普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

高等数学

刘早清 编

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

高等数学

刘早清 编

华中科技大学出版社
中国·武汉

内容提要

本书是根据编者多年的教学实践经验以及大量的信息反馈，精选经典内容，优化和重组并简洁处理相对成熟的素材，注重实际需要编写而成的. 本书主要特色是加强与中学数学的衔接，注重数学概念的实际背景和几何直观的引入，淡化了一些定理的证明，在适度运用严格的数学语言的同时，注意论述方式的自然朴素，便于读者理解，加强对基本数学概念和基本数学方法的阐述，强调数学建模的思想和方法. 全书由一元微积分、多元微积分、常微分方程及其应用、无穷级数四部分组成. 本书内容完整、结构严谨、逻辑清晰、讲解详尽、通俗易懂、例题丰富，每章节后配有适量的习题并附有参考答案，便于自学.

本书在保证教学基本要求的前提下，扩大了适应面，增强了伸缩性，兼容性强，可供高等院校医学、药学、经济管理、文科等专业的学生选用，也可供其他相关专业的学生选用或报考相关专业的硕士研究生的读者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/刘早清编. —武汉：华中科技大学出版社，2019.8
ISBN 978-7-5680-5307-5

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①刘…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 156535 号

高等数学
Gaodeng Shuxue
刘早清　编

策划编辑：周芬娜
责任编辑：周芬娜
封面设计：原色设计
责任校对：刘　竣
责任监印：徐　露
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)　电话：(027)81321913
　　　　　武汉市东湖新技术开发区华工科技园　邮编：430223
录　　排：武汉市洪山区佳年华文印部
印　　刷：武汉科源印刷设计有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：12.75
字　　数：411 千字(含学习平台 89 千字)
版　　次：2019 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：39.00 元

华中出版

前　言

本书是编者根据华中科技大学医科和经济管理以及文科等各专业的微积分课程要求并结合多年的教学实践经验编写成的.如今数学的应用领域越来越广,已深入渗透到几乎所有的领域,除了传统的自然科学、工程学、经济学与管理学外,数学的思想和方法对社会科学的发展也产生了巨大的影响,并且越来越多的医学研究人员也清楚地意识到医学科学的规律揭示除了医学科学工作者努力外还依赖于自然科学、数学、计算机科学的发展.近年来迅速发展的大数据和人工智能,其本质也是数学.因此,数学知识不仅是大学生必备的基本素质,还必须加强他们的定量分析能力的培养.为此我校在所有的文科专业开设了微积分必修课(64至80学时),并早在2008年就将医科各专业的微积分课时增加至80学时.在长期的教学工作中,我们曾经接触并使用过一些很有特色的教材,受益匪浅.但根据课堂教学改革实践以及课程建设的需要,结合多年来课程组的任课教师的教学体会以及我校学生的信息反馈,我们先后为我校医科和经济管理以及文科等各专业编写了《高等数学》与《大学文科数学》等教材.

本书是在经过多年的反复教学实践经验总结,继承《高等数学》(刘早清、毕志伟主编)和《大学文科数学》(刘早清、王湘君主编)的优点和有益之处的基础上编写而成的.本着强化数学思想和数学方法的传递,提升学生的数学素养与定量分析能力,以学生为中心的基本宗旨,将传统的微积分教学内容进行了优化整合和精心的重组处理.其特色在于:注重实际需要,加强与中学数学的衔接,注重数学概念的实际背景和几何直观的引入,淡化一些定理的证明;加强对基本数学概念和基本数学方法的阐述,强调数学建模的思想和方法;在适度运用严格的数学语言的同时,注意论述方式的自然朴素,便于读者理解;着力培养学生分析问题与解决问题的能力,提高学生的定量分析水平,激发他们的学习热情.

全书共分10章.包括了函数与极限,导数与微分及其应用,不定积分,定积分及其应用,空间曲面与曲线,多元函数的微分法及其应用,多元函数的积分,常微分方程及其应用,无穷级数等.此外,每节之后附有习题,并有参考答案.

本书可作为高等学校的临床医学、预防医学、药学,以及医药与信息管理等本科专业的高等数学课程的教材,参考学时为72至80学时.由于一些章节具有相对的独立性而可以取舍,所以本书也可作为少课时的理工科专业微积分教材或高等学校文科类大学数学教材,教学内容可选择为一元微积分与多元微分学或一元微积分与微分方程及其应用或一元微积分、多元微积分、微分方程及其应用,参考学时为64至96课时.

本书的编写得到了华中科技大学教学研究基金与教材建设基金的资助,还得到了很多同事、同行的帮助,以及华中科技大学出版社编辑周芬娜的大力支持,在此对他们表示衷心的感谢.限于作者的水平,书中难免有不妥与疏漏之处.敬请广大专家、同行与读者指正.

刘早清

2019年2月于华中科技大学

目　　录

第 1 章　函数与极限

初等数学研究的主要是常量及其运算，高等数学研究的主要是变量及变量之间的依赖关系. 函数正是现实世界中变量与变量之间的依赖关系在数学中的反映，极限方法是研究变量的一种基本方法. 本章复习中学所学过的函数知识，介绍极限的基本概念、基本性质、基本运算以及无穷小、无穷大，讨论两个重要极限并且利用极限描述函数的连续性.

1.1 函　　数

1.1.1 区间

为了说明变动的量的变化范围，我们先回顾一下中学数学中的集合概念. 一定性质事物的总体叫做集合(简称集)，组成这个集合的事物称为该集合的元素(简称元). 一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素.

习惯上，全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，全体正整数的集合记作 $\mathbf{N}^+$，全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.

有限区间　设 a,b 为两个实数，且 $a<b$，数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间，记为 (a,b)，即 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$. 类似地，有闭区间 $[a,b]$ 和半开半闭区间 $(a,b]$，$[a,b)$.

无限(穷)区间　引入记号 $+\infty$(读作"正无穷大")及 $-\infty$(读作"负无穷大")，它们可用来表示无限(穷)区间. 例如

$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\},\quad (-\infty,b)=\{x|x<b\}$$

特别地，全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可表示为无限(穷)区间 $(-\infty,+\infty)$.

邻域　在数轴上，以点 x_0 为中心，δ 为半径的开区间称为点 x_0 的邻域，记为

$$N(x_0,\delta)=\{x|x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$

其去心邻域，记为

$$\mathring{N}(x_0,\delta)=\{x|x_0-\delta<x<x_0 \text{ 或 } x_0<x<x_0+\delta\}$$

1.1.2 常量与变量

在生产、科学实验过程中，常常会遇到各种不同的量，其中有些量在所考虑的问题或过程中不起变化，也就是保持一定的数值，这种量叫做常量；还有一些量可以取不同的数值，这种量叫做变量.

一个量是常量还是变量往往与观察的过程有关. 例如,某种药品的价格在短期内可能是常量,而在较长时间内它会变化,是变量. 常量和变量是相对的,它们在一定条件下是可以相互转化的.

1.1.3 函数的定义

定义 1.1.1 设 x 和 y 是两个变量,D 为一个非空实数集,如果对 D 中的每个 x,依照某个对应法则 f,变量 y 都有确定的数值与之对应,则称 y 为 x 的函数,记作

$$y=f(x),x\in D \text{ 或 } f:x\to y,x\in D$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为函数的定义域,当自变量 x 在 D 中变动时,函数值 $y=f(x)$ 的全体称为函数 f 的值域.

如果对于每一个 $x\in D$,都有且仅有值域中的一个 y 与之对应,则称这种函数为单值函数. 如果对于给定 $x\in D$,有值域中的多个 y 与之对应,则称这种函数为多值函数. 本书中,若无特别的说明,所讨论的函数均指单值函数.

依定义,函数由定义域和对应法则确定,可见函数的定义域和对应法则是确定函数的两个要素. 两个函数相同是指定义域和对应法则分别相同,与自变量、因变量的记号无关.

在函数 $y=f(x)$中,当 x 取定 $x_0(x_0\in D)$时,称 $f(x_0)$为 $y=f(x)$在点 x_0 处的函数值,有时记为$f(x)\big|_{x=x_0}$.

大家熟悉的常用的函数表示法有解析法(又称公式法)、表格法和图像法.

用公式法表示一个函数通常用一个数学式表达就可以了,如 $y=\sin x$ 和 $y=e^{-2x}$等. 但有一些函数,当自变量在不同的范围内取值时,需用不同的表达式表示,这样的函数称为分段函数.

例 1.1.1 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

称为符号函数,它的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

例 1.1.2 函数 $y=[x]$表示不超过 x 的最大整数,简称为 x 的取整函数,如图 1.1.1 所示.

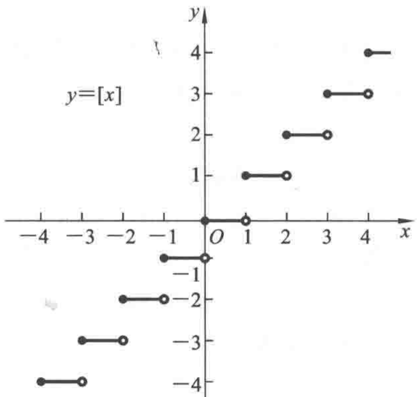

图 1.1.1

符号函数和取整函数都是分段函数.

1.1.4 函数的性质

1. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称,即对每个 $x\in D$ 都有 $-x\in D$. 如果对任意 $x\in D$,都有

$$f(-x)=f(x)\quad (f(-x)=-f(x))$$

则称 $f(x)$为偶函数(奇函数).

例如,$y=x^\alpha$,当 $\alpha=1,3$ 时为奇函数;当 $\alpha=2$ 时为偶函数. 从几何上看(图 1.1.2),奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

2. 函数的单调性

设 I 是函数 $f(x)$ 的定义域中的一个区间，若对该区间中的任意两个数 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (f(x_1)\geqslant f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是单调增加(单调减少)的，也称 $f(x)$ 是 I 上的单调增加(单调减少)函数. 这两类函数统称为单调函数，相应的区间 I 称为函数的单调区间；若有严格不等式

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (f(x_1)>f(x_2))$$

成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是严格单调增加(严格单调减少)的，也称 $f(x)$ 是 I 上的严格单调增加(严格单调减少)函数，这两类函数统称为严格单调函数，相应的区间 I 称为函数的严格单调区间.

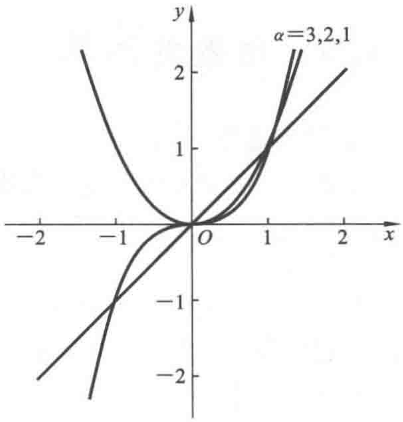

图 1.1.2

从几何上看(图 1.1.2)，当 $\alpha=1,3$ 时，函数 $y=x^{\alpha}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格单调增加的；当 $\alpha=2$ 时，函数 $y=x^{\alpha}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是严格单调减少的，在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格单调增加的.

3. 函数的周期性

若函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正常数 T，使得对每个 $x\in D$，都有 $x\pm T\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，常数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期. 通常我们说周期函数的周期是指最小的正周期.

例如，$y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，而 $y=|\sin x|$，$y=\cos^2 x$ 是以 π 为周期的周期函数.

从几何上看(图 1.1.3)，周期函数的图形可以看作是由一个基本周期区间 $[0,T]$ 上的图形经平移复制而来的.

4. 函数的有界性

设 I 是函数 $f(x)$ 的定义域中的一个区间，若存在常数 M，对每个 $x\in I$ 有 $f(x)\leqslant M$ $(M\leqslant f(x))$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有上界(下界)，而 M 是 $f(x)$ 在 I 上的一个上界(下界). 当 $f(x)$ 在 I 上既有上界又有下界时，则称 $f(x)$ 在 I 上有界，也称 $f(x)$ 是 I 上的有界函数，否则称 $f(x)$ 在 I 上无界，也称 $f(x)$ 是 I 上的无界函数.

例如，函数 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 均是其定义域内的有界函数，因为对所有的 x，都有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$. 函数 $f(x)=x^{-1}$ 在区间 $(0,2)$ 内无界，但在区间 $(1,2)$ 内有界.

从几何上看(图 1.1.4)，有界函数 $y=f(x)$ 的图形位于两条水平直线 $y=M$ 及 $y=-M$ 之间.

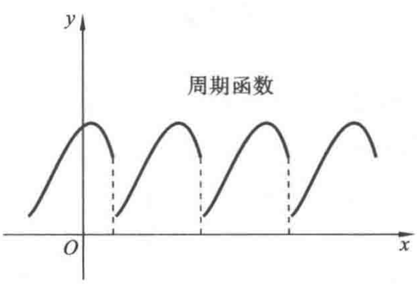

图 1.1.3

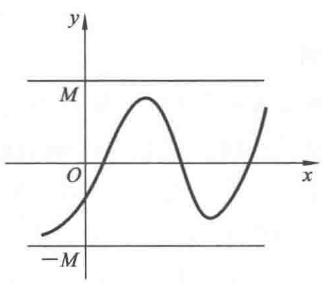

图 1.1.4

1.1.5 函数的运算

1. 四则运算

函数的自变量和因变量的取值是实数,可将实数的四则运算扩展到函数的运算中来.事实上,我们熟悉的算式 $e^x\pm\sin x$,$e^x\sin x$,$\dfrac{\sin x}{e^x}$ 的含义:给定 x,先求出函数 e^x 及函数 $\sin x$ 的值,然后再对这两个函数值作相应的四则运算.一般地,设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 D 上有定义,则规定它们的四则运算由赋值运算与实数的四则运算共同构成.

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)=\sqrt{u}$,$u=\varphi(x)=x^2+1$.若把 y 表示成 x 的函数,用代入法可得 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2+1$ 的复合而成的复合函数

$$y=\sqrt{x^2+1}$$

一般地可给出下面的定义:

定义 1.1.2 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,$u=\varphi(x)$ 的值域为 W_2,且 $D_1\cap W_2\neq\varnothing$,称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数,其中 u 叫做中间变量.

例 1.1.3 设 $f(x)=\ln x$,$g(x)=\sqrt{x}$,求复合函数 $f(g(x))$ 及 $g(f(x))$.

解 $f(g(x))=\ln g(x)=\ln\sqrt{x}=2^{-1}\ln x$,它的定义域为 $x>0$;$g(f(x))=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\ln x}$,它的定义域为 $x\geqslant 1$.

求复合函数时,复合顺序是一个重要因素.上例表明:$f(g(x))$ 与 $g(f(x))$ 通常是两个不同的函数.

并不是任何两个函数 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$ 都可以复合成一个函数,只有当内层函数 $u=\varphi(x)$ 的值域与外层函数 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空时,两个函数才可以复合成一个新函数,否则便不能复合.例如 $y=\sqrt{u^2-2}$,$u=\sin x$ 就不能复合.

同样地,可以讨论多个函数的复合函数.例如,函数 $y=f(u)$,$u=\varphi(v)$,$v=\psi(x)$ 的复合函数 $y=f[\varphi(\psi(x))]$.反过来,也可以将一个复杂的函数分解成一些简单函数的复合.所谓简单函数就是复合的每个层次都应是基本初等函数或常数与自变量的基本初等函数的四则运算式.

例 1.1.4 将函数 $y=e^{\cos(3x+1)}$ 分解成简单函数的复合,并求其定义域.

解 $y=e^{\cos(3x+1)}$ 可由 $y=e^u$,$u=\cos v$,$v=3x+1$ 复合而成,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

3. 反函数

在研究函数关系时,自变量与因变量的划分不是绝对的,从不同的角度看同一变化过程,自变量和因变量有可能会相互转换,这就引出了反函数的概念.

定义 1.1.3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W.如果对于 W 中的每一个 y 值,可由 $y=f(x)$ 确定 D 中唯一的 x 值与之对应,则得到一个定义在 W 上的以 y 为自变量,x 为因变量的函数,称它为 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,并称 $y=f(x)$ 为直接函数.习惯上自变量用 x 表示,因变量用 y 表示,于是,将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 通常写作 y

$=f^{-1}(x)$.

例如，函数 $f(x)=x$ 的反函数为 $f^{-1}(y)=y$；而函数 $f(x)=x^3$ 的反函数为 $f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$.

在同一直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1.1.5).

例 1.1.5　求 $y=x^3+4$ 的反函数.

解　由 $y=x^3+4$ 可解得 $x=\sqrt[3]{y-4}$，交换 x 和 y 的位置，得 $y=\sqrt[3]{x-4}$，于是 $y=x^3+4$ 的反函数为 $y=\sqrt[3]{x-4}$，其定义域为全体实数.

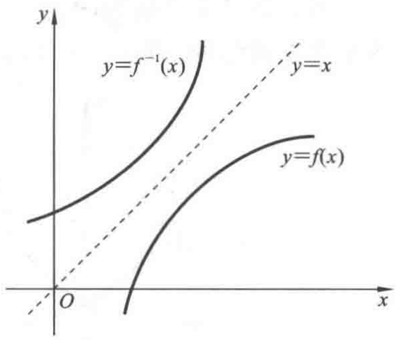

图 1.1.5

1.1.6　基本初等函数

1. 幂函数

形如

$$y=x^{\alpha}\quad(\alpha\text{ 为实数})$$

的函数称为幂函数.

幂函数的定义域与性质随 α 的不同而不同，但在 $(0,+\infty)$ 内总有定义，它的图形过点 $(1,1)$. 若 $\alpha>0$，则函数在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的；若 $\alpha<0$，则函数在 $(0,+\infty)$ 内是单调减少的(图 1.1.6).

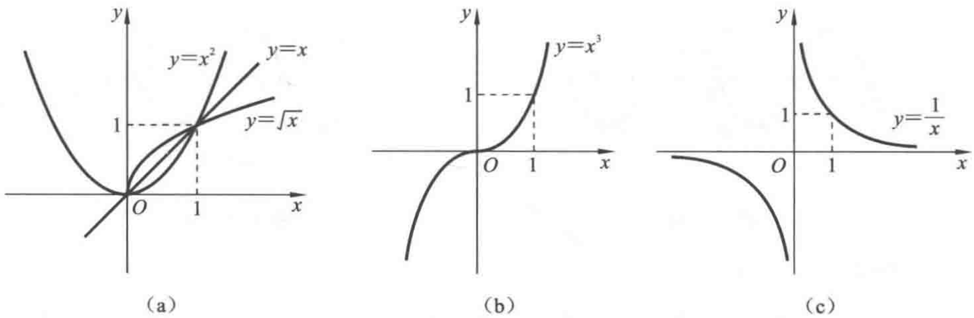

图 1.1.6

2. 指数函数

形如

$$y=a^x\quad(a>0,a\neq1)$$

的函数称为指数函数.

指数函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，图形在 x 轴上方，且通过点 $(0,1)$. 当 $a>1$ 时，函数在定义域内是单调增加的；当 $0<a<1$ 时，函数在定义域内是单调减少的(图 1.1.7).

3. 对数函数

形如

$$y=\log_a x\quad(a>0,a\neq1)$$

的函数称为对数函数.

对数函数的定义域为$(0,+\infty)$，图形在 y 轴右侧，且通过点$(1,0)$. 当 $a>1$ 时，函数在定义域内是单调增加的；当 $0<a<1$ 时，函数在定义域内是单调减少的(图 1.1.8).

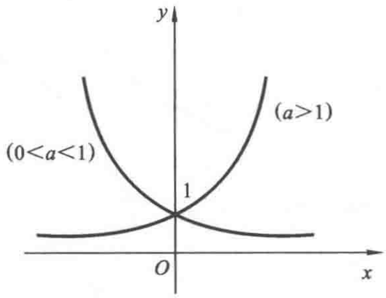

图 1.1.7

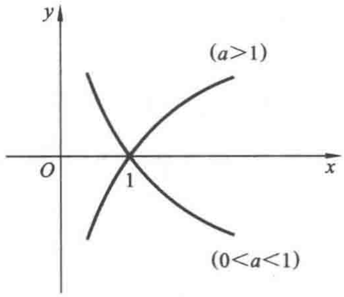

图 1.1.8

4. 三角函数

(1) 正弦函数 $y=\sin x$

正弦函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$. 在$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$内，函数是单调增加的；在$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$内，函数是单调减少的(图 1.1.9).

(2) 余弦函数 $y=\cos x$

余弦函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$. 在$((2k-1)\pi,2k\pi)(k\in\mathbf{Z})$内，函数是单调增加的；在$(2k\pi,(2k+1)\pi)(k\in\mathbf{Z})$内，函数是单调减少的(图 1.1.10).

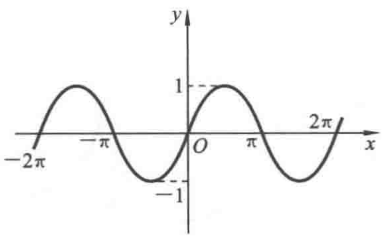

图 1.1.9

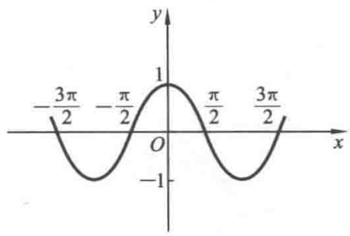

图 1.1.10

(3) 正切函数 $y=\tan x$

正切函数的定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为$(-\infty,+\infty)$. 在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$(k\in\mathbf{Z})$内，函数是单调增加的(图 1.1.11).

(4) 余切函数 $y=\cot x$

余切函数的定义域为$\{x\,|\,x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，值域为$(-\infty,+\infty)$. 在$(k\pi,(k+1)\pi)(k\in\mathbf{Z})$内，函数是单调减少的(图 1.1.12).

5. 反三角函数

(1) 反正弦函数 $y=\arcsin x$

正弦函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内的反函数是不存在的，但它在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上是单调增加的，反函数存在，我们把这个反函数称为反正弦函数，记作 $y=\arcsin x$，它的定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$(图 1.1.13).

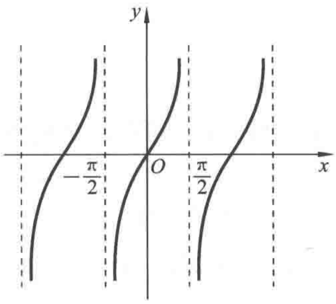

图 1.1.11

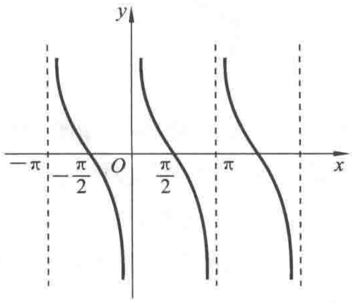

图 1.1.12

(2) 反余弦函数 $y=\arccos x$

余弦函数 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上是单调减少的，反函数存在，我们把这个反函数称为反余弦函数，记作 $y=\arccos x$，它的定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$(图 1.1.14).

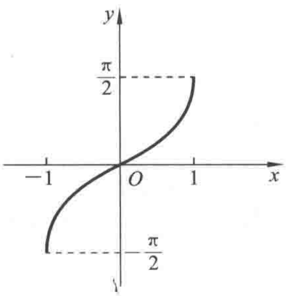

图 1.1.13

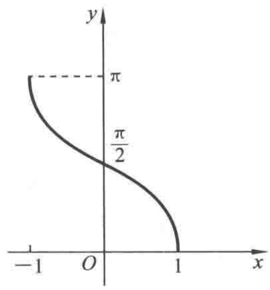

图 1.1.14

(3) 反正切函数 $y=\arctan x$

正切函数 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内是单调增加的，反函数存在，我们把这个反函数称为反正切函数，记作 $y=\arctan x$，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$(图 1.1.15).

(4) 反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$

余切函数 $y=\cot x$ 在$(0,\pi)$内是单调减少的，反函数存在，我们把这个反函数称为反余切函数，记作 $y=\operatorname{arccot} x$，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$(图 1.1.16).

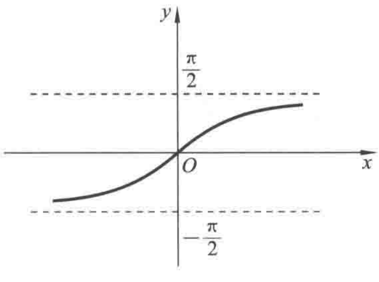

图 1.1.15

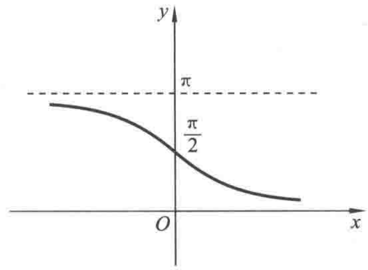

图 1.1.16

通常把以上的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数称为基本初等函数.