"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

数学模型

（第五版）

姜启源　谢金星　叶　俊　编

高等教育出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

数学模型

Shuxue Moxing

(第五版)

姜启源　谢金星　叶　俊　编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书第一版至第四版分别出版于1987年、1993年、2003年和2011年。基于编者长期从事数学建模和数学实验教学、数学建模竞赛组织和辅导,始终关注国内外数学建模教学案例收集与研究的经验,第五版在保持前四版基本结构和风格的基础上,进行增删与修订,新增和改编的案例生动新颖、内涵丰富,接近案例总数的一半。全书纸质内容与数字化资源一体设计、紧密配合,数字课程包括案例精讲、基础知识、拓展阅读、更多案例、程序文件、数据文件等教学资源,在提升课程教学效果的同时,为学生学习提供了更广的思维与探索空间,便于学生自主学习。

本书可作为高等学校各专业学生学习数学建模课程的教材和参加数学建模竞赛的辅导材料,也可供科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学模型/姜启源,谢金星,叶俊编. --5版. --北京:高等教育出版社,2018.5
ISBN 978-7-04-049222-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①姜… ②谢… ③叶… Ⅲ.①数学模型 Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第003860号

策划编辑 李艳馥 李晓鹏　责任编辑 李晓鹏　封面设计 王 鹏　版式设计 范晓红
插图绘制 杜晓丹　责任校对 刘丽娴　责任印制 耿 轩

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	北京鑫海金澳胶印有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787 mm×1092 mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	26	版　次	1987年4月第1版
字　数	590千字		2018年5月第5版
购书热线	010-58581118	印　次	2018年5月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	56.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 49222-00

数学模型

（第五版）

姜启源

谢金星

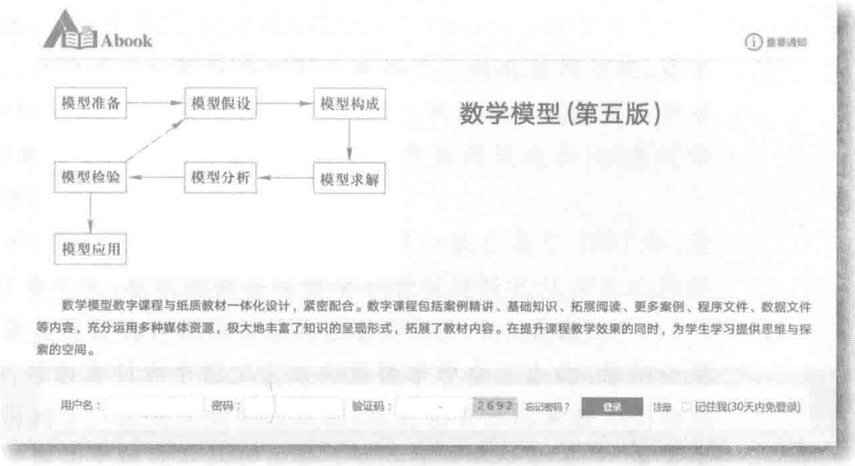
叶　俊

1 计算机访问http://abook.hep.com.cn/1239629，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。

2 注册并登录，进入“我的课程”。

3 输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。

4 单击“进入课程”按钮，开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

李大潜院士谈建模

案例精讲

更多案例

拓展阅读

http://abook.hep.com.cn/1239629

第五版前言

半个多世纪以来,由于数学科学与计算机技术的紧密结合,形成了一种普遍的、可以实现的关键技术——数学技术,成为当代高新技术的一个重要组成部分和突出标志,"高技术本质上是一种数学技术"的提法,已经得到越来越多人们的认同,建模与算法正在成为数学这门基础学科从科学向技术转化的主要途径。与此同时,时代发展和科技进步的大潮推动数学科学迅速进入了经济、人口、生物、医学、环境、地质等领域,一些交叉学科如计量经济学、人口控制论、生物数学、数学地质学等应运而生,为数学建模开拓了许多新的、广阔的用武之地。

将数学建模引入大学教育,为数学和外部世界的联系提供了一种有效的方式,让学生能亲自参加将数学用于实际的尝试,参与发现和创造的过程,取得在传统课堂里和书本上无法获得的宝贵经验和切身感受,在知识、能力及素质等方面迅速成长,这是近年来规模最大、最成功的一项数学教学改革实践。

数学建模课程于 20 世纪 80 年代初进入我国大学,本书第一版出版于 1987 年,是我国第一本数学建模教材。30 多年来,数学建模课程教学和教材建设已从星星之火迅速发展成燎原之势,这期间起着重要影响和推动作用的主要有以下几个方面:

1. 1992 年开始由教育部高等教育司和中国工业与应用数学学会主办的、每年一届的全国大学生数学建模竞赛,得到了广大同学的热烈欢迎,以及教育部门和教师们的热情关心和支持,成为我国高校规模最大的课外科技活动。在全国竞赛的推动下,许多学校、地区也纷纷组织竞赛,举办各种形式的课外活动。竞赛促进了数学建模教学的开展,教学又扩大了受益面,为竞赛奠定了坚实的基础。

2. 数学建模教学和竞赛的开展,对数学教学体系、内容和方法改革起了积极的推动作用,得到众多教育界人士和教师们的认可。将数学建模的思想和方法有机地融入大学数学主干课程中去的研究与实践已经起步,讲授数学建模课和数学主干课教师之间的不断交流,使得在教学上得以相互借鉴与促进。

3. 计算机技术及数学软件的飞速发展和普及,为改善、丰富数学建模课程的内容提供了良好的外部条件。以计算机为教学工具的数学实验课程的开设,对数学建模的教学内容和方法既有很大启示,也提出了新的挑战。

4. 信息技术在课堂教学中的广泛应用,给传统的教学模式带来了一场革命,也为改进、丰富数学建模课程的教师授课方式和学生学习方式提供了新的平台。

本书编者长期从事数学建模和数学实验教学、数学建模竞赛组织和辅导,并经常关注国内外数学建模教学案例的收集与研究,在保持前四版基本结构和风格的基础上,第五版充分考虑学生学习方式改变的新趋势,与数字化资源进行有机结合,以"纸质教材+数字课程"的方式,对教材的内容和形式进行重新设计,进行了以下几项较大的增补、修订与删减:

1. 案例研究是数学建模教学的主要形式,精心选取并适时更新一些生动新颖、内

涵丰富的案例，才能吸引学生浓厚的学习兴趣，有效地培养学生数学建模的意识、方法和能力，是建设数学建模教材的关键。第五版增加了 33 个新案例（包括 8 个融入案例的全国大学生数学建模竞赛赛题），改编了 7 个老案例，合计接近全书案例总数 89 个的一半。

2. 为保持全书的容量基本不变，删减了第四版的 29 个案例（其中 7 个案例删减了部分内容），全部放入数字课程的“更多案例”中。与此相配合，撤销第四版第 7 章稳定性模型，将其中 3 个案例分别放入第五版第 5、第 6 章，撤销第四版第 12 章马氏链模型，将其中 2 个案例放入第五版第 8 章，撤销第四版第 13 章动态优化模型，将其中 1 个案例放入第五版第 5 章。

3. 学习数学建模既要阅读、消化别人做的模型，更要自己动手、做一些实际的练习。第五版对习题进行了相应的增减与修订，并分为复习题与训练题两部分。前者放在每一个案例（节）的后面，供该案例复习所用；后者放在每一类型案例（章）的后面，供这类案例的训练所用。习题参考解答也作了相应的修订，将另行出版。

4. 作为纸质教材内容的拓展和补充，数字课程包括案例精讲、基础知识、拓展阅读、更多案例、程序文件和数据文件等教学资源，在正文中用 标出。其中，案例精讲共 10 篇，为相关教学案例的视频讲授；基础知识共 10 篇，是学习本书一些案例所用到的数学原理、方法的简单介绍；拓展阅读共 10 篇，是对书中相关案例的进一步研究；更多案例共 29 篇，全部来自本书第四版被删减的内容；程序文件和数据文件为案例和习题中求解模型用到的部分计算程序及过于庞大的原始数据。数字课程的内容将定期进行调整和补充。

本书第 4 章、7.8 节及 10.1 至 10.4 节由谢金星编写，9.2 至 9.7 节由叶俊编写，其余各章节由姜启源编写，全书由姜启源统稿。

萧树铁先生 1983 年在清华大学首次为本科生讲授数学模型课，接着在 20 世纪 80 年代中期他先后主持召开了两次数学建模教学、教材研讨会，主持举办了 3 届教师培训班，培养了我国最早一批数学建模骨干教师，是我国数学模型课程的开拓者和奠基人。萧先生直接筹划了本书第一版的出版，并为第一、二、三、四版作序。萧树铁先生为我国教育事业的发展做出了重大贡献，为了表达对他不幸离世的深切追思和沉痛悼念，这里将萧先生为本书第一版作的序言重新刊出。纵观 30 多年数学建模课程教学、教材建设和竞赛活动发展的历程，我们从这篇序言可以清晰地看到，萧先生在将数学建模引进我国大学课堂的初创时期，就展现出令人敬佩的远见卓识。李大潜院士十分关注数学建模课程建设和竞赛活动，多次就数学建模对推动科技发展和社会进步、促进教育改革的重要意义发表演讲。本次修订，李先生将他在“走近数学——数学建模篇”MOOC 中的一段讲解赠予我们，作为本书数字课程的开篇。在此谨向李大潜院士致以谢意。

我们向在使用本书过程中提出宝贵建议的教师们致谢，向通过学习本书从而喜爱数学建模的同学们致意，希望大家共同努力，为数学建模教学和竞赛活动取得更大成绩继续努力。

编　者

2017 年 9 月

第一版序

第二版序

第三版序

第四版序

近十年来，我国高等理工科学校所设置的应用数学专业(系)在数量上有较大的增长，然而直到现在，在如何培养这个专业学生的问题上，却还没有来得及进行认真的研究。

通过一些传统的数学基础课对应用数学专业的学生进行比较严格的数学训练仍然是重要的。但如果要把他们培养成为“会应用”的应用数学工作者，似乎还应该在另外一些方面使他们得到训练。例如，第一，面对一个不太复杂的现象，经过一番初步分析后，能较快地抓住问题的主要方面；可以名之为洞察力。第二，能从两个表面看上去没有多少联系的现象中找出共同点而加以类比；这是一种想象力。在传统的大学数学基础课里面，并非没有对这些方面的要求，然而似乎还没有哪一门课程把进行这类训练作为自己的主要任务，只是近年来国外出现的“数学模型”一课也许不在此列。

为了在这方面进行探索，1982 年秋天我们(姜启源、谭泽光、葛玉安和我)组织了一个“数学模型”讨论班，围绕 E. A. Bender 的书：“*An Introduction to Mathematical Modeling*”，搜集资料，进行分析讨论。1983 年春和暑假中，我分别为清华应用数学系三、四年级和大连的“数学模型讲习班”试讲了“数学模型”课。此后国内有些应用数学系也开设了这门课，其中姜启源同志在清华应用数学系讲了两次。他在讲授中又补充了一些新的材料，尤其是他花了很大的功夫把讲的这些材料以学生较易接受的形式编成讲义，成了这本书的基础。

要培养学生的洞察力和想象力，靠一本教科书当然是不够的，至少还需通过教师根据不同的背景和学生的实际情况来灵活运用书中的内容。因此，在多种不同风格的教材出现以前，一本教材的弹性是不可少的。编者在这方面也作了不少的努力，其中包括选了一批有趣的习题。它们除了可供学生动手练习(这是学习这门课必不可少的环节)以外，有一些也可以作为讲授或讨论的内容。

姜启源同志的这本书是一个很有益的尝试，希望通过它的出版，能促使更多这方面不同风格的教材出现。

萧树铁

1986 年 6 月于清华园

目　　录

第1章 建立数学模型

随着科学技术的迅速发展，**数学模型**这个词汇越来越多地出现在现代人的生产、工作和社会活动中.电气工程师必须建立所要控制的生产过程的数学模型，用这个模型对控制装置做出相应的设计和计算，才能实现有效的过程控制.气象工作者为了得到准确的天气预报，一刻也离不开根据气象站、气象卫星汇集的气压、雨量、风速等资料建立的数学模型.生理医学专家有了药物浓度在人体内随时间和空间变化的数学模型，就可以分析药物的疗效，有效地指导临床用药.城市规划工作者需要建立一个包括人口、经济、交通、环境等大系统的数学模型，为领导层对城市发展规划的决策提供科学根据.厂长经理们要是能够根据产品的需求状况、生产条件和成本、贮存费用等信息，筹划出一个合理安排生产和销售的数学模型，一定可以获得更大的经济效益.就是在日常活动如访友、采购当中，人们也会谈论找一个数学模型，优化一下出行的路线.对于广大的科学技术人员和应用数学工作者来说，建立数学模型是沟通摆在面前的实际问题与他们掌握的数学工具之间联系的一座必不可少的桥梁.

本章作为全书的导言和数学模型的概述，主要讨论建立数学模型的意义、方法和步骤，给读者以建立数学模型的全面的、初步的了解.1.1 节介绍现实对象和它的模型的关系，给出一些模型形式，说明什么是数学模型；1.2 节阐述建立数学模型的重要意义；1.3~1.5 节通过几个示例说明用数学语言和数学方法表述和解决实际问题，即建立数学模型的过程；1.6 节阐述建立数学模型的一般方法和步骤；1.7 节介绍数学模型的特点及数学模型的分类；1.8 节给出一些怎样学习数学建模的建议，并对正在蓬勃发展的大学生数学建模竞赛及如何参加竞赛作简要介绍.

1.1 从现实对象到数学模型

什么是数学建模

人类生活在丰富多彩、变化万千的现实世界里，无时无刻不在运用智慧和力量去认识、利用、改造这个世界，从而不断地创造出日新月异、五彩缤纷的物质文明和精神文明.博览会常常是集中展示这些成果的场所之一，那些五光十色、精美绝伦的展品给我们留下了深刻的印象.工业博览会上，豪华、舒适的新型汽车叫人赞叹不已；农业博览会上，硕大、娇艳的各种水果令人流连忘返；科技展览厅里，港珠澳大桥模型雄伟壮观，长征系列运载火箭模型高高耸立，清晰的数字和图表显示着电力工业的迅速发展，和整面墙壁一样大的地图上鲜明地标出了新建的高速铁路和新辟的航线，核电站工程的彩色巨照前，手持原子结构模型的讲解员深入浅出地介绍反应堆的运行机理；体验厅里，智能机器人通过语音识别、触摸交互、移动互联，帮助人们完成各种生活服务活动；“数字故宫”让珍贵文物随着手指滑动屏幕，从沉睡中活了过来，实现 360 度全视角展示.

参观博览会，像汽车、水果那些原封不动地从现实世界搬到展厅里的物品固然给人以亲切真实的感受，可是从开阔眼界、丰富知识的角度看，火箭、电站、大桥、铁路……这些在现实世界被人们认识、建造、控制的对象，以它们的各种形式的模型——实物模型、

照片、视频、图表、程序……汇集在人们面前，这些模型在短短几小时里所起的作用，恐怕是置身现实世界多少天也无法做到的.

与形形色色的模型相对应，它们在现实世界里的原始参照物通称为原型.本节先讨论原型和模型，特别是和数学模型的关系，再介绍数学模型的意义.

原型和模型 原型（prototype）和模型（model）是一对对偶体.原型指人们在现实世界里关心、研究或者从事生产、管理的实际对象.在科技领域通常使用系统（system）、过程（process）等词汇，如机械系统、电力系统、生态系统、生命系统、社会经济系统，又如钢铁冶炼过程、导弹飞行过程、化学反应过程、污染扩散过程、生产销售过程、计划决策过程等.本书所述的现实对象、研究对象、实际问题等均指原型.模型则指为了某个特定目的将原型的某一部分信息简缩、提炼而构造的原型替代物.

这里特别强调构造模型的目的性.模型不是原型原封不动的复制品，原型有各个方面和各种层次的特征，而模型只要求反映与某种目的有关的那些方面和层次.一个原型，为了不同的目的可以有许多不同的模型.如放在展厅里的飞机模型应该在外形上逼真，但是不一定会飞.而参加航模竞赛的模型飞机要具有良好的飞行性能，在外观上不必苛求.至于在飞机设计、试制过程中用到的数学模型和计算机模拟，则只要求在数量规律上真实反映飞机的飞行动态特性，毫不涉及飞机的实体.所以模型的基本特征是由构造模型的目的决定的.

我们已经看到模型有各种形式.按照模型替代原型的方式来分类，模型可以分为**物质模型（形象模型）**和**理想模型（抽象模型）**.前者包括直观模型、物理模型等，后者包括思维模型、符号模型、数学模型等.

直观模型 指那些供展览用的实物模型，以及玩具、照片等，通常是把原型的尺寸按比例缩小或放大，主要追求外观上的逼真.这类模型的效果是一目了然的.

物理模型 主要指科技工作者为了一定目的根据相似原理构造的模型，它不仅可以显示原型的外形或某些特征，而且可以用来进行模拟实验，间接地研究原型的某些规律.如波浪水箱中的舰艇模型用来模拟波浪冲击下舰艇的航行性能，风洞中的飞机模型用来试验飞机在气流中的空气动力学特性.有些现象直接用原型研究非常困难，更可借助于这类模型，如地震模拟装置、核爆炸反应模拟设备等.应注意验证原型与模型间的相似关系，以确定模拟实验结果的可靠性.物理模型常可得到实用上很有价值的结果，但也存在成本高、时间长、不灵活等缺点.

思维模型 指通过人们对原型的反复认识，将获取的知识以经验形式直接贮存于人脑中，从而可以根据思维或直觉做出相应的决策.如汽车司机对方向盘的操纵、一些技艺性较强的工种（如钳工）的操作，大体上是靠这类模型进行的.通常说的某些领导者凭经验作决策也是如此.思维模型便于接受，也可以在一定条件下获得满意的结果，但是它往往带有模糊性、片面性、主观性、偶然性等缺点，难以对它的假设条件进行检验，并且不便于人们的相互沟通.

符号模型 是在一些约定或假设下借助于专门的符号、线条等，按一定形式组合起来描述原型.如地图、电路图、化学结构式等，具有简明、方便、目的性强及非量化等特点.

本书要专门讨论的**数学模型**则是由数字、字母或其他数学符号组成的，描述现实对

象数量规律的数学公式、图形或算法.

什么是数学模型 其实你早在学习初等代数的时候就已经碰到过数学模型了.当然其中许多问题是老师为了教会学生知识而人为设置的.譬如你一定解过这样的所谓"航行问题":

甲乙两地相距 750 km,船从甲到乙顺水航行需 30 h,从乙到甲逆水航行需 50 h,问船速、水速各若干?

用 x,y 分别代表船速和水速,可以列出方程

$$(x+y)\cdot 30=750,\quad (x-y)\cdot 50=750$$

实际上,这组方程就是上述航行问题的数学模型.列出方程,原问题已转化为纯粹的数学问题.方程的解 $x=20$ km/h,$y=5$ km/h,最终给出了航行问题的答案.

当然,真正实际问题的数学模型通常要复杂得多,但是建立数学模型的基本内容已经包含在解这个代数应用题的过程中了.那就是:根据建立数学模型的目的和问题的背景做出必要的简化假设(航行中设船速和水速为常数);用字母表示待求的未知量(x,y 代表船速和水速);利用相应的物理或其他规律(匀速运动的距离等于速度乘以时间),列出数学式子(二元一次方程);求出数学上的解答($x=20,y=5$);用这个答案解释原问题(船速和水速分别为 20 km/h 和5 km/h);最后还要用实际现象来验证上述结果.

一般地说,**数学模型**可以描述为,对于现实世界的一个**特定对象**,为了一个**特定目的**,根据特有的**内在规律**,做出一些必要的**简化假设**,运用适当的**数学工具**,得到的一个**数学结构**.

需要指出,本书的重点不在于介绍现实对象的数学模型(mathematical model)是什么样子,而是要讨论建立数学模型(mathematical modelling)的全过程.建立数学模型下面简称为**数学建模**或**建模**.

与数学建模有密切关系的数学模拟,主要指运用数字式计算机的**计算机模拟**(computer simulation).它根据实际系统或过程的特性,按照一定的数学规律用计算机程序语言模拟实际运行状况,并依据大量模拟结果对系统或过程进行定量分析.例如通过各种工件在不同机器上按一定工艺顺序加工的模拟,能够识别生产过程中的瓶颈环节;通过高速公路上交通流的模拟,可以分析车辆在路段上的分布特别是堵塞的状况.与用物理模型的模拟实验相比,计算机模拟有明显的优点:成本低、时间短、重复性高、灵活性强.有人把计算机模拟作为建立数学模型的手段之一,但是数学模型在某种意义下描述了对象内在特性的数量关系,其结果容易推广,特别是得到了解析形式答案时,更易推广.而计算机模拟则完全模仿对象的实际演变过程,难以从得到的数字结果分析对象的内在规律.当然,对于那些因内部机理过于复杂,目前尚难以建立数学模型的实际对象,用计算机模拟获得一些定量结果,可称是解决问题的有效手段.

复习题

怎样解决下面的实际问题,包括需要哪些数据资料,要做些什么观察、试验以及建立什么样的数学模型等[24,35].

(1) 估计一个人体内血液的总量.

（2）为保险公司制定人寿保险金计划（不同年龄的人应缴纳的金额和公司赔偿的金额）.

（3）估计一批日光灯管的寿命.

（4）确定火箭发射至最高点所需的时间.

（5）决定十字路口黄灯亮的时间长度.

（6）为汽车租赁公司制订车辆维修、更新和出租计划.

（7）一高层办公楼有4部电梯，早晨上班时间非常拥挤，试制订合理的运行计划.

1.2 数学建模的重要意义

数学作为一门研究现实世界数量关系和空间形式的科学，在它产生和发展的历史长河中，一直是和人们生活的实际需要密切相关的.作为用数学方法解决实际问题的第一步，数学建模自然有着与数学同样悠久的历史.两千多年以前创立的欧几里得几何，17世纪牛顿发现的万有引力定律，都是科学发展史上数学建模的成功范例.

半个多世纪以来，随着数学以空前的广度和深度向一切领域的渗透，以及电子计算机和信息技术的飞速发展，数学建模越来越受到人们的重视，可以从以下几方面来看数学建模在现实世界中的重要意义.

1）在一般工程技术领域，数学建模仍然大有用武之地.

在以声、光、热、力、电这些物理学科为基础的诸如机械、电机、土木、水利等工程技术领域中，数学建模的普遍性和重要性不言而喻.虽然这里的基本模型大多是已有的，但是由于新技术、新工艺的不断涌现，提出了许多需要用数学方法解决的新问题；高速、大型计算机的飞速发展，使得过去即便有了数学模型也无法求解的课题（如大型水坝的应力计算、中长期天气预报等）迎刃而解；建立在数学模型和计算机模拟基础上的CAD技术，以其快速、经济、方便等优势，很大程度上替代了传统工程设计中的现场实验、物理模拟等手段.

2）在高新技术领域，数学建模几乎是必不可少的工具.

无论是发展互联网通信、航天、微电子、人工智能等高新技术本身，还是将高新技术用于传统工业去创造新工艺、开发新产品，计算机技术支持下的建模和模拟都是经常使用的有效手段.数学建模、数值计算和计算机图形学等相结合形成的计算机软件，已经被固化于产品中，在许多高新技术领域起着核心作用，在临床医疗、无损探测、资源勘探等领域被广泛采用的CT（计算机断层成像）技术就是典型的成功范例.在这个意义上，数学不再仅仅作为一门科学，是许多技术的基础，而且直接走向了技术的前台.国际上一位学者就提出了“高技术本质上是一种数学技术”的观点.

3）数学迅速进入一些新领域，为数学建模开拓了许多新的处女地.

随着数学向诸如经济、人口、生态、地质等所谓非物理领域的渗透，一些交叉学科如计量经济学、人口控制论、数学生态学、数学地质学等应运而生.这里一般地说不存在作为支配关系的物理定律，当用数学方法研究这些领域中的定量关系时，数学建模就成为首要的、关键的步骤和这些学科发展与应用的基础.在这些领域里建立不同类型、不同方法、不同深浅程度的模型的余地相当大，为数学建模提供了广阔的新天地.马克思说过：“**一门科学只有成功地运用数学时，才算达到了完善的地步.**”数学必将大踏步地进

入所有学科,数学建模将迎来蓬勃发展的新时期.

今天,在国民经济和社会活动的以下诸多方面,数学建模都有着非常具体的应用.

分析与设计 例如描述药物浓度在人体内的变化规律以分析药物的疗效;建立跨音速流和激波的数学模型,用数值模拟设计新的飞机翼型.

预报与决策 生产过程中产品质量指标的预报、气象预报、人口预报、经济增长预报,等等,都要有预报模型;使经济效益最大的价格策略、使费用最少的设备维修方案,都是决策模型的例子.

控制与优化 电力、化工生产过程的最优控制、零件设计中的参数优化,要以数学模型为前提.建立大系统控制与优化的数学模型,是迫切需要和十分棘手的课题.

规划与管理 生产计划、资源配置、运输网络规划、水库优化调度,以及排队策略、物流管理等,都可以用数学规划模型解决.

数学建模与计算机技术的关系密不可分.一方面,像新型飞机设计、石油勘探数据处理中数学模型的求解当然离不开巨型计算机,而微型电脑的普及更使数学建模逐步进入人们的日常活动.比如,当一位公司经理根据客户提出的产品数量、质量、交货期等要求,用笔记本电脑与客户进行价格谈判时,您不会怀疑他的电脑中贮存了由公司的各种资源、产品工艺流程及客户需求等数据研制的数学模型——快速报价系统和生产计划系统.另一方面,以数字化为特征的大数据信息正以爆炸之势涌入计算机,去伪存真、归纳整理、分析现象、显示结果……,计算机需要人们给它以思维的能力,这些当然要求助于数学模型.所以把计算机技术与数学建模在知识经济中的作用比喻为如虎添翼,是恰如其分的.

美国国家科学院一位院士总结了将数学科学转化为生产力过程中的成功和失败,得出了"数学是一种关键的、普遍的、可以应用的技术"的结论,认为数学"由研究到工业领域的技术转化,对加强经济竞争力具有重要意义",而"计算和建模重新成为中心课题,它们是数学科学技术转化的主要途径".

复习题

举出两三个实例说明建立数学模型的必要性,包括实际问题的背景,建模目的,需要大体上什么样的模型以及怎样应用这种模型等.

1.3 建模示例之一 包饺子中的数学

不少人认为需要用数学方法解决的基本上是高新技术、科学研究或者生产建设、经济管理中的重大问题,带着一些神秘色彩的数学离人们的日常生活很远.其实,通过数学建模可以分析我们身边的许多现象和问题.为了让数学走进生活,使大家更容易地了解什么是数学建模,本节和下面两节展示日常生活中三个实例的建模过程,并简单介绍数学建模的方法和步骤.

在最平凡不过的包饺子当中还有什么数学问题吗?让我们从一个具体例子说起[70].

通常,你家用 1 kg 面和 1 kg 馅包 100 个饺子.某次,馅做多了而面没有变,为了把馅全包完,问应该让每个饺子小一些,多包几个,还是每个饺子大一些,少包几个? 如果回答是包大饺子,那么如果 100 个饺子能包 1 kg 馅,问 50 个饺子可以包多少馅呢?

问题分析 很多人都会根据“大饺子包的馅多”的直观认识,觉得应该包大饺子.但是这个理由不足以令人信服,因为大饺子虽然包的馅多,但用的面皮也多,这就需要比较馅多和面多二者之间的数量关系.利用数学方法不仅可以确有道理地回答应该包大饺子,而且能够给出数量结果,回答比如“50 个饺子可以包多少馅”的问题.

讨论 有人对饺子数量减少一倍就能多包约 40% 的馅这一结果表示怀疑,认为饺子越大面皮应该越厚,建模中关于面皮厚度不变的假设值得探讨,这是有道理的!(复习题 2)

首先,把包饺子用的馅和面皮与数学概念联系起来,那就是物体的体积和表面积.用 V 和 S 分别表示大饺子馅的体积和面皮面积, v 和 s 分别表示小饺子馅的体积和面皮面积,如果一个大饺子的面皮可以做成 n 个小饺子的面皮,那么我们需要比较的是,V 与 nv 哪个大? 大多少?

模型假设 容易想到,进行比较的前提是所有饺子的面皮一样厚,虽然这不可能严格成立,但却是一个合理的假定.在这个条件下,大饺子和小饺子面皮面积满足

$$S=ns \tag{1}$$

为了能比较不同大小饺子馅的体积,所需要的另一个假设是所有饺子的形状一样,这是又一个既近似又合理的假定.

模型建立 能够把体积和表面积联系起来的是半径.虽然球体的体积和表面积与半径才存在我们熟悉的数量关系,但是对于一般形状的饺子,仍然可以引入所谓“特征半径”R 和 r,使得

$$V=k_1R^3, \quad S=k_2R^2 \tag{2}$$

$$v=k_1r^3, \quad s=k_2r^2 \tag{3}$$

成立.注意:在所有饺子形状一样的条件下,(2)和(3)中的比例系数 k_1 相同、k_2 也相同.

在(2)和(3)中消去 R 和 r,得

$$V=kS^{\frac{3}{2}}, \quad v=ks^{\frac{3}{2}} \tag{4}$$

其中 k 由 k_1 和 k_2 决定,并且两个 k 相同.现在只需在(1)和(4)的 3 个式子中消去 S 和 s,就得到

$$V=n^{\frac{3}{2}}v=\sqrt{n}\,(nv) \tag{5}$$

(5)式就是包饺子问题的数学模型.

小结 回顾整个建模过程,关键的有以下几点:

1. 用数学语言(体积和表面积)表示现实对象(馅和面皮).
2. 做出简化、合理的假设(面皮厚度一样,饺子形状一样).
3. 利用问题蕴含的内在规律(体积、表面积与半径间的几何关系).

实际上,在数学建模中这样几条都是基本的和关键的步骤.

结果解释 模型(5)不仅定性地说明 V 比 nv 大(对于 $n>1$),大饺子比小饺子包的馅多,而且给出了定量结果,即 V 是 nv 的$\sqrt{n}$倍.由此能够回答前面提出的“100 个饺子能包 1 kg 馅,50 个饺子可以包多少馅”的问题,因为饺子数量由 100 变成 50,所以 50 个饺子能包$\sqrt{100/50}=\sqrt{2}$(≈ 1.4) kg 馅.不用数学建模,你想不到这个结果吧.

复习题

1. 利用模型(5)式说明:如果 n_1 个饺子包 m kg 馅,那么 n_2 个饺子能包多少馅? 由此给出本节中$\sqrt{2}$的结果.

2. 将所有饺子面皮一样厚的假设改为饺子越大面皮越厚,并对此给以简化、合理的数学描述,重

新建模，得出 V 与 nv 之间的关系，讨论“饺子数量减少一倍能多包多少馅”与什么因素有关.

1.4 建模示例之二 路障间距的设计

在校园、机关、居民小区的道路中间，常常设置用于限制汽车速度的路障.看到路障你会想到下面这个问题能够用数学解决吗?

路障之间相距太远，起不到限制车速的作用，相距太近又会引起行车的不便，所以应该有一个合适的间距.不妨向设计者提出这样的问题：如果要求限制车速不超过 40 km/h，路障的间距应该是多少?[70]

问题分析 设计者可以设想，当汽车通过一个路障时，速度近乎零，过了路障，司机就会加速，当车速达到 40 km/h 时，让司机因为前面有下一个路障而减速，至路障处车速又近乎零，如此循环，即可达到限速的目的.

按照这种分析，如果认为汽车在两个相邻路障之间一直在作等加速运动和等减速运动，那么只要确定了加速度和减速度这两个数值，根据基本的物理知识，就很容易算出两个相邻路障之间应有的间距.

收集数据 要得到汽车的加速度和减速度，一个办法是查阅资料，通常可以查到：某牌号的汽车在若干秒内(或多远距离内)可以从静止加速到多快，或者某牌号的汽车在若干秒内(或多远距离内)可从多大车速紧急刹车.由这样的数据推算出的是最大加速度和最大减速度，不能直接用于这里的问题.还有资料会给出加速度的一个范围，如从 1 m/s^2 到 10 m/s^2，也不方便使用.

比较实用的方法是进行测试，办法是请驾驶普通牌号汽车的司机在与设计路障的环境相似的道路上，模拟有路障的情况作加速行驶和减速行驶，记录行驶中的车速和对应的时间(需要坐在副驾位置的助手辅助).假定我们已经得到了如表 1、表 2 的数据.

表 1 加速行驶的测试数据

速度/($km \cdot h^{-1}$)	0	10	20	30	40
时间/s	0	1.6	3.0	4.2	5.0

表 2 减速行驶的测试数据

速度/($km \cdot h^{-1}$)	40	30	20	10	0
时间/s	0	2.2	4.0	5.5	6.8

模型假设 汽车通过路障时车速为零，其后作等加速运动，当车速达到限速时立即作等减速运动，到达下一个路障时车速为零.

模型建立 记汽车加速行驶的距离为 s_1，时间为 t_1，加速度为 a_1，减速行驶的距离为 s_2，时间为 t_2，减速度为 a_2，限速为 v_{max}.根据熟知的物理定律有

$$s_1=\frac{1}{2}a_1t_1^2, \quad s_2=\frac{1}{2}a_2t_2^2 \tag{1}$$

$$v_{max}=a_1t_1, \quad v_{max}=a_2t_2 \tag{2}$$