卓越工程师教育培养计划配套教材

工程基础系列

概率论与数理统计

（第2版）



许伯生　刘春燕　主编

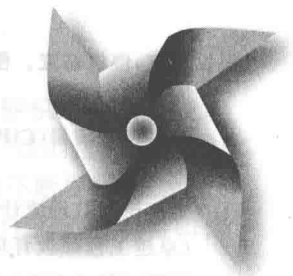
张子厚　主审

清华大学出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

卓越工程师教育培养计划配套教材

工程基础系列



概率论与数理统计

（第2版）

许伯生　刘春燕　主编

刘瑞娟　肖翔　朱萌　洪银萍　周宇　参编

清华大学出版社

北京

内 容 简 介

本书是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会颁布的《本科数学基础课程教学基本要求》和“卓越工程师教育培养计划”的要求而编写的. 主要内容包括：随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析.

本书可作为“卓越工程师教育培养计划”试点工科类各专业“概率论与数理统计”课程的教材，也可作为普通高等学校工科类各专业“概率论与数理统计”课程的教材. 对有关专业技术人员，本书也有一定的参考价值.

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989　13701121933

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/许伯生，刘春燕主编. —2 版. —北京：清华大学出版社，2018
(卓越工程师教育培养计划配套教材. 工程基础系列)
ISBN 978-7-302-50746-8

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①许… ②刘… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材 ②数理统计－高等学校－教材
Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 172072 号

责任编辑：冯　昕　赵从棉
封面设计：常雪影
责任校对：刘玉霞
责任印制：董　瑾

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：14.25　　**字　　数**：345 千字
版　　次：2014 年 6 月第 1 版　2018 年 8 月第 2 版　　**印　　次**：2018 年 8 月第1次印刷
定　　价：35.00 元

产品编号：080168-01

FOREWORD

第2版前言



概率论与数理统计作为现代数学的重要分支，是用定量的方法研究随机现象内在规律性的重要工具，在自然科学、社会科学和工程技术的各个领域都有极其广泛的应用. 随着科学技术的发展、计算机的普及应用及各类研究的不断深入，数理统计方法不断发展，在金融、保险、生物、医学、经济、管理和工程技术等领域得到了广泛的应用，成为许多前沿学科如信息论、控制论、人工智能等的基础.

“卓越工程师教育培养计划”(简称“卓越计划”)是贯彻落实《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020 年)》和《国家中长期人才发展规划纲要(2010—2020 年)》的重大改革项目，是促进我国由工程教育大国迈向工程教育强国的重大举措. 该计划的目的就是培养造就一大批具有创新能力并能适应经济社会发展需要的高质量的工程技术人才，为国家走新型工业化道路、建设创新型国家和人才强国战略服务.

本书参照教育部基础课程教学指导分委员会最新的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，结合我校“卓越计划”专业特点和“卓越计划”要求编写，系统介绍概率论与数理统计的基本概念、基本理论和基本方法. 所选的例题大都紧密结合生活和工程实际，突出应用背景. 希望通过本书能培养学生的基本运算能力，增强学生分析和解决实际遇到的各种随机性问题的能力，进一步激发学生学习本课程的兴趣. 本书清晰易懂，易于入门，便于教师教学和学生自学.

本书共分为 9 章，主要内容包括：随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析. 书中配备了较多带有应用性的例题和习题，并在讲解例题时指出所需注意事项. 书后附有参考答案.

本书由张子厚、许伯生和刘春燕策划并组织编写，张子厚主审，许伯生负责统稿、定稿. 参加编写的人员有：第 1 章，周宇；第 2 章，洪银萍；第 3 章、第 4 章，刘春燕；第 5 章、第 6 章，许伯生；第 7 章，刘瑞娟；第 8 章，朱萌；第 9 章，肖翔.

本书是上海工程技术大学教材建设项目“卓越工程师系列：概率论与数理统计”的成果之一，在编写过程中得到了上海工程技术大学教务处、数理与统计学院和数学教学部的大力支持，刘福窑教授和李路、江开忠副教授对本书的编写提出了宝贵的指导性意见，在此一并表示感谢.

由于编者水平有限，书中错误和不妥之处在所难免，诚恳希望广大读者批评指正.

编　者

2018 年 6 月

FOREWORD

第1版前言



“概率论与数理统计”是数学学科的一个别具特色且应用十分广泛的分支.它有自己独特的概念和方法,与自然和社会现象紧密相连;它与其他学科有紧密的联系,是近代数学的重要组成部分.随着科学技术的发展,需要对随机现象进行认识,数理统计方法越来越广泛地被人们所采用,成为许多前沿学科如信息论、控制论、人工智能等的基础.

“卓越工程师教育培养计划”(简称“卓越计划”)是贯彻落实《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》和《国家中长期人才发展规划纲要(2010—2020年)》的重大改革项目,是促进我国由工程教育大国迈向工程教育强国的重大举措.该计划的目的就是培养造就一大批具有创新能力并能适应经济社会发展需要的高质量的工程技术人才,为国家走新型工业化道路、建设创新型国家和人才强国战略服务.

本书按照我校“卓越计划”专业特点和“卓越计划”要求编写,系统介绍概率论与数理统计的基本概念、基本理论和基本方法,注意培养学生的基本运算能力、分析问题和解决问题的能力,突出应用背景,注重实用性和应用性,循序渐进,清晰易懂,便于教学和学生自学.

本书共分9章,主要内容包括:概率论基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析.另外,配备了较多带有应用性的例题和习题,并在讲解例题时指出所需注意事项.书后附有参考答案.

本书由许伯生和张颖策划并组织编写,许伯生负责统稿、定稿.参加编写的人员有:第1章周雷;第2章李鸿燕;第3章李铭明;第4章滕晓燕;第5章张颖;第6章许伯生;第7章刘瑞娟;第8章王宝存;第9章肖翔.

本书是上海工程技术大学教材建设项目“卓越工程师系列:概率论与数理统计”的成果之一,在编写过程中得到了上海工程技术大学教务处、基础教学学院和数学教学部的大力支持,张子厚教授和李路、江开忠副教授对本书的编写提出了指导性的意见,在此一并表示感谢.

由于编者水平有限,书中难免有错误和不妥之处,欢迎广大读者批评指正.

编　者

2014年6月

需要全本请访问 www.ertongbook.com

CONTENTS

目录



第 1 章　随机事件与概率 …… 1

1.1　基本概念 …… 1

1.1.1　随机现象与随机试验 …… 1

1.1.2　随机事件 …… 2

习题 1-1 …… 5

1.2　频率与概率 …… 5

1.2.1　频率 …… 5

1.2.2　概率 …… 6

习题 1-2 …… 9

1.3　等可能概型 …… 9

1.3.1　古典概型 …… 10

1.3.2　几何概型 …… 12

习题 1-3 …… 13

1.4　条件概率与全概率公式 …… 14

1.4.1　条件概率的概念及计算 …… 14

1.4.2　乘法公式、全概率公式及贝叶斯公式 …… 15

习题 1-4 …… 19

1.5　事件的独立性　伯努利概型 …… 20

1.5.1　事件的独立性 …… 20

1.5.2　伯努利概型 …… 22

习题 1-5 …… 23

第 2 章　随机变量及其分布 …… 24

2.1　随机变量 …… 24

习题 2-1 …… 25

2.2　离散型随机变量的概率分布 …… 25

2.2.1　离散型随机变量的分布律 …… 25

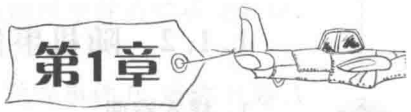
2.2.2　三种常见的离散型随机变量 …… 26

习题 2-2 …… 29

2.3 随机变量的分布函数 …… 30
习题 2-3 …… 32
2.4 连续型随机变量的概率分布 …… 33
2.4.1 连续型随机变量及其概率密度 …… 33
2.4.2 三种常见的连续型随机变量的概率分布 …… 36
习题 2-4 …… 41
2.5 随机变量函数的分布 …… 41
2.5.1 离散型随机变量函数的分布 …… 42
2.5.2 连续型随机变量函数的分布 …… 42
习题 2-5 …… 45
第 3 章 多维随机变量及其分布 …… 46
3.1 二维随机变量及其分布 …… 46
3.1.1 二维随机变量及其分布函数 …… 46
3.1.2 二维离散型随机变量及其分布 …… 48
3.1.3 二维连续型随机变量及其分布 …… 49
习题 3-1 …… 52
3.2 边缘分布 …… 52
3.2.1 二维离散型随机变量的边缘分布 …… 53
3.2.2 二维连续型随机变量的边缘分布 …… 54
习题 3-2 …… 56
3.3 条件分布 …… 57
3.3.1 二维离散型随机变量的条件分布 …… 57
3.3.2 二维连续型随机变量的条件分布 …… 59
习题 3-3 …… 61
3.4 随机变量的独立性 …… 62
习题 3-4 …… 65
3.5 二维随机变量的函数的分布 …… 65
3.5.1 二维离散型随机变量的函数的分布 …… 66
3.5.2 二维连续型随机变量的函数的分布 …… 67
习题 3-5 …… 72
第 4 章 随机变量的数字特征 …… 73
4.1 随机变量的数学期望 …… 73
4.1.1 离散型随机变量的数学期望 …… 73
4.1.2 连续型随机变量的数学期望 …… 75
4.1.3 随机变量函数的数学期望 …… 76
4.1.4 数学期望的性质 …… 78
习题 4-1 …… 80
4.2 随机变量的方差 …… 81
4.2.1 方差的定义及计算公式 …… 81

4.2.2 方差的性质 …… 83
4.2.3 切比雪夫不等式 …… 86
习题 4-2 …… 87
4.3 协方差和相关系数 …… 88
4.3.1 协方差 …… 88
4.3.2 相关系数 …… 88
习题 4-3 …… 90
4.4 矩 协方差矩阵 …… 91
第 5 章 大数定律与中心极限定理 …… 93
5.1 大数定律 …… 93
5.2 中心极限定理 …… 96
习题 5-2 …… 99
第 6 章 数理统计的基本概念 …… 100
6.1 总体与样本 …… 100
6.1.1 总体与个体 …… 100
6.1.2 样本 …… 101
习题 6-1 …… 104
6.2 统计量与抽样分布 …… 104
6.2.1 统计量 …… 104
6.2.2 统计学中三个常用分布和上 α 分位点 …… 106
6.2.3 抽样分布定理 …… 109
习题 6-2 …… 112
附录 直方图 …… 114
第 7 章 参数估计 …… 117
7.1 参数估计的意义和种类 …… 117
7.1.1 参数估计问题 …… 117
7.1.2 未知参数的估计量和估计值 …… 117
7.1.3 参数估计的种类 …… 118
7.2 点估计的求法 …… 118
7.2.1 矩估计法 …… 118
7.2.2 极大似然估计法 …… 120
习题 7-2 …… 123
7.3 评价估计量优良性的标准 …… 124
7.3.1 无偏性 …… 124
7.3.2 有效性 …… 126
7.3.3 一致性(或相合性) …… 128
习题 7-3 …… 129
7.4 参数的区间估计 …… 130
7.4.1 置信区间和置信度 …… 130

7.4.2 单个正态总体均值 μ 和方差 σ^2 的置信区间 …… 130
7.4.3 两个正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间 …… 134
7.4.4 两个正态总体方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间 …… 135
7.4.5 大样本场合下 p 和 μ 的区间估计 …… 137
习题 7-4 …… 139
第 8 章 假设检验 …… 141
8.1 假设检验的基本概念 …… 141
8.1.1 假设检验的问题 …… 141
8.1.2 假设检验的两类错误 …… 143
8.1.3 假设检验的基本步骤 …… 144
习题 8-1 …… 144
8.2 正态总体的假设检验 …… 144
8.2.1 单一正态总体数学期望 μ 的假设检验 …… 144
8.2.2 单一正态总体方差 σ^2 的假设检验 …… 149
8.2.3 两个正态总体数学期望的假设检验 …… 152
8.2.4 两个正态总体方差的假设检验 …… 154
习题 8-2 …… 156
8.3 0-1 分布总体参数 p 的大样本检验 …… 158
习题 8-3 …… 160
8.4 分布函数的拟合优度检验 …… 160
习题 8-4 …… 164
第 9 章 方差分析和回归分析 …… 166
9.1 单因素方差分析 …… 166
9.1.1 单因素方差分析实例 …… 166
9.1.2 单因素方差分析的数学模型 …… 167
9.1.3 部分总体均值 μ_j 和方差 σ^2 的估计 …… 168
9.1.4 单因素方差分析的假设检验 …… 169
9.1.5 当拒绝 H_0 时 $\mu_j-\mu_k$ 的置信区间 …… 172
习题 9-1 …… 175
9.2 一元线性回归 …… 176
9.2.1 一元线性回归的数学模型 …… 177
9.2.2 未知参数 a,b 和 σ^2 的点估计 …… 178
9.2.3 线性相关假设检验 …… 181
9.2.4 预测和控制 …… 184
习题 9-2 …… 185
附录 …… 187
习题答案 …… 206
参考文献 …… 217



随机事件与概率

概率论产生于17世纪，其伴随保险事业的发展而发展. 概率论是一门研究随机现象统计规律性数量关系的数学学科，促使这门学科产生的根源是赌博者所提出的各种输赢概率的问题. 概率论的发展也很大程度上促进了数理统计的发展. 随着时间的推移，概率论与数理统计已渗透到生活中的各个领域. 许多新兴起的应用数学，如信息论、对策论、排队论、控制论等，都是以概率论作为基础的.

本章主要介绍概率论中的基本概念、概率的性质、概率的运算公式、古典概型及伯努利概型等.

1.1 基本概念

1.1.1 随机现象与随机试验

自然现象与社会现象从结果能否预言的角度可分为两大类. 一类现象在发生前能预言结果. 例如，刹车时，由于惯性车体会继续行驶一段距离，抛起重物后会落下等，这一类现象称为**确定性现象**. 另一类现象是不可预言结果的. 例如，抛起一枚硬币观察落地后哪一面向上，一个电子元件的寿命等. 这类现象的结果虽然不能预知，但试验前可能出现的全部结果是知道的，仅进行几次试验看不出规律，但在相同条件下通过大量重复的试验，其结果会呈现某种规律性，这一类现象称为**随机现象**. 随机现象所体现出的这种规律性称为统计规律性，概率论与数理统计就是揭示这种统计规律性的学科.

为了揭示某种随机现象的出现规律而进行的大量重复试验称为**随机试验**，其具有以下特点：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 试验出现多种可能结果，且所有可能出现的结果在试验前能预先知道；

(3) 试验前不能确定会出现哪一个结果.

随机试验简称为试验，通常记作 $E, E_1, E_2, \cdots$. 本书中以后提到的试验都是指随机试验. 例如：

E_1：掷一粒骰子，观察出现的点数.

E_2：抽查一辆汽车百公里时速的刹车距离.

1.1.2 随机事件

1. 样本空间

由于随机试验的所有可能结果在试验前是已知的，可以称随机试验 E 每一个可能出现的结果为**基本事件**，也称为**样本点**，通常用 $e_1, e_2, e_3, \cdots$ 表示. 它们的全体称为**样本空间**，记作 S 或 Ω.

例 1-1-1 掷一枚硬币，观察其朝上一面的情况，则样本空间可表示为

$$S = \{\text{正}, \text{反}\}.$$

例 1-1-2 掷一粒骰子，观察出现的点数，若以“i”表示“掷得 i 点”($i=1,2,\cdots,6$)，则样本空间为

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

例 1-1-3 统计某路口 1h 内通过的车辆数，则样本空间为

$$S = \{0,1,2,3,\cdots\}.$$

例 1-1-4 在一批汽车轮胎中任意抽取一只进行耐久性实验. 若以“t”表示“轮胎连续工作的寿命(单位：h)”，则样本空间为

$$S = \{t \mid t \geqslant 0\}.$$

2. 随机事件

在进行随机试验时，有时关心的往往是带有某些特征的基本事件是否发生. 例如，例 1-1-3 中，研究“1h 内通过的车辆数超过 300 辆”，例 1-1-4 中，研究“轮胎寿命少于 3000h”. 这些都是样本空间的子集，是包含了若干基本事件的复杂事件，它们在试验中发生与否都带有随机性，我们把这种复杂事件称为**随机事件**，简称**事件**. 事件通常用大写字母 A，B，C，$\cdots$ 表示.

在上面的表述中，“1h 内通过的车辆数超过 300 辆”及“轮胎寿命少于 3000h”都是随机事件，可分别用集合表示为

$$A = \{301,302,303,304,\cdots\};$$

$$B = \{t \mid t < 3000\}.$$

在每次试验中，当且仅当试验出现的结果为随机事件中的一个元素时，称这一事件发生. 例如例 1-1-2 中所述的掷骰子，事件 A 表示出现奇数点，当掷到 1 点时，可以说事件 A 发生了.

由于样本空间 S 是它自身的子集，并且包含所有的样本点，每次试验的结果必然出现在 S 中，也即 S 必然发生，因此称 S 为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也是样本空间的子集，所以也作为一个事件，由于它在每次试验中都不发生，因此称为**不可能事件**.

必然事件和不可能事件本身并无不确定性，但为今后讨论方便，我们将它们作为随机事件的极端情形.

3. 事件间的关系与运算

在研究随机试验时，我们发现一个随机试验往往包含很多随机事件，其中有些比较简

需要全本请访问 www.ertongbook.com

单，有些比较复杂. 为了通过较简单的随机事件来揭示较为复杂的随机事件的性质及规律，需要研究随机试验的各随机事件之间的关系及运算.

(1) **包含**　若事件 B 的发生必导致事件 A 发生，则称事件 A 包含事件 B，或称 B 是 A 的子事件. 记为 $A \supset B$ 或 $B \subset A$(图 1-1).

例如，在例 1-1-2 中，令 A 表示“掷出 2 点”的事件，即 $A=\{2\}$，B 表示“掷出偶数点”的事件，即 $B=\{2,4,6\}$，则 $A \subset B$.

(2) **相等**　如果 $A \subset B$，且 $B \subset A$，则称事件 A 等于事件 B，记为 $A=B$.

例如，在例 1-1-2 中，令 A 表示“掷到偶数点”的事件；B 表示“掷到的点数为 2，4，6 之一”的事件，则显然有 $A=B$.

(3) **和**　称事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件为事件 A 与事件 B 的和事件或并事件，记为 $A \cup B$(图 1-2).

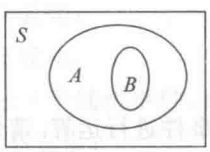


图 1-1　$A \supset B$

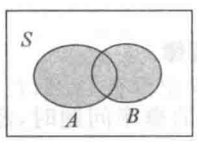


图 1-2　$A \cup B$

例如，某车间甲、乙两台机器加工同样的产品，令 A 表示“甲生产出次品”的事件，B 表示“乙生产出次品”的事件，则 $A \cup B$ 表示“该车间生产出次品”的事件.

两个事件的和可推广到有限个或可列个的情形. 一般用 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 表示 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的和事件；用 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示可列个事件 A_1，A_2，…的和事件.

(4) **积**　称事件 A 与事件 B 同时发生的事件为 A 与 B 的积事件，简称为积，记为 $A \cap B$ 或 AB(图 1-3).

例如，在例 1-1-2 中，令 $A=\{$掷到偶数点$\}$，$B=\{$掷到的点数不超过 3 点$\}$，则 $A \cap B=\{$掷到 2 点$\}$.

类似地，用 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 表示 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的积事件；用 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示可列个事件 A_1，A_2，…的积事件.

(5) **差**　称事件 A 发生但 B 不发生的事件为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$(图 1-4).

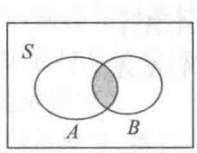


图 1-3　$A \cap B$

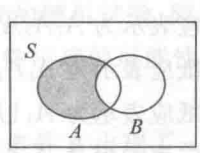


图 1-4　$A-B$

例如，在例 1-1-4 中，令 $A=\{$轮胎寿命大于 2500h$\}$，$B=\{$轮胎寿命大于 2000h$\}$，则 $A-B=\varnothing$，$B-A=\{$轮胎寿命 $2000<t\leqslant 2500\}$.

(6) **互不相容** 若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$(图 1-5)，则称 A 与 B 是互不相容的.

例如，掷骰子时，若 $A=\{1$ 点向上$\}$，$B=\{2$ 点向上$\}$，则 A 与 B 便是互不相容的.

(7) **对立** 称事件 A 不发生的事件为 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$(图 1-6). 显然 $A\cup\overline{A}=S$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$. 例如，从有 3 个次品、7 个正品的 10 个产品中任取 3 个，若令 $A=\{$取得的 3 个产品中至少有一个次品$\}$，则 $\overline{A}=\{$取得的 3 个产品均为正品$\}$.

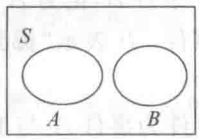


图 1-5 $A\cap B=\varnothing$

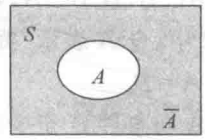


图 1-6 $\overline{A}$

4. 事件的运算规律

在研究随机事件的概率问题时，经常需要对随机事件进行运算. 清楚事件的运算规律对事件的运算有很大帮助，将其整理如下：

(1) **交换律** $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) **结合律** $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) **分配律** $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(4) **对偶律** $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

对偶律可以推广到有限个事件：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i.$$

此外，还有如下一些常用性质：

$$A\cup B\supset A,\quad A\cup B\supset B(\text{越求和越大});$$

$$A\cap B\subset A,\quad A\cap B\subset B(\text{越求积越小}).$$

若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$，$A-B=A-AB=A\overline{B}$ 等.

例 1-1-5 考察居民对三种报纸 A_1，A_2，A_3 的订购情况，设事件 A_1，A_2，A_3 分别表示订购第一种、第二种、第三种报纸，则

只订购第一种和第二种应表示为 $A_1A_2\overline{A}_3$；

订购第一种或第二种应表示为 $A_1\cup A_2$；

只订购一种报纸应表示为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$；

恰好订购两种报纸应表示为 $A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$；

至少订购一种报纸应表示为 $A_1\cup A_2\cup A_3$；

不订购任何报纸应表示为 $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；

至多订购两种可表示为 $\varnothing\cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$，这样表示结果较为复杂，考虑到其对立事件是三种报纸全不订购，所以还可以表示为 $\overline{A_1A_2A_3}$.



习题 1-1

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 一袋中放有 10 个球，其中 5 个红球、5 个白球，从中每次任取一个，取到红球为止，记录取到红球前取到的白球数；

(2) 考虑班级中 30 位同学的生日分布情况.

2. 设某公司参加竞标，令事件 A 表示第一次竞标成功，事件 B 表示第二次竞标成功，试用 A,B 表示下列事件：

(1) 两次竞标成功；

(2) 两次竞标失败；

(3) 恰有一次竞标成功；

(4) 至少一次竞标成功.

3. 设 A,B,C 表示 3 个随机事件，试将下列事件用 A,B,C 表示出来：

(1) B,C 发生，A 不发生；

(2) A,B,C 都发生；

(3) A,B,C 都不发生；

(4) A,B,C 中恰好有两个事件发生；

(5) A,B,C 中至少有一个事件发生；

(6) A,B,C 中至少有两个事件发生；

(7) A,B,C 中至多有一个事件发生；

(8) A,B,C 中至多有两个事件发生.

1.2 频率与概率

在一个随机试验中，人们关心的往往是其中的某种或某些结果发生的可能性有多大. 例如，将来的某天下雨的可能性，某海域将来某天有大风的可能性，等等，知道了这种可能性的大小，对指导人们的生产生活有很大帮助. 这种“可能性”的数字度量就是我们即将叙述的概率. 为了引出概率的定义，先给出频率的定义.

1.2.1 频率

为探寻统计规律性，需在相同条件下进行大量重复的随机试验. 随着试验次数的增加，某随机事件 A 出现的次数与总试验次数的比值跟该事件出现的可能性大小有密切的联系，这个比值就是我们常说的频率.

定义 1-2-1 在相同条件下，进行 n 次重复试验，设事件 A 出现了 n_A 次，则称 n_A 是事件 A 发生的频数，比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 的**频率**，记作 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

由频率的定义易得到以下三个基本性质.

(1) **非负性** $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

(2) **规范性** $f_n(S)=1$;

(3) **有限可加性** 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件,则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k).$$

大量试验证实,随着试验次数增多,某事件发生的频率总具有一定的稳定性,会越来越稳定地在某个客观存在的常数附近波动,这种稳定性即是我们前面提到的统计规律性的一种体现. 下面的例子是一些学者为了验证该结论而进行的抛硬币的试验. 具体数据见表 1-1.

表 1-1

试验者	抛硬币次数 n	正面 A 出现的次数 n_A	正面 A 出现的频率 $f_n(A)$
德·摩尔根	2048	1061	0.5180
蒲丰	4040	2148	0.5069
费勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

1.2.2 概率

一个随机事件的概率就是该随机事件发生可能性大小的数字度量. 但精确地刻画其定义是比较困难的,下面从两个角度来叙述概率的定义.

1. 概率的统计定义

对一个随机事件来说,它的概率可通过它发生的频率来反映,所以频率与概率之间应该存在着某种联系. 一个随机事件的概率是由其自身决定的,和一辆汽车有其重量、一块土地有其面积一样是客观存在的,但是随机事件的频率却会随着试验次数的变化而不同. 从大量的随机试验来看,随着试验次数增加,随机事件的频率会在其概率附近越来越稳定地摆动. 由此,我们给出概率的统计性定义.

定义 1-2-2 在相同条件下,将随机试验重复 n 次,随着随机试验次数 n 的增大,如果随机事件 A 的频率 $f_n(A)$ 越来越稳定地在某一常数 p 附近摆动,则称常数 p 为事件 A 的概率,记作

$$P(A) = p.$$

概率的统计定义只是一种描述性定义,虽然告诉了我们什么是概率,但是还不够严谨,无法具体确定定义中的频率稳定值 p,只能通过加大试验次数,将一系列频率值的平均值作为 p 的近似值. 为了更加准确地描述概率的本质,我们给出下面的公理化定义.

2. 概率的公理化定义(数学定义)

定义 1-2-3 设某随机试验的样本空间为 S,如果对其中每个事件 A,都存在一个实数

$P(A)$，满足下列三条公理：

(1) **非负性**　对于每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) **规范性**　$P(S)=1$；

(3) **可列可加性**　对于任意的无限可列多个两两互不相容的事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，总成立

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots,\quad (1.2.1)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率.

该定义称为概率的**公理化定义**，这三条性质是概率的三个基本属性，是研究概率的基础与出发点. 概率的公理化定义是对概率的统计定义进行科学抽象的结果. 理解概率的定义时，不应该将以上两个定义当作等价的定义进行理解，而是应该将两者结合起来，才能更好地把握住概率的本质.

由概率公理化定义的三个条件，可以得出概率的一些基本性质.

3. 概率的性质

性质 1-2-1　$P(\varnothing)=0$.

性质 1-2-2(有限可加性)　对于 n 个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

证　在式(1.2.1)中，令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，则 $A_1,\cdots,A_n,A_{n+1},\cdots$ 是一组两两互不相容的事件. 由 $P(\varnothing)=0$，便得

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=P\Big(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\Big)\\&=P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)+\sum_{k=n+1}^{\infty}P(\varnothing)\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).\end{aligned}$$

性质 1-2-3　若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

证　因为 $A\subset B$，所以 $B=A\cup(B-A)$(参看图 1-7)，且 $A\cap(B-A)=\varnothing$. 由概率的可加性得

$$P(B)=P(A\cup(B-A))=P(A)+P(B-A),$$

即 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

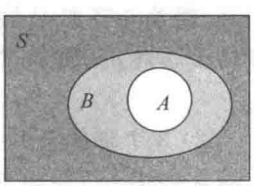


图 1-7　$B=A\cup(B-A)$

特别地，当 $B=S$ 时，得到如下性质.

性质 1-2-4　对任意事件 A，$P(\overline{A})=1-P(A)$.

性质 1-2-5　若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$.

证　由性质 1-2-3 及概率的非负性得 $0\leqslant P(B-A)=P(B)-P(A)$，即 $P(A)\leqslant P(B)$.

性质 1-2-6　$P(A)\leqslant 1$.

证　由于 $A\subset S$，由性质 1-2-5 及概率的规范性可得 $P(A)\leqslant 1$.

性质 1-2-7(加法公式)　对任意事件 A,B，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

证　如图 1-8 所示，由于 $A\cup B=A\cup(B-AB)$ 且 $A\cap(B-AB)=\varnothing$，由概率的有限可

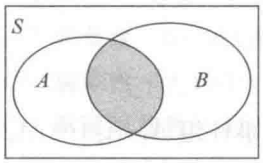


图 1-8　$A\cup B=A\cup(B-AB)$

加性及性质 1-2-3 得

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A\cup(B-AB))\\&=P(A)+P(B-AB)\\&=P(A)+P(B)-P(AB).\end{aligned}$$

加法公式可推广到任意 3 个事件.

例如,对任意 3 个事件 A,B,C,有

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)=&P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-\\&P(BC)-P(CA)+P(ABC).\end{aligned}$$

更一般地,对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,用数学归纳法可证得

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+\\&(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned}$$

计算随机事件概率的时候,会经常用到上述公式,读者一定要熟练记忆.

例 1-2-1　在一次抽奖中,某家庭有两人参与,他们抽到奖的概率分别为 0.3 与 0.4,都拿到奖的概率为 0.1,求该家庭能抽到奖牌的概率.

解　设 $A=${该家庭第一人抽到奖},$B=${该家庭第二人抽到奖},则 $A\cup B=${该家庭抽到奖},$AB=${该家庭的两人都抽到奖},由概率的加法公式得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.3+0.4-0.1=0.6.$$

例 1-2-2　设 A,B,C 为三个事件,已知 $P(A)=P(B)=P(C)=0.3,P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=0.1$,求下列事件的概率:

(1) A 发生但 C 不发生;

(2) 至少有一个发生;

(3) 至少两个发生.

解　(1) A 发生但 C 不发生可表示为 $A\overline{C}$,由事件的运算关系,

$$A\overline{C}=A-AC,$$

所以

$$P(A\overline{C})=P(A-AC)$$

由于 $A\supset AC$,由概率的性质 1-2-3 得

$$P(A-AC)=P(A)-P(AC)=0.2.$$

(2) 3 个事件至少一个发生应表示为 $A\cup B\cup C$,由推广的加法公式,有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC).$$

其中,由于 $ABC\subset AB$,故 $P(ABC)\leqslant P(AB)=0$,因此 $P(ABC)=0$,所以

$$P(A\cup B\cup C)=0.3+0.3+0.3-0.1-0.1=0.7.$$

(3) 3 个事件至少有两个发生可表示为 $AB\cup BC\cup AC$,由于 AB,BC,AC 中任意两个事件的交事件或 3 个事件的交事件都是 ABC,所以

$$P(AB\cup BC\cup AC)=P(AB)+P(BC)+P(AC)-2P(ABC)=0.2.$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com