1)=f(x)+1$，同理 $f(x+2)=f(x+1)+1$，…，即对 $f(x)$ 图像而言，x 每增加一个长度单位，函数图像向上平移一个单位，反之，x 每减少一个长度单位，函数图像就向下平移一个单位，又 $x\in[3,4]$ 时，$f(x)\in[-2,5]$，$f(x)$ 最大值与最小值差为 $5-(-2)=7$，所以当 $x\in[4,5]$ 时，x 增加一个单位，图像上移一个单位，$f(x)\in[-1,6]$；当 $x\in[5,6]$ 时，$f(x)\in[0,7]$；……；当 $x\in[9,10]$ 时，$f(x)\in[4,11]$，

同理，当 $x\in[-10,-9]$ 时，$f(x)\in[-15,-8]$. 综上可知 $x\in[-10,10]$ 时，$f(x)$ 值域为 $[-15,-8]\cup[-14,-7]\cup\cdots\cup[0,7]\cup\cdots\cup[4,11]=[-15,11]$，故填 $[-15,11]$.

由此可见，对于抽象函数值域问题，要善于“察言观色”，领会其实质，使问题的解决常态化.

三、有关抽象函数的解析式问题

一般求函数的解析式都采用待定系数法，关于点、直线对称的知识，根据题目条件的特点或性质特征来确定，如配凑法、换元法、解方程组法等. 但应注意的是所求函数定义域要保持前后一致，这一点在求解过程中最容易忽略.

例 8. 已知 $f(1+\sin x)=2+\sin x+\cos^2 x$，求 $f(x)$.

要求的是 $f(x)$，一眼看出应当令 $u=1+\sin x$，则 $\sin x=u-1$，$0\le u\le 2$，这样

$f(u)=-u^2+3u+1$，即 $f(x)=-x^2+3x+1$，$(0\le x\le 2)$

这里我们采用的是换元法，它是解答抽象函数问题的基本方法，我们也可以用“配凑法”对本题求解：

$\because f(1+\sin x)=-\sin^2 x+\sin x+3=-(\sin x+1)^2+3(\sin x+1)+1$.

将 $1+\sin x$ 看成一个整体 u，则有 $f(u)=-u^2+3u+1$，即 $f(x)=-x^2+3x+1$.

$(0\le x\le 2)$

例 9. 已知函数 $f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$ 的表达式. $(x\ne 0)$

这个题与上题类似，设 $x+\dfrac{1}{x}=t$，则 $|t|\ge 2$，于是 $t^2-2=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，$f(t)=t^2-2$，

即 $f(x)=x^2-2$，$(x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty))$.

但有的抽象函数解析式问题是通过方程形式给出的，再用上述方法难以奏效，则需另辟蹊径.

例 10. 已知 $f(x)+2f(\dfrac{1}{x})=1+x\ \ (x\ne 0)$，求 $f(x)$.

这个问题中一个方程两个式子，从常态思维考虑，只有消去一个方能求出另一个，因此想到：

$f(x)+2f(\dfrac{1}{x})=1+x\ldots$（1）

将$\frac{1}{x}$代换成x，得：

$$f(\frac{1}{x})+2f(x)=1+\frac{1}{x} \text{……（2）}$$

（1）$-2\times$（2），消去$f(\frac{1}{x})$得：$f(x)=\frac{-x^2+x+2}{3x}\quad (x\neq 0)$.

这种方法的实质，就是构造和求解方程组的方法：当遇到满足形如 $af(x)+bf(-x)=g(x)$ 或 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=g(x)\quad (a\neq b\neq 0)$ 等关系时，在寻求另一个方程组时要依据方程组的特点，常用$-x$代换x，$\frac{1}{x}$代换x，等等，将得到的新式子与原关系联立，将$f(x)$从方程组中解出来.

例 11．已知$f(x)$是多项式函数，且$f(x+1)+f(x-1)=x^2-2x$，求$f(x)$.

本题已告诉$f(x)$是一个多项式函数，从结构上看应知道是二次函数式，这样可设 $f(x)=ax^2+bx+c\quad (a\neq 0)$，用待定系数法，并比较系数得：

$$a=\frac{1}{2}，\ b=-1，\ c=-\frac{1}{4}，\ f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{4}.$$

由此可见，如果抽象函数的类型是确定的，则可由待定系数法来求其解析式.

例 12．已知定义在实数集R上函数$f(x)$对一切$x,y\in R$均

有$f(x+y)-f(x)=y(x-2y)$，且$f(1)=0$，求$f(x)$.

本题涉及两个变量x,y，则需消去其中一个．又因$f(1)=0$，则应让其中一个为 1，将已知$f(x+y)-f(x)=y(x-2y)$中，y换成x，x赋值为 1：

则有$f(1+y)-f(1)=y(1-2y)$，即$f(1+y)=y(1-2y)$，再将y换成x，即得 $f(x+1)=x(1-2x)$.

因此得到$f(x)=(x-1)[1-2(x-1)]=-2x^2+5x-3$.

这种方法其实就是<u>赋值法</u>：先给x赋值 1，再给y赋值x.

例 13．已知$f(x)$是定义在正整数集上的函数，并且对任意$x,y\in N^*$，都有

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$，且 $f(1)=2$，求 $f(x)$.

这是定义在正整数集上的函数，联想到数列的递推关系是很自然的.

这样令 $y=1$，得到 $f(x+1)-f(x)=2+x$，

那么有：

$f(x)-f(x-1)=1+x(x\geq 2)$

$f(x-1)-f(x-2)=x$

$f(x-2)-f(x-3)=x-1$

……　　　　……

$f(3)-f(2)=4$

$f(2)-f(1)=3$

以上各式叠加：$f(x)-f(1)=3+4+...+(x+1)=\dfrac{(x-1)(x+4)}{2}$，$f(1)=2$，

$\therefore f(x)=\dfrac{x(x+3)}{2}(x\geq 2)$

当 $x=1$ 时，经检验成立，$\therefore f(x)=\dfrac{x(x+3)}{2}(x\in N^*)$

递推法求解析式，就是类比数列中的叠加相消求通项的思路，只要细心观察分析，定能找出其内在联系和规律．但解析式的求法并不仅仅局限于以上几例，应做到因题而异，抓住通性通法，达到灵活运用，正确求解.

四、抽象函数性质（奇偶性、周期性、对称性、单调性）问题

函数的性质能准确刻画函数自身的规律性，作为明确的初等函数有具体的解析式，研究起来方向明确．而对于抽象函数而言，则需根据题目的特点，挖掘所“隐藏”的函数性质，相对而言较抽象，细细品味，更有“口感”.

例 14．定义在 R 上的非常数函数满足：$f(10+x)$ 是偶函数，且 $f(5-x)=f(5+x)$，

则 $f(x)$ 一定是（　）

A．偶函数，也是周期函数　　B．偶函数，但不是周期函数

C．奇函数，也是周期函数　　D．奇函数，但不是周期函数

这个问题中，$f(10+x)$ 是偶函数，强调的是 x 变为“$-x$”时，解析式不变，因此

$f(10+x)=f(10-x)$，又 $\because f(5-x)=f(5+x)$，$\therefore f(x)$ 有两条对称轴 $x=5$ 与 $x=10$，

因此 $f(x)$ 是一个以 10 为其中一个周期的周期函数，这样 $x=0$，即 y 轴也是 $f(x)$ 的对称

轴．因此 $f(x)$ 也是一个偶的周期函数．所以选 A．

其实这里边运用到两个命题：

命题 1．函数 $y=f(x)$ 图像关于 $x=a$ 对称的充要条件是 $f(a+x)=f(a-x)$ 或 $f(x)=f(2a-x)$．

命题 2．若一个函数图像有两条对称轴，分别为 $x=a$ 和 $x=b$，那么这个函数为周期函数，$T=2(a-b)$ 为一个周期．

其证明如下：$\because f(x)$ 关于 $x=a$，$x=b$ 对称

$\therefore f(a+x)=f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)$

则 $f(2a-x)=f(x)$，$f(2b-x)=f(x)$

于是：$f[x+2(a-b)]=f[2a-(2b-x)]=f(2b-x)=f(x)$

$\therefore y=f(x)$ 是周期函数，且 $T=2(a-b)$．

由上述命题，用类比的数学思想，自然会联想到关于点对称的问题，它也有类似的命题：

命题 3．函数 $y=f(x)$ 图像关于点 (a,b) 对称的充要条件是 $f(x)+f(2a-x)=2b$；

命题 4．若函数 $y=f(x)$ 图像同时关于点 $A(a,c)$ 和点 $B(b,c)$ 成中心对称 $(a\neq b)$，则 $y=f(x)$ 是周期函数，且 $2(a-b)$ 是其一个周期．

对于这两个命题，可以将函数 $f(x)=\cos x$ 和 $y=\sin x$ 进行推广，则便于理解．

进一步引申：若函数图像即关于点对称又关于直线对称呢？

当然有如下命题：

命题 5．函数 $y=f(x)$ 图像关于点 $A(a,c)$ 对称，又关于直线 $x=b$ 对称 $(a\neq b)$，则 $y=f(x)$ 是周期函数，且 $4(a-b)$ 是一个周期．

证明：$\because y=f(x)$ 关于点 $A(a,c)$ 对称

$\therefore f(x)+f(2a-x)=2c$ ……（1）

又 $\because y=f(x)$ 关于直线 $x=b$ 对称

$\therefore f(x)=f(2b-x)$ ……（2）

将（1）中 x 用 $2b-x$ 代换，得 $f(2b-x)+f[2a-(2b-x)]=2c$ ……（3）

即 $f(x)=2c-f[2(a-b)+x]$，又 $f(x)$ 关于 $x=a-b$ 对称，把 $a-b$ 看作（2）中的 b，

于是得到 $f(x)=f\left[4\left(a-b\right)+x\right]$.

说明了 $y=f(x)$ 是周期函数，且 $4\left(a-b\right)$ 是一个周期.

有这样的性质，解题自然会很容易上手.

例 15．已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且 $y=f(x)$ 图像关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称，则 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=$______．

本题 $f(x)$ 既关于原点对称，又关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称，因此是周期函数，周期为 $4(\frac{1}{2}-0)=2$．又 $f(0)=0$ 关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称，$f(1)=0$，所以在每个整数点的值都是 0，故 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=0$．所以填 0．

例 16．定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(-\frac{3}{4},0)$ 成中心对称，对任意实数 x，都有 $f(x)=-f(x+\frac{3}{2})$，且 $f(-1)=1$，$f(0)=-2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2008)$ 值为（　　）.

A．-2　　　B．-1　　　C．0　　　D．1

本题中 $f(x)$ 图像关于点 $(-\frac{3}{4},0)$ 对称，找命题 3，$f(x)+f\left[2\left(-\frac{3}{4}\right)-x\right]=0$，

$f(x)=-f(-\frac{3}{2}-x)$，

又 $\because f(x)=-f(x+\frac{3}{2})$，$\therefore f(-\frac{3}{2}-x)=f(\frac{3}{2}+x)$，即 $f[-(\frac{3}{2}+x)]=f(\frac{3}{2}+x)$，$\therefore f(x)$ 图像关于 y 轴对称 $\therefore f(1)=f(-1)=1$.

又 $\because f(\frac{3}{2}+x)=-f(x)$　$\therefore f(x)$ 是周期函数，且 $T=3$.

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)=f(1)+f(-1)+f(0)=1+1-2=0$.

故 $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2008)=[f(1)+f(2)+f(3)]+\cdots+[f(2005)+f(2006)+f(2007)]+f(2008)=f(1)=1$.

选 D.

这里又应用到重要结论：

命题6．若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+a)=-f(x)$，$f(x+a)=-\dfrac{1}{f(x)}$，

$f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}$ 则函数 $y=f(x)$ 是周期函数，且 $T=2a$．

例17．已知 $f(x)$ 为 R 上的奇函数，若 $g(x)$ 为 R 上的偶函数，且 $g(x)=f(x-1)$，$g(2)=2001$，则 $f(1999)$ 的值等于（　）

A．-2000　　B．-2001　　C．2000　　D．2001

本题根据已知条件，求 $f(1999)$ 值，应首先想到运用周期性，往 $g(2)$ 上转化．

$\because g(x)=f(x-1)$ 为偶函数 $\therefore g(x)=g(-x)=f(-x-1)=f(x-1)$

又 $\because f(x)$ 为 R 上的奇函数 $\therefore f(-x-1)=-f(x+1)$

$\therefore f(x-1)=-f(x+1)$，把 x 换为 $x+1$，得 $f[(x+1)-1]=-f[(x+1)+1]$，$f(x)=-f(x+2)$，$\therefore f(x+2)=-f(x)$，根据命题6，知 $f(x)$ 是以4为周期的周期函数．

$\therefore f(1999)=f(3)=f(-1)=-f(1)=-g(2)=-2001$ $\therefore$ 选B．

例18．（2007．重庆）已知定义域为 R 的函数 $f(x)$ 在 $(8,+\infty)$ 上为减函数，且函数 $y=f(x+8)$ 为偶函数，则（　）

A．$f(6)>f(7)$　　B．$f(6)>f(9)$　　C．$f(7)>f(9)$　　D．$f(7)>f(10)$

这个题目是比较大小，充分利用同一区间上的单调性去解，因为 $y=f(x+8)$ 为偶函数，所以 $f(x+8)=f(-x+8)$，图像关于 $x=8$ 对称，则 $f(7)=f(9)$．

又 $\because y=f(x)$ 在 $(8,+\infty)$ 上为减函数，$\therefore f(7)=f(9)>f(10)$，选D．

有些问题具有一定的综合性，是以上性质的综合，那就要对这些性质恰当、灵活地运用．

例19．已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，且 $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$

（1）求 $f(1)$；

（2）证明：$f(x)$ 在定义域上是增函数；