学府考研
十年专注·只做考研

理工社®

2018

考研数学真题分类详解

主编 张同斌
策划 考研数学命题研究组

数学一

数学全程答疑

下载答疑APP

31年考研数学真题汇编·反复训练定得高分

《考研数学复习指导全书》+《考研数学真题分类详解》完美搭配

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

学府考研
十年专注·只做考研

理工社®

2018 考研数学真题分类详解

主编 张同斌
策划 考研数学命题研究组

数学一

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学真题分类详解.数学一/张同斌主编. —北京：北京理工大学出版社，2017.4
ISBN 978-7-5682-3825-0

Ⅰ.①考… Ⅱ.①张… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 053262 号

出版发行 /北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 /北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 /100081
电　　话 /(010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 /http://www.bitpress.com.cn
经　　销 /全国各地新华书店
印　　刷 /陕西思维印务有限公司
开　　本 /787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 /28.75
字　　数 /662 千字
版　　次 /2017 年 4 月第 1 版　2017 年 4 月第 1 次印刷
定　　价 /57.80 元

责任编辑 /孟雯雯
文案编辑 /多海鹏
责任校对 /周瑞红
责任印制 /边心超

风雨考研路　学府伴你行

“学府考研”是学府教育旗下专业从事考研辅导的品牌！

“学府考研”是一个为实现人生价值和理想而欢聚一堂的团队。2006 年从 30 平米办公室起步，历经十年，打造了一个考研培训行业的领军品牌。如今学府考研已发展成为集考研培训、图书出版、在线教育为一体的综合性教育机构，扎根陕西，服务全国。

学府考研的辅导体系满足了考研学子不同层面的需求，主要以小班面授教学、全日制考研辅导、网络小班课为核心，兼顾大班教学、专业课一对一辅导等多层次辅导。学府考研在教学中的“讲、练、测、评、答”辅导体系，解决了考研辅导“只管教，不管学”的问题，保证学员在课堂上听得懂，课下会做题。通过定期测试，掌握学员的学习进度，安排专职老师答疑，保证学习效果。总结多年教学实践经验，学府考研逐渐形成了稳定的辅导教学体系，做到一个学员一套学习计划、一套辅导方案，大大降低了学员考取目标院校的难度。在公共课教学方面实现零基础教学，在专业课方面，建立了遍及全国各大高校的研究生专业信息资源库，解决考生跨院校、跨专业造成的信息不对称、复习资料缺乏等难题。

“学府考研”的使命是帮助每一个信任学府的学员都能考上理想院校。

学府文化的核心是“专注文化”。

“十年专注，只做考研”。因为专业，所以深受万千考研学子信赖！

“让每一个来这里的考研学子都成为成功者”。正是这种责任，让学府考研快速成为考生心目中当仁不让的首选品牌。

人生能有几回搏，三十年太长，只争朝夕！

同学们，春华秋实，为了实现理想，努力吧！

学府考研 | 全国统一客服电话 | 400-090-8961
总　部 | 陕西·西安友谊东路75号新红锋大厦三层

学府官方微博

学府官方微信

致学府图书用户

亲爱的学府图书用户：

您好！欢迎您选择学府图书，感谢您信任学府！

“学府图书”是学府考研旗下专业从事考研教辅图书研发和出版的图书公司！

为了更好地为您提供“优质教学、始终如一”的服务，对于您所提出的宝贵意见与建议，我们向您深表感谢！

若我们的图书质量或服务未达到您的期望，敬请您通过以下联系方式进行告知。我们珍视并诚挚的感谢您的反馈，谢谢您！

在此祝您学习愉快！

学府图书全国统一客服电话：400-090-8961

学府图书质量及服务监督电话：15829918816

学府图书总经理投诉电话：张城 18681885291 投诉必复！

您也可将信件投入此邮箱：34456215@qq.com 来信必回！

图书微博　　图书微信　　图书微店

学府图书——张同斌考研数学书系使用说明

数学是工学类、经济学类和管理学类硕士研究生入学考试的必考科目，分为数学一、数学二、数学三，满分为150分，但从历年考生的成绩来看，并不理想，成绩分化比较严重.究其原因有三点：其一是考生对基本概念、基本理论以及基本方法掌握得不扎实；其二是数学命题的特点是综合性比较强，几乎每道题都是二到五个知识点的综合运用；其三是考生对与考研题目特点、难度相当的题目训练不够等.为帮助考生弥补这些短板，由拥有31年高校执教经历，26载考研数学辅导经验的张同斌教授亲自精心编写了本系列图书，目的在于帮助考生有计划、有步骤、科学合理地完成考研数学复习，从基本概念、基本理论、基本方法，到对其进行熟练运用，循序渐进，提高客观题与解答题的解题能力；通过做历年真题，最后把综合解题能力浓缩到《冲刺6套卷》与《密押3套卷》当中，力助考生取得优异成绩.

需要指出的是，考研数学复习应从大三第二学期开始，这一时期考生应结合《考研数学复习指导全书》将《高等数学》、《线性代数》、《概率论与数理统计》(数学一，数学三)课本过一遍.并至少完成一半以上的课后习题，然后按下面的时间规划系统复习.

图书	复习任务及时间规划	阶段目标
《考研数学复习指导全书》 (数学一) (数学二) (数学三)	按照考研大纲要求复习章节的基本概念、基本理论、基本方法，同时将知识连成网、织成片，找出不同章节内容的链接点，提高综合分析解决问题的能力.通过例题把握每一章节常考题型及解题方法. 时间：1月1日—4月30日.	1.熟记概念、定理、公式； 2.理解基本概念、基本理论、掌握基本方法的内涵与外延； 3.掌握常用知识点不同命题形式的解题方法； 4.完成同步训练.
《考研数学真题分类详解》 (数学一) (数学二) (数学三)	将历年真题按考点进行归纳分类，在基础复习的同时，掌握考研真题的出题形式，了解知识点的综合技巧，认真做题训练，建议至少完成两遍，以达到熟能生巧的目的. 时间：2月1日—5月1日. 10月20日—11月30日.	1.通过真题的训练，查漏补缺； 2.将考研数学的知识点与解题方法串起来，形成体系. 3.在冲刺阶段对真题题型及难度得心应手，巩固基础及提高复习阶段所掌握的解题方法.

《考研数学基础通关经典 1000 题》 (数学一) (数学二) (数学三)	在掌握基本概念、基本理论、基本方法的基础上,熟悉并掌握所有知识点对应的题型.每天完成 30 个题目,熟练掌握解答客观题的方法,并为提高解答解答题的能力奠定基础.多余时间应将生疏的题目与方法重复训练. 时间:5 月 1 日—6 月 30 日.	1.掌握选择题、填空题常用的解题方法; 2.初步把握解答解答题的方法; 3.拿到一个题,应能判断出是考哪个知识点,解题时应用哪个基本概念、基本理论或基本方法.
《考研数学强化夺冠经典 600 题》 (数学一) (数学二) (数学三)	在掌握基本概念、基本理论、基本方法的基础上,把握每一章节的命题特点,命题点与对应的定理、公式的内在联系.每天完成 20 个题目,熟练掌握解答解答题的方法,并进一步提高客观题的解题能力.多余时间应将生疏题目与方法重复训练. 时间:7 月 1 日—8 月 30 日.	1.掌握解答题(包括计算题、证明题)常用的解题方法; 2.加强选择题、填空题的解题能力; 3.把握常见考题与基本概念、基本理论、基本方法的内在联系.
《考研数学全真模拟冲刺 6 套卷》+《考研数学考前热身密押 3 套卷》 (数学一) (数学二) (数学三)	通过《冲刺 6 套卷》与《密押 3 套卷》的训练,检验复习效果,更重要的凝练考点,提高解题熟练度.将考研数学的所有考点与知识点之间形成有机联系,提高综合分析解决问题的能力. 时间:9 月 1 日—考前.	1.通过难度与真题相近、"口味"与真题一致的模拟题的训练,积累考试经验; 2.将一年来复习的内容高度凝练,重点题型强化训练,同时梳理基本概念、基本理论、基本方法以及常见考题对应的方法,从容参加考试,超越 135 分.

前言
Preface

从 1987 年至今，全国硕士研究生入学统一考试数学学科全国统考已实施了 31 年，期间从 2003 年开始考研数学试卷从原来的 100 分增至 150 分，从 2009 年开始，将原来的数学三和数学四合并为数学三，并对考试内容和要求做了调整，形成了现在的数学一、数学二和数学三并保持数学考试大纲的相对稳定.

考研数学真题是教育部考试中心历届命题组专家集体智慧的结晶，它既蕴含着命题的指导思想、基本原则，又通过考研试卷的结构、题目特点反映《考试大纲》规定的各部分内容对考生基本概念、基本理论和基本方法的掌握程度以及答题能力的选拔测试要求.研究历年真题，不难发现考研数学试题的特点、风格与水平.为帮助有志攻读硕士研究生的考生在较短的时间内，把握考研数学考题的命题特点和出题思路与规律，全面提高分析解决问题能力，编者根据多年评阅试卷和 26 年考研辅导班授课经验以及 31 年高校执教阅历的沉淀，巧妙梳理，精心编写了本书.

本书共分三部分，分别对高等数学、线性代数和概率论与数理统计的历年真题进行分类解析，每部分编排为：

考点分布

本部分内容能使考生对本章常考知识点一目了然，以及了解知识点在历年考题中所占的分数，透视出该章内容的命题规律并为考生的复习指明方向.

重点内容及常考题型

根据考试大纲要求和真题分类统计及考点分布浓缩复习内容，掌握常考题型，把书“从厚读薄”，罗列可能的命题点.

历年真题解析

将历年真题按考点进行归纳分类，并逐题给出详细解答，尽量做到一题多解，有不少题目的解法是作者长期从事教学和考研辅导总结出来的，较常规解法更简捷.

拓展

这是本书的特色之一，增加了该数学种类中重点内容以及常考题型中未考过的其他数学种

类的真题，如数学一、数学二有些题目虽然没有出现在数学三中，但未来有可能考的题目，作为拓展题目放在数学三，使考生能够在把握本部分内容的基础上"查漏补缺"，力争做到考点全覆盖，题型全掌握，全面掌控考研数学.

考点方法点睛

对该部分内容所涉及的不同考点对应的方法加以概括总结，不仅把知识点连成片、织成网，还把解题方法连成片、织成网，使考生在熟练掌握基本概念、基本理论的基础上，将分析与解决问题的能力达到或超过解答真题的水平.

友情提醒　书中真题解析每个题目中的标号，如[2016-(3)-4]，表示 2016 年真题第(3)题分值 4 分，[1997-二(1)-3]表示 1997 年真题第二大题的第 1 小题分值 3 分，拓展中每个题目中的标号，如[2011(数一)-(20)-11]，表示 2011 年数学一真题的第(20)题分值 11 分，如[2015(数一)-(11)-4，2015(数三)-(13)-4]，表示 2015 年数学一真题的第(11)题分值 4 分与 2015 年数学三真题的第(13)题分值 4 分是同一题目.

本书在编写过程中，得到了学府考研屈奎老师、学府图书张城老师、王娜老师以及学府考研数学考研室老师的鼎力帮助，在此向他们表示感谢!

限于作者水平，书中疏漏与不足之处在所难免，恳请读者批评指正.

希望本书能对同学们的考研复习及备考带来更大的帮助，祝同学们考出理想成绩，摘取桂冠，精彩地完成生命中这一青春演绎.

编　者

2017 年 1 月

目录

Contents

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

第一部分

高等数学

第一章 函数、极限、连续

考情分析

考点分布

分值 考点 年份	极限的概念及性质	两个重要极限	单调有界与夹逼准则	极限的运算	无穷小的比较	函数的连续性与间断点	合计
2017						4	4
2016				4			4
2015				4	10		14
2014				10			10
2013				4			4
2012							0
2011			10	10			20
2010			10	4			14
2009					4		4
2008			4	9			13
2007					4		4
2006			12	4			16
2005							0
2004				4	4		8
2003	4	4					8

重要考点

1.函数的特性,复合函数(分段函数的复合表达式).

2.极限的概念、性质及运算,极限的存在准则,求极限的方法与技巧.

3.无穷小的阶,无穷小的比较.

4.函数的连续性与间断点,间断点的类型及判断.

5.闭区间上连续函数的性质(最值定理、零点定理、介值定理及其推论).

常考题型

1.求函数极限或已知函数极限求参数.

2.利用单调有界数列必收敛与夹逼准则证明数列极限存在并求数列极限.

3.无穷小的比较或已知无穷小的比较求参数.

4.求函数的间断点并判断其类型.

真题详解

考点1　函数极限特性

真题1 [2005-(8)-4] 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,“$M \Leftrightarrow N$”表示“M 的充分必条件是 N”,则必有　　(　　)

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

【答案】(A).

【解析】**方法1**　如果记住下面重要结论:

若 $f(x)$ 是连续的奇函数,则其所有原函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$ 是偶函数;

若 $f(x)$ 是连续的偶函数,则其所有原函数中只有一个 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数;

奇(偶)函数的导函数是偶(奇)函数.

不难快速找出正确选项(A).

方法2(特例法)　取 $f(x)=\cos x+1$,则 $f(x)$ 是偶函数,也是周期函数,但其原函数 $F(x)=\sin x+x+1$ 不是奇函数,排除(B);$F(x)=\sin x+x+1$ 不是周期函数,排除(C).

取 $f(x)=x$,则 $f(x)$ 是单调(增)函数,但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 不是单调(增)函数,排除(D).故应选(A).

真题2 [1999-(6)-3] 设 $f(x)$ 是连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则　　(　　)

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时,$F(x)$ 必是偶函数

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时,$F(x)$ 必是奇函数

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时,$F(x)$ 必是周期函数

(D) 当 $f(x)$ 是单调函数时,$F(x)$ 必是单调函数

【答案】(A).

【解析】本题主要考查奇偶函数的原函数的特性,其解析同上题.

真题 3 [1990-一(3)-3] 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$__________.

【答案】1.

【解析】由于对任意 x，都有 $|f(x)|\leqslant 1$，所以由 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 得 $f[f(x)]=1$.

真题 4 [1988-一(2)-5] 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

【解析】由 $f(x)=e^{x^2}$，得 $f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，又 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，由 $\ln(1-x)\geqslant 0$，$1-x\geqslant 1$，得其定义域为 $x\leqslant 0$.

考点 2 极限的概念及性质

真题 5 [2003-(8)-4] 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有 ( )

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立 (B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在 (D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

【答案】(D).

【解析】**方法 1(推理法)** 由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=\infty$，即极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在. 应选(D).

方法 2(特例法) 取 $a_n=\dfrac{2}{n}$，$b_n=1$，$c_n=\dfrac{n}{2}(n=1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，但 $a_1>b_1$，排除(A)；$b_1>c_1$，排除(B)；$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=1$，排除(C). 故应选(D).

拓展

1. [2014(数三)-(1)-4] 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a\neq 0$，则当 n 充分大时有 ( )

(A) $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$ (B) $|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$ (C) $a_n>a-\dfrac{1}{n}$ (D) $a_n<a+\dfrac{1}{n}$

【答案】(A).

【解析】**方法 1(特例法)** 取 $a_n=1+\dfrac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1=a$，且 $|a_n|=1+\dfrac{1}{n}>1=a$，排除(B)，(D).

取 $a_n=1-\dfrac{2}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1=a$，且 $|a_n|=1-\dfrac{2}{n}<1-\dfrac{1}{n}$，排除(C)，故应选(A).

方法 2(推理法) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 及 $a\neq 0$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$，取 $\varepsilon=\dfrac{|a|}{2}$，则存在正整数 N，当 $n>N$（n 充分大）时，恒有 $||a_n|-|a||<\dfrac{|a|}{2}$，从而 $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$. 应选(A).

2. [2012(数二)-(3)-4] 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_1+\cdots+a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的 ( )

(A) 充分必要条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件　　(D) 既非充分又非必要条件

【答案】(B).

【解析】因为 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，所以数列 $\{S_n\}$ 是单调增加的.

若 $\{S_n\}$ 有界，则由单调有界数列必收敛，知 $\{S_n\}$ 收敛，记 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0,$$

故数列 $\{a_n\}$ 收敛于 0.

反之，若 $\{a_n\}$ 收敛，$\{S_n\}$ 却未必有界. 例如，取 $a_n=1(n=1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$(收敛). 但 $S_n=n$ 无界. 由此可知，数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分非必要条件. 应选(B).

考点 3　求数列极限

(1) 利用夹逼准则求数列极限

真题 6 [2010-(17)-10](Ⅰ) 比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$ 的大小，说明理由；

(Ⅱ) 记 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

【解析】(Ⅰ) 当 $0<t<1$ 时，因为 $0<\ln(1+t)<t$，所以

$$0<|\ln t|[\ln(1+t)]^n<|\ln t|t^n,$$

由定积分的性质，得

$$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots).$$

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知，$0<u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t$，

因为
$$\begin{aligned}\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t&=-\int_0^1 t^n\ln t\mathrm{d}t=-\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\Big|_0^1+\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{n+1}\lim_{t\to0^+}t^{n+1}\ln t+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{(n+1)^2},\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=0$，由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

真题 7 [1998-(15)-6] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

【解析】这是一个 n 项和的数列极限，解决这类问题常用的方法是：夹逼准则、定积分或这两种方法结合使用.

因为
$$\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}\leqslant\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}<\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}(i=1,2,\cdots,n),$$