丛书主编 马德高

易®燎原高数

高等数学辅导领导品牌

高等院校教材同步辅导及考研复习用书

高等数学

辅导及习题精解

同济六版·下册

本册主编 张天德

教材习题全解 指导同步学习

考研真题精讲 剖析考研重点

延边大学出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

丛书主编 马德高

高等数学
辅导及习题精解

同济六版·下册

本册主编 张天德
副 主 编 林 慧 王春晓

延边大学出版社
Yanbian university press

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导及习题精解：同济六版. 下册 / 马德高编著. — 延吉：延边大学出版社，2011.12(2015.6 重印)
ISBN 978-7-5634-4494-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 236777 号

高等数学辅导及习题精解(下册)

编著：马德高
责任编辑：林景浩
出版发行：延边大学出版社
社址：吉林省延吉市公园路 977 号　　**邮编**：133002
网址：http://www.ydcbs.com
E-mail：ydcbs@ydcbs.com
电话：0433-2732435　　**传真**：0433-2732434
印刷：德州文源印刷有限公司
开本：880×1230　1/32
印张：12　**字数**：330 千字
版次：2015 年 6 月第 1 版第 6 次印刷
ISBN 978-7-5634-4494

定价：19.80 元

前言

高等数学是理工类专业重要的基础课程，也是硕士研究生入学考试的重点科目。为了帮助读者学好高等数学，编者根据多年的教学经验编写了这本与同济大学数学系主编的《高等数学》(第六版)完全配套的《高等数学辅导及习题精解》上、下册。本书旨在帮助、指导广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与技巧，提高应试能力和数学思维水平。本书章节的划分和内容设置与同济第六版教材完全一致。

讲解结构五大部分

一、本章内容概览：对本章知识进行简要的概括。

二、本章知识图解：用网络结构图的形式揭示出本章知识点之间的有机联系，以便于学生从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容。

三、本节内容讲解：包含本节考查要点、教材知识全解、典型例题解析三大模块。

1. 本节考查要点：对本节出现的知识点简洁而全面的梳理。

2. 教材知识全解：用表格形式对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行系统的梳理，并指出在理解与应用基本概念、定理、公式时需注意的问题以及各类考试中经常考查的重要知识点；

3. 典型例题解析：这一部分是每一节讲解中的核心内容，也是全书的核心内容。作者基于多年的教学经验和研究生入学考试试题研究经验，将该节教材内容中学生需要掌握的、考研中经常考到的重点、难点、考点归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出大量的精选例题深入讲解，使您对每一个知识点扎实掌握，并能熟练运用在具体解题中。可谓基础知识梳理、重点考点深讲、联系考试解题三重互动、一举突破，从而获得实际应用应试能力的全面提升。例题讲解中穿插出现的“思路探索”、“方法点击”，更是巧妙点拨，让您举一反三、触类旁通。

四、本章整合：包含本章知识总结、考研真题精析、本章同步自测三大模块。

1. 本章知识总结：对本章所学的知识进行系统的回顾，帮助读者更好的复习与总结。

2. 考研真题精析：针对每一个基本题型，精选最新研究生入学考试真题，做了精心深入的解答。

3. 本章同步自测：精选部分有代表性、测试价值高的题目(部分题目选自历年全国研究生入学考试试题)，以此检测、巩固读者的学习效果，提高应试水平。

前言

五、教材习题详解：对教材里各章节全部习题作详细解答，与市面上习题答案不全的某些参考书有很大的不同。在解题过程中，对部分有代表性的习题，设置了“思路探索”以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法；安排有“归纳总结”来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。有的习题还给出了一题多解，以培养读者的分析能力和发散思维能力。

内容编写三大特色

一、知识梳理清晰、简洁：直观、形象的条目总结，精练、准确的考点提炼，权威、独到的方法归纳，将教材内容抽丝剥茧、层层展开，呈现给读者简明扼要、层次分明的知识结构，便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，为提高解题能力和思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、持续：所有重点、难点、考点统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出丰富的精选例题、考研真题，举一反三、深入讲解，真正将知识掌握和解题能力提升高效结合、一举完成。

三、联系考研密切、实用：本书既是一本教材同步辅导，也是一本考研复习用书，书中处处联系考研：例题中有考研试题，同步自测中也有考研试题，更不用说讲解中处处渗透考研经常考到的考点、重点等，为的就是让同学们同步完成考研备考，达到考研要求的水平。

本书注意博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分。在此向这些书籍的编著者表示感谢。由于我们水平有限，书中疏漏与不妥之处，敬请广大读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。

编者

需要全本请访问 www.ertongbook.com

教材知识全解+教材习题详解

目录

教材知识全解

第八章　空间解析几何与向量代数 …… (1)
第一节　向量及其线性运算 …… (2)
第二节　数量积　向量积　*混合积 …… (6)
第三节　曲面及其方程 …… (11)
第四节　空间曲线及其方程 …… (17)
第五节　平面及其方程 …… (20)
第六节　空间直线及其方程 …… (22)
本章整合 …… (27)
本章知识总结 …… (27)
考研真题精析 …… (28)
本章同步自测 …… (28)
第九章　多元函数微分法及其应用 …… (32)
第一节　多元函数的基本概念 …… (33)
第二节　偏导数 …… (39)
第三节　全微分 …… (44)
第四节　多元复合函数的求导法则 …… (47)
第五节　隐函数的求导公式 …… (54)
第六节　多元函数微分学的几何应用 …… (59)
第七节　方向导数与梯度 …… (63)
第八节　多元函数的极值及其求法 …… (66)
*第九节　二元函数的泰勒公式(略) …… (69)
*第十节　最小二乘法(略) …… (69)
本章整合 …… (70)
本章知识总结 …… (70)
考研真题精析 …… (70)
本章同步自测 …… (75)
第十章　重积分 …… (80)
第一节　二重积分的概念与性质 …… (81)
第二节　二重积分的计算法 …… (84)
第三节　三重积分 …… (95)
第四节　重积分的应用 …… (101)
*第五节　含参变量的积分 …… (106)
本章整合 …… (107)
本章知识总结 …… (107)

目录

教材知识全解+教材习题详解

考研真题精析 …… (108)
本章同步自测 …… (112)
第十一章　曲线积分与曲面积分 …… (118)
第一节　对弧长的曲线积分 …… (119)
第二节　对坐标的曲线积分 …… (122)
第三节　格林公式及其应用 …… (127)
第四节　对面积的曲面积分 …… (133)
第五节　对坐标的曲面积分 …… (136)
第六节　高斯公式　*通量与散度 …… (140)
第七节　斯托克斯公式　*环流量与旋度 …… (145)
本章整合 …… (149)
本章知识总结 …… (149)
考研真题精析 …… (152)
本章同步自测 …… (155)
第十二章　无穷级数 …… (161)
第一节　常数项级数的概念和性质 …… (162)
第二节　常数项级数的审敛法 …… (165)
第三节　幂级数 …… (173)
第四节　函数展开成幂级数 …… (180)
第五节　函数的幂级数展开式的应用 …… (185)
*第六节　函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质 …… (186)
第七节　傅里叶级数 …… (190)
第八节　一般周期函数的傅里叶级数 …… (195)
本章整合 …… (196)
本章知识总结 …… (196)
考研真题精析 …… (197)
本章同步自测 …… (201)

教材习题详解

第八章　空间解析几何与向量代数 …… (207)
第九章　多元函数微分法及其应用 …… (229)
第十章　重积分 …… (268)
第十一章　曲线积分与曲面积分 …… (311)
第十二章　无穷级数 …… (345)

第八章 空间解析几何与向量代数

本章内容概览

空间解析几何是用代数方法研究空间中的几何问题，主要工具是向量代数. 正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样，空间解析几何是学习多元微积分的重要基础.

本章知识图解



第一节 向量及其线性运算

本节考查要点

本节在考试中的出题点主要体现在以下方面：

1. 利用向量的线性运算求解几何问题.
2. 向量的坐标表达式及其运算.
3. 求向量的模、单位向量、方向余弦、方向角、投影.

教材知识全解

1. 空间直角坐标系的概念

名称	定　义	说　明
空间直角坐标系	在空间取定一点 O，和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，就确定了三条以 O 为原点的两两垂直的数轴，依次记为 x 轴(横轴)，y 轴(纵轴)和 z 轴(竖轴). 这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系.	通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴是铅垂线，它们的正向符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向.
坐标面	三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为坐标面.	x 轴和 y 轴所确定的坐标面叫作 xOy 面，y 轴和 z 轴确定 yOz 面，z 轴和 x 轴确定 zOx 面.
卦限	三个坐标面把空间分成的八个部分.	一共八个卦限，分别用字母 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 来表示.
空间中点的坐标	空间中任一点 M 在三条坐标轴上的投影 P,Q,R 在各自坐标轴上的坐标记为 x,y,z，则点 M 与有序数组 (x,y,z) 建立了一一对应关系，称 (x,y,z) 为点 M 的坐标.	点 M 称为以 (x,y,z) 为坐标的点.
空间中两点的距离	$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，则 M_1 和 M_2 之间的距离为 $d=\lvert M_1M_2\rvert$.	$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

2. 向量的有关定义和性质

名称	定 义	说 明
向量(矢量)	既有大小又有方向的量称为向量.	(1) 常用有向线段表示向量,如 $\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}$ 等. (2) 将向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点与空间直角坐标系的原点重合,则其终点的坐标 (x,y,z) 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标,记作 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 或 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. (3) 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,则 $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$. (4) 大小相等、方向相同的两向量相等.
向量的模	向量的大小(或长度)	(1) 向量 $\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{a}$ 的模依次记作 $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$,$\lvert\boldsymbol{a}\rvert$. (2) 模为0的向量叫作零向量,记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$,它的方向可看作是任意的. 模为1的向量叫作单位向量. 与 $\boldsymbol{a}$ 模相同,方向相反的向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$. (3) 设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,则 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$. (4) 对空间中任意两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,有 $\lvert\overrightarrow{M_1M_2}\rvert=\lvert M_1M_2\rvert=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.
向量的方向余弦	设向量 $\boldsymbol{a}$ 与三坐标轴正向的夹角分别为 α,β,γ,则 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.	(1) 如果 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,则 $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$,$\cos\gamma=\dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$. (2) $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 恰为与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量,$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

续表

名称	定义	说明
向量的投影	已知向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 和 u 轴，M_1, M_2 在 u 上的投影分别为 M'_1，M'_2，那么 u 上的有向线段 $\overrightarrow{M'_1M'_2}$ 的值 $\lvert\overrightarrow{M'_1M'_2}\rvert$ 即为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 u 上的投影.	(1) 若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角为 φ，则 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\cos\varphi$. (2) (投影定理) 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 u 轴上的投影等于向量的模乘轴与向量的夹角 φ 的余弦，即 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{M_1M_2}=\lvert\overrightarrow{M_1M_2}\rvert\cos\varphi$. (3) 两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影之和，即 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2$. (4) 向量与数的乘积在轴上的投影等于向量在轴上的投影与数的乘积，即 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$. (5) 向量在与其方向相同的轴上的投影为其模；在与其方向垂直的轴上的投影为 0. (6) $\boldsymbol{a}$ 在 x,y,z 轴上的投影坐标分别为 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert\cos\alpha$，$\lvert\boldsymbol{a}\rvert\cos\beta$，$\lvert\boldsymbol{a}\rvert\cos\gamma$，其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

3. 向量的线性运算

名称	坐标表示	说明
向量的数乘	$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，则 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$.	当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向，其模 $\lvert\lambda\boldsymbol{a}\rvert=\lvert\lambda\rvert\lvert\boldsymbol{a}\rvert$.
向量的加法	$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$， $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$.	(1) 对向量的加法有平行四边形法则和三角形法则. (2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线 $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 λ,μ 使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

典型例题解析

基本题型 Ⅰ：有关向量的线性运算、模、方向角、方向余弦、向量的坐标表示等问题

【例 1】 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴正向、y 轴正向的夹角相等，与 z 轴正向的夹角是前者的两倍. 求与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

需要全本请访问 www.ertongbook.com

【思路探索】 与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量就是以向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为坐标的向量. 故问题求解的关键在于求出向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

解:设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴正向、y 轴正向的夹角为 α,则它与 z 轴正向的夹角为 2α.

那么,$\boldsymbol{a}$ 的方向余弦分别是 $\cos\alpha,\cos\alpha,\cos 2\alpha$,故有 $\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2(2\alpha)=1$,即 $2\cos^2\alpha-1+\cos^2(2\alpha)=0$,由此得到 $\cos 2\alpha(\cos 2\alpha+1)=0$.

$\therefore \cos 2\alpha=0$ 或 $\cos 2\alpha=-1$.

又 $\because 2\alpha\in[0,\pi]$,$\therefore \alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{\pi}{2}$.

则 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2};\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\cos 2\alpha=0$ 或 $\cos\alpha=0,\cos\alpha=0,\cos 2\alpha=-1$.

因此,所求的单位向量为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ 或 $(0,0,-1)$.

方法点击:向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 满足关系式:$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

【例 2】 设 $\boldsymbol{a}=(4,5,-3)$,$\boldsymbol{b}=(2,3,6)$,求 $\boldsymbol{a}$ 对应的单位向量 $\boldsymbol{a}^\circ$ 及 $\boldsymbol{b}$ 的方向余弦.

解:与 $\boldsymbol{a}$ 对应的单位向量 $\boldsymbol{a}^\circ$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量,因此

$$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{\sqrt{4^2+5^2+(-3)^2}}(4,5,-3)=\left(\frac{4}{\sqrt{50}},\frac{5}{\sqrt{50}},\frac{-3}{\sqrt{50}}\right).$$

$$\text{又 }\boldsymbol{b}^\circ=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}(2,3,6)=\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right),$$

从而,$\boldsymbol{b}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{2}{7},\cos\beta=\dfrac{3}{7},\cos\gamma=\dfrac{6}{7}$.

【例 3】 从点 $A(2,-1,7)$ 沿向量 $\boldsymbol{a}=(8,9,-12)$ 的方向取长为 34 的线段 $\overline{AB}$,求点 B 的坐标.

解:设点 B 坐标为 (x,y,z),则 $\overrightarrow{AB}=(x-2,y+1,z-7)$.

由于 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向一致,故存在实数 $\lambda>0$,使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\boldsymbol{a}$,即

$$(x-2,y+1,z-7)=\lambda(8,9,-12),$$

得 $x-2=8\lambda,y+1=9\lambda,z-7=-12\lambda$.

又 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-7)^2}=34$,得 $\sqrt{289\lambda^2}=34$,得 $\lambda=2$,

所以 $x=8\lambda+2=18,y=9\lambda-1=17,z=-12\lambda+7=-17$.

点 B 坐标为 $(18,17,-17)$.

方法点击:$\boldsymbol{b}\ /\!/\ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow$ 存在唯一实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

基本题型Ⅱ:利用向量的运算与性质证明结论

【例4】 用向量的方法证明:三角形的中位线平行于底边,且它的长度等于底边的一半.

证明:设 $\triangle ABC$ 中,D、E 分别为 AB、AC 的中点,

$\because \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$,

$\therefore \overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$,

即 $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

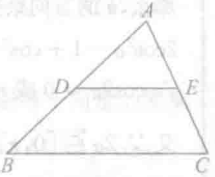


图 L8-1

故 $\overrightarrow{DE}\ /\!/\ \overrightarrow{BC}$ 且 $|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$,结论得证.

【例5】 设空间四边形 $ABCD$ 各边的中点依次为 P、Q、R、S. 证明:(1) 四边形 $PQRS$ 是平行四边形;(2) 四边形 $PQRS$ 的周长等于四边形 $ABCD$ 的两对角线的长度之和.

证明:设四边形 $ABCD$ 中,AC、BD 为两条对角线.

(1) 在 $\triangle ABD$ 中,由中位线定理知,$\overrightarrow{PS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. 同理,$\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

$\therefore \overrightarrow{PS}=\overrightarrow{QR}$,即 $\overrightarrow{PS}\ /\!/\ \overrightarrow{QR}$ 且 $|\overrightarrow{PS}|=|\overrightarrow{QR}|$,故 $PQRS$ 是平行四边形.

(2) 分别在 $\triangle ABC$ 及 $\triangle DAC$ 中应用中位线定理,得 $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{SR}$.

同理,$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

$\therefore |\overrightarrow{PS}|+|\overrightarrow{SR}|+|\overrightarrow{QR}|+|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}|$,

即四边形 $PQRS$ 的周长等于四边形 $ABCD$ 的两条对角线的长度之和.

方法点击:用向量的方法证明两线段平行:

(1) 各线段分别用向量表示;

(2) 证明表示各线段的向量方向相同.

第二节 数量积 向量积 * 混合积

本节考查要点

本节在考试中的出题点主要体现在以下方面:

1. 与数量积、向量积、混合积公式有关的运算.
2. 两向量垂直或平行的条件及判断两向量的位置关系.
3. 向量积的几何应用.

教材知识全解

1. 向量的运算

名称	定义	说明
数量积(内积,点乘)	两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$,$\theta$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.	(1) 若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$. (2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$. (3) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$. (4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$. (5) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦为 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$. (6) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 即 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.
向量积(外积,叉乘)	两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为一向量 $\boldsymbol{c}$,其模为 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,其中 θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,其方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面(即 $\boldsymbol{c}$ 既垂直于 $\boldsymbol{a}$,又垂直于 $\boldsymbol{b}$),且 $\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定.	(1) 若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-b_ya_z,a_zb_x-b_za_x,a_xb_y-b_xa_y)$. (2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$. (3) $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$. (4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$. (5) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角正弦 $\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$. (6) $\boldsymbol{a}\ /\!/\ \boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$,其中 b_x,b_y,b_z 中有一个为 0 时,如 $b_x=0$,应理解为 $a_x=0$. (7) 以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为相邻边的平行四边形的面积为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$;若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为三角形的任意两边,则三角形面积为 $\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.
混合积	对向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,称 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积,记作 $[\boldsymbol{abc}]$.	(1) 若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$,则有 $[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$. (2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$. (3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}$. (4) $|[\boldsymbol{abc}]|$ 等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积,并且当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 成右手系时,$[\boldsymbol{abc}]$ 为正,当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 成左手系时,$[\boldsymbol{abc}]$ 为负. (5) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的 λ,μ 和 υ,使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\upsilon\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$.

典型例题解析

基本题型Ⅰ：有关向量的数量积、向量积与混合积的运算及性质问题

【例1】 设未知向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 共线，且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$. 求 $\boldsymbol{x}$.

解：方法一：由于 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，故设 $\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}=(2\lambda,-\lambda,2\lambda)$，

$\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=(2,-1,2)\cdot(2\lambda,-\lambda,2\lambda)=9\lambda=-18$，$\therefore \lambda=-2$，

故 $\boldsymbol{x}=(-4,2,-4)$.

方法二：由于 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，故可设 $\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}$，则

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})=\lambda|\boldsymbol{a}|^2=\lambda[2^2+(-1)^2+2^2]=9\lambda=-18$，

$\therefore \lambda=-2$.

故 $\boldsymbol{x}=(-4,2,-4)$.

方法点击：证明两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线的方法：

(1) $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，证明存在 $\lambda\neq 0$ 使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$；

(2) 证明 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$；

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

【例2】 已知 $|\boldsymbol{a}|=6$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$|\boldsymbol{c}|=3$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{6}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，求 $[\boldsymbol{abc}]$.

【思路探索】 由定义，$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}})$. 故应先求 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 及 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}})$.

解：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=6\times3\times\sin\frac{\pi}{6}=9$，

又 $\because \boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，$\therefore \boldsymbol{c}\,/\!/\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，故 $\boldsymbol{c}$ 与 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ 的夹角 $\theta=0$ 或 π.

因此，$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\theta=\pm27$.

【例3】 设 $\boldsymbol{a}=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,-4,5)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，问 λ 为何值时，$|\boldsymbol{c}|$ 最小？并证明：当 $|\boldsymbol{c}|$ 最小时，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$.

解：$|\boldsymbol{c}|^2=(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})\lambda^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\lambda+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})$，

所以当 $\lambda=-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}=-\frac{12}{50}=-\frac{6}{25}$ 时，$|\boldsymbol{c}|$ 最小，

二次函数最小值问题.

此时 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}$

$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+(-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})=0$，

所以 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$.

【例4】 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为3个不共面的向量，并设 $\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-7\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$ 共面，则 $k=$ _____.

【思路探索】 用向量代数法，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 共面的充要条件是 $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=0$.

解：$(\alpha\times\beta)\cdot\gamma=[(3a+b-7c)\times(a-3b+kc)]\cdot(a+b-3c)$

$=[3(a\times a)-10(a\times b)+(3k+7)(a\times c)-3(b\times b)+$

$(k-21)(b\times c)-7k(c\times c)]\cdot(a+b-3c)$

$=(k-21)(b\times c)\cdot a+(3k+7)(a\times c)\cdot b+30(a\times b)\cdot c$

$=(k-21-3k-7+30)(a\times b)\cdot c$

$=(2-2k)(a\times b)\cdot c$

$=0.$

$\because a,b,c$ 为3个不共面的向量，$\therefore(a\times b)\cdot c\neq 0$，

$\therefore 2-2k=0,\therefore k=1.$

方法点击：三个向量共面，一般用混合积为零来解决.

基本题型Ⅱ：关于向量的平行、垂直、共面关系及夹角的问题

【例5】 已知 $a=i,b=j-2k,c=2i-2j+k$，求一单位向量 m，使 $m\perp c$，且 m 与 a，b 共面.

解：设所求向量 $m=(x,y,z)$，依题意，有 $|m|=1\Rightarrow x^2+y^2+z^2=1$，

$m\perp c\Rightarrow m\cdot c=0\Rightarrow 2x-2y+z=0.$

m 与 a,b 共面 $\Rightarrow[mab]=0$，即 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2y+z=0.$

以上三式联立，解得

$$x=\frac{2}{3},y=\frac{1}{3},z=-\frac{2}{3}\text{ 或 }x=-\frac{2}{3},y=-\frac{1}{3},z=\frac{2}{3},$$

$$\therefore m=\pm\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right).$$

方法点击：涉及共面问题时，常用混合积.

【例6】 设 $a+3b$ 与 $7a-5b$ 垂直，$a-4b$ 和 $7a-2b$ 垂直，求非零向量 a 与 b 的夹角.

解：由 $(a+3b)\perp(7a-5b)$，得

$$(a+3b)\cdot(7a-5b)=7|a|^2+16a\cdot b-15|b|^2=0,\quad①$$

由 $(a-4b)\perp(7a-2b)$，得

$$(a-4b)\cdot(7a-2b)=7|a|^2-30a\cdot b+8|b|^2=0,\quad②$$

① − ② 得 $46a\cdot b-23|b|^2=0$，

即 $$a\cdot b=\frac{1}{2}|b|^2.\quad③$$

将③代入①，得 $7|a|^2=7|b|^2$，

即 $$|a|=|b|.$$

从而 $a\cdot b=\frac{1}{2}|a|\cdot|b|$.

$\therefore \cos(\overset{\wedge}{a,b}) = \dfrac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \dfrac{1}{2}$,

$\therefore (\overset{\wedge}{a,b}) = \dfrac{\pi}{3}$.

基本题型 Ⅲ:利用向量的几何意义求面积、体积

【例 7】 已知三角形三个顶点坐标是 $A(2,-1,3)$,$B(1,2,3)$,$C(0,1,4)$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

【思路探索】 以向量 a,b 为邻边的三角形的面积 $S = \dfrac{1}{2}|a \times b|$.

解:由向量积的定义,可知 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin\angle A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

由于 $\overrightarrow{AB} = (-1,3,0)$,$\overrightarrow{AC} = (-2,2,1)$,因此

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3i + j + 4k.$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|3i + j + 4k| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 1^2 + 4^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

【例 8】 求以 $A(1,3,4)$,$B(3,5,6)$,$C(2,5,8)$,$D(4,2,10)$ 为顶点的四面体的体积 V.

【思路探索】 四面体的体积是对应平行六面体体积的 $\dfrac{1}{6}$,而平行六面体的体积 $V = |[abc]|$.

解:由题设条件知 $\overrightarrow{AB} = (2,2,2)$,$\overrightarrow{AC} = (1,2,4)$,$\overrightarrow{AD} = (3,-1,6)$.

根据混合积的几何意义知

$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6}|(4,-6,2) \cdot (3,-1,6)| = \frac{1}{6} \times 30 = 5.$$

基本题型 Ⅳ:以向量为工具的证明题

【例 9】 试用向量方法证明正弦定理:$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

【思路探索】 由于正弦定理涉及三角形的边与它们的夹角,并且是夹角的正弦.这使我们想到涉及正弦运算的向量积.

证明:在 $\triangle ABC$ 中,$(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \times \overrightarrow{AB} = 0$,

$\therefore \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$,

两边取向量的模,有

$$b \cdot c \cdot \sin A = |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = c \cdot a \cdot \sin B,$$

由此得到 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$,同理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$,

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中,有 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

需要全本请访问 www.ertongbook.com