



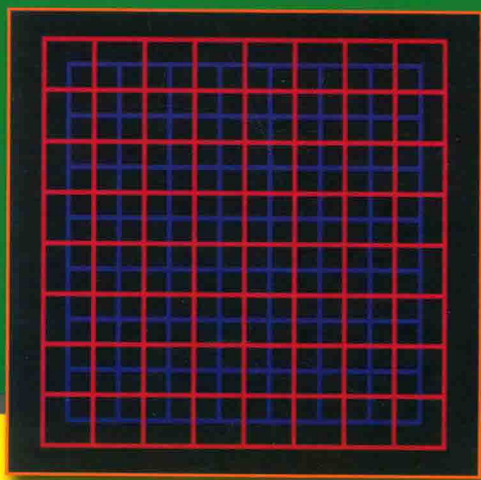
中学数学拓展丛书

# 数学思想领悟

SHUXUE SIXIANG LINGWU

第2版

沈文选 杨清桃 编著



数学思想，是数学知识中闪光的珍珠，是数学花坛中灿烂的花朵！

数学思想，使我们领悟到数学是用字母和符号谱写的乐曲，充满着和谐的旋律，让我们在思疑中启悟，在思辨中省悟，在体验中领悟！



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 作者简介

沈文选, 男, 1948年生。湖南师范大学数学与计算机科学学院教授, 曾任全国初等数学研究会理事长, 湖南省高师数学教育研究会理事长, 全国高师数学教育研究会常务理事, 全国教育数学研究会常务理事, 湖南省中学数学研究会副理事长, 湖南省数学会中学数学委员会副主任, 湖南师范大学数学奥林匹克研究所副所长, 《中国初等数学研究》主任, 《数学教育学报》编委, 《现代中学数学》副主编, 中国数学奥林匹克高级教练。

长期从事中学数学研究、初等数学研究、奥林匹克数学研究、教育数学研究, 已出版学术专著16部, 主编高校教材4部, 出版其他书籍近40部, 发表学术论文80余篇, 其他文章200余篇。多年来为全国初、高中数学联赛, 数学冬令营, 国家集训队提供试题20余道, 是湖南省数学奥林匹克培训的主要组织者与授课者(湖南中学生已获得IMO金牌15块, 银牌5块), 已指导硕士研究生78名。



作者沈文选教授参加2002年国际数学家大会



在第27届湖南省青少年科技创新大赛上, 中国工程院院士, 湖南省科协主席, 中南大学教授何继善与作者的合影, 并给作者题写条幅

## 中学数学拓展丛书

- 数学精神巡礼
- 数学应用展观
- 数学眼光透视
- 数学建模尝试
- 数学思想领悟
- 数学竞赛采风
- 数学方法溯源
- 数学测评探营
- 数学解题引论
- 数学史话览胜
- 数学技能操握
- 数学欣赏拾趣



培杰数学国际文化传播中心  
[www.impj.cn](http://www.impj.cn)

刘培杰数学工作室网站  
<http://lpj.hit.edu.cn>

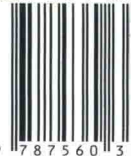
- 策划编辑 刘培杰 张永芹
- 责任编辑 张永芹 杜莹雪
- 封面设计 孙茵艾



哈尔滨工业大学出版社 刘培杰数学工作室  
联系地址: 哈尔滨市南岗区复华四道街10号  
邮编: 150006  
联系电话: 0451-86281378 13904613167  
E-mail: lpj1378@163.com  
微信: impjpp

上架建议: 高等数学

ISBN 978-7-561



9 787560 13

定价 68.00

● 中学数学拓展丛书

本册书是湖南省教育厅科研课题“教育数学的研究”（编号06C510）成果之三

# 数学思想领悟

SHUXUE SIXIANG LINGWU

第2版

沈文选 杨清桃 编著



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内 容 简 介

本书共分五章。第一章数学思想概述;第二章两大“基石”思想;第三章两大“支柱”思想;第四章两大“主梁”思想;第五章数学思想的运用与领悟。

本书可作为高等师范院校教育学院、教师进修学院数学专业及国家级、省级中学数学骨干教师培训班的教材或教学参考书,也可作为广大中学数学教师及数学爱好者拓展数学视野的读物。

### 图书在版编目(CIP)数据

数学思想领悟/沈文选,杨清桃编著.—2版.—哈尔滨:  
哈尔滨工业大学出版社,2018.1  
(中学数学拓展丛书)  
ISBN 978-7-5603-6835-1

I. 数… II. ①沈…②杨… III. ①中学数学课-教学参考资料  
IV. G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第186304号

策划编辑 刘培杰 张永芹  
责任编辑 张永芹 杜莹雪  
封面设计 孙茵艾  
出版发行 哈尔滨工业大学出版社  
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006  
传 真 0451-86414749  
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>  
印 刷 哈尔滨经典印业有限公司  
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 28.25 字数 653千字  
版 次 2008年1月第1版 2018年1月第2版 2018年1月第1次印刷  
书 号 ISBN 978-7-5603-6835-1  
定 价 68.00元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎  
序

我和沈文选教授有过合作，彼此相熟。不久前，他发来一套数学普及读物的丛书目录，包括数学眼光、数学思想、数学应用、数学模型、数学方法、数学史话等，洋洋大观。从论述的数学课题来看，该丛书的视角新颖，内容充实，思想深刻，在数学科普出版物中当属上乘之作。

阅读之余，忽然觉得公众对数学的认识很不相同，有些甚至是彼此矛盾的。例如：

一方面，数学是学校的主要基础课，从小学到高中，12年都有数学；另一方面，许多名人在说“自己数学很差”的时候，似乎理直气壮，连脸也不红，好像在宣示：数学不好，照样出名。

一方面，说数学是科学的女王，“大哉数学之为用”，数学无处不在，数学是人类文明的火车头；另一方面，许多学生说数学没用，一辈子也碰不到一个函数，解不了一个方程，连相声也在讽刺“一边向水池注水，一边放水”的算术题是瞎折腾。

一方面，说“数学好玩”，数学具有和谐美、对称美、奇异美，歌颂数学家的“美丽的心灵”；另一方面，许多人又说，数学枯燥、抽象、难学，看见数学就头疼。

数学，我怎样才能走近你，欣赏你，拥抱你？说起来也很简单，就是不要仅仅埋头做题，要多多品味数学的奥秘，理解数学的智慧，抛却过分的功利，当你把数学当作一种文化来看待的时候，数学就在你心中了。

我把学习数学比作登山，一步步地爬，很累，很苦。但是如果你能欣赏山林的风景，那么登山就是一种乐趣了。

登山有三种意境：

首先是初识阶段。走入山林，爬得微微出汗，坐拥山色风光，体会“明月松间照，清泉石上流”的意境。当你会做算术，会记账，

能够应付日常生活中的数学的时候,你会享受数学给你带来的便捷,感受到好似饮用清泉那样的愉悦。

其次是理解阶段。爬到山腰,大汗淋漓,歇足小坐。环顾四周,云雾环绕,满目苍翠,心旷神怡。正如苏轼名句:“横看成岭侧成峰,远近高低各不同。不识庐山真面目,只缘身在此山中。”数学理解到一定程度,你会感觉到数学的博大精深,数学思维的缜密周全,数学的简捷之美,使你对符号运算能够有爱不释手的感觉。不过,理解了,还不能创造。“采药山中去,云深不知处。”对于数学的伟大,还莫测高深。

第三则是登顶阶段。攀岩涉水,越过艰难险阻,到达顶峰的时候,终于出现了“会当凌绝顶,一览众山小”的局面。这时,一切疲乏劳顿、危难困苦,全都抛到九霄云外。“雄关漫道真如铁”,欣赏数学之美,是需要代价的。当你破解了一道数学难题,“蓦然回首,那人却在灯火阑珊处”的意境,是语言无法形容的快乐。

好了,说了这些,还是回到沈文选先生的丛书。如果你能静心阅读,它会帮助你一步步攀登数学的高山,领略数学的美景,最终登上数学的顶峰。于是劳顿着,但快乐着。

信手写来,权作为序。

张奠宙

2016年11月13日

于沪上苏州河边

## 附 文

(文选先生编著的丛书,是一种对数学的欣赏。因此,再次想起数学思想往往和文学意境相通,年初曾在《文汇报》发表一篇短文,附录于此,算是一种呼应)

### 数学和诗词的意境

张奠宙

数学和诗词,历来有许多可供谈助的材料。例如:

一去二三里,烟村四五家。

亭台七八座,八九十枝花。

把十个数字嵌进诗里,读来朗朗上口。郑板桥也有题为《咏雪》的诗云:

一片二片三四片,五六七八九十片。

千片万片无数片,飞入梅花总不见。

诗句抒发了诗人对漫天雪舞的感受。不过,以上两首诗中尽管嵌入了数字,却实在和数学没有什么关系。

数学和诗词的内在联系,在于意境。李白的题为《送孟浩然之广陵》的诗云:

故人西辞黄鹤楼，烟花三月下扬州。

孤帆远影碧空尽，唯见长江天际流。

数学名家徐利治先生在讲极限的时候，总要引用“孤帆远影碧空尽”这一句，让大家体会一个变量趋向于0的动态意境，煞是传神。

近日与友人谈几何，不禁联想到初唐诗人陈子昂的题为《登幽州台歌》的诗中的名句：

前不见古人，后不见来者。

念天地之悠悠，独怆然而涕下。

一般的语文解释说：上两句俯仰古今，写出时间绵长；第三句登楼眺望，写出空间辽阔；在广阔无垠的背景中，第四句描绘了诗人孤单寂寞、悲哀苦闷的情绪，两相映照，分外动人。然而，从数学上看来，这是一首阐发时间和空间感知的佳句。前两句表示时间可以看成是一条直线（一维空间）。陈老先生以自己为原点，前不见古人指时间可以延伸到负无穷大，后不见来者则意味着未来的时间是正无穷大。后两句则描写三维的现实空间：天是平面，地是平面，悠悠地张成三维的立体几何环境。全诗将时间和空间放在一起思考，感到自然之伟大，产生了敬畏之心，以至怆然涕下。这样的意境，数学家和文学家是可以彼此相通的。进一步说，爱因斯坦的四维时空学说，也能和此诗的意境相衔接。

贵州六盘水师专的杨老师告诉我他的一则经验。他在微积分教学中讲到无界变量时，用了宋朝叶绍翁题为《游园不值》中的诗句：

春色满园关不住，一枝红杏出墙来。

学生每每会意而笑。实际上，无界变量是说，无论你设置怎样大的正数  $M$ ，变量总要超出你的范围，即有一个变量的绝对值会超过  $M$ 。于是， $M$  可以比喻成无论怎样大的园子，变量相当于红杏，结果是总有一枝红杏越出园子的范围。诗的比喻如此恰切，其意境把枯燥的数学语言形象化了。

数学研究和学习需要解题，而解题过程需要反复思索，终于在某一时刻出现顿悟。例如，做一道几何题，百思不得其解，突然添了一条辅助线，问题豁然开朗，欣喜万分。这样的意境让我想起了王国维用辛弃疾的词来描述的意境：“众里寻它千百度，蓦然回首，那人却在，灯火阑珊处。”一个学生，如果没有经历过这样的意境，数学大概是学不好了。

音

乐能激发或抚慰情怀,绘画使人赏心悦目,诗歌能动人心弦,哲学使人获得智慧,科技可以改善物质生活,但数学却能提供以上的一切。

——Klein

数学是一个思想领域,它为我们提供了有关清晰、精确思维的必要和明确的知识。

——R. D. Carmichael

数学研究极大地开阔了人类思想的地平线,并且在某种程度上帮助人们理解自然界和物理世界。

——Jawahar Lal Nehru

人们喜爱音乐,因为它不仅有神奇的乐谱,而且有悦耳的优美旋律!

人们喜爱画卷,因为它不仅描绘出自自然界的壮丽,而且可以描绘人间美景!

人们喜爱诗歌,因为它不仅是字词的巧妙组合,而且有抒发情怀的韵律!

人们喜爱哲学,因为它不仅是自然科学与社会科学的浓缩,而且使人更加聪明!

人们喜爱科技,因为它不仅是一个伟大的使者与桥梁,而且是现代物质文明的标志!

而数学之为德,数学之为用,难以用旋律、美景、韵律、聪明、标志等词语来表达!

你看,不是吗?

数学精神,科学与人文融合的精神,它是一种理性精神!一种求简、求统、求实、求美的精神!数学精神似一座光辉的灯塔,指引数学发展的航向!数学精神似雨露阳光,滋润人们的心田!

数学眼光,使我们看到世间万物充满着带有数学印记的奇妙的科学规律,看到各类书籍和文章的字里行间流露着数学的踪迹,使我们看到满眼绚丽多彩的数学洞天!

数学思想,使我们领悟到数学是用字母和符号谱写的美妙乐曲,充满着和谐的旋律,让人难以忘怀,难以割舍!让我们在思维中启悟,在思辨中省悟,在体验中领悟!

数学方法,它是人类智慧的结晶,也是人类的思想武器!它像画卷一样描绘着各学科的异草奇葩般的景象,令人目不暇接!它的源头又是那样的寻常!

数学解题,它是人类学习与掌握数学的主要活动,它是数学活动的一个兴奋中心!数学解题的理论博大精深,提高其理论水平是永远的话题!

数学技能,它是人类在数学知识的学习过程中逐步形成并发展的一种大脑操作方式.它是一种智慧!它是数学能力的一种标志!操控数学技能是人们追求的一种基础性目标!

数学应用,给我们展示出了数学的神通广大,它在各个领域与角落闪烁着人类智慧的火花!

数学建模,呈现出了人类文明亮丽的风景!特别是那呈现出的抽象彩虹——一个个精巧的数学模型,璀璨夺目,流光溢彩!

数学竞赛,许多青少年喜爱的一种活动,这种数学活动有着深远的教育价值!它是选拔和培养数学英才的重要方式之一.这种活动可以激励青少年对数学学习的兴趣,可以扩展他们的数学视野,促进发展创新意识!数学竞赛中的专题培训内容展示了竞赛数学亮丽的风采!

数学测评,检验并促进数学学习效果的重要手段.测评数学的研究是教育数学研究中的一朵奇葩!测评数学的深入研究正期待着我们!

数学史话,充满了前辈们的创造与再创造的心血机智,让我们可以从中汲取丰富的营养!

数学欣赏,对数学喜爱的情感的流淌.这是一种数学思维活动的崇高情表!数学欣赏,引起心灵震撼!真、善、美在欣赏中得到认同与升华!从数学欣赏中领略数学智慧的美妙!从数学欣赏走向数学鉴赏!从数学文化欣赏走向文化数学研究!

因此,我们可以说,你可以不信仰上帝,但不能不信仰数学.

从而,提高我国每一个公民的数学文化水平及数学素养,是提高我国各个民族整体素质的重要组成部分,这也是数学基础教育中的重要目标.为此,笔者构思了这套丛书——《中学数学拓展丛书》.

这套丛书是笔者学习张景中院士的数学教育思想,对一些数学素材和数学研究成果进行再创造并以此为指导思想来撰写的;是献给中学师生,试图为他们扩展数学视野、提高数学素养以响应张奠宙教授的倡议:建构符合时代需求的数学常识,享受充满数学智慧的精彩人生的书籍.

不积跬步,无以至千里,不积小流,无以成江海,没有积累便没有丰富的素材,没有整合创新便没有鲜明的特色.这套丛书的写作,是笔者在多年资料的收集、学习笔记的整理及笔者已发表的文章的修改并整合的基础上完成的.因此,每册书末都列出了尽可能多的参考文

献,在此,衷心感谢这些文献的作者。

这套丛书,笔者试图以专题的形式,对中、小学典型的数学问题进行广搜深掘来串联,并以此为线索来写作的。

这一本是《数学思想领悟》。

数学思想,是数学内容的精髓,是知识转化为能力的桥梁。它使学习者在处理数学问题时又思又想:由思激疑,在思疑中启悟;由想反思,在思辨中省悟;由思导验,在体验中领悟。认识在启悟中升华,思维在省悟中开拓,能力在领悟中形成。数学思想的深刻领悟,是一种高尚的数学享受,是有益心智的精神漫步!

数学思想,是数学知识中闪光的珍珠,是数学花坛中灿烂的花朵,它使人领悟到数学的真谛,懂得数学的价值,学会用数学的思维解决问题,它能把数学知识的学习和数学能力的培养和人的智力发展有机地联系起来!

数学思想,是铭记在人们头脑中起永恒作用的精神和态度,它能使人思维敏捷,表达清楚,工作有条理,善于处世和做事,实事求是,锲而不舍,使人得到文化方面的修养,更好地理解、领略和创造现代社会的文明!

数学思想,是数学学习者前进道路上的路标和灯塔,它使数学学习者能在寒冬耐心地等待,在暖春活泼地开放,在盛夏默默地成长,在金秋喜悦地收获!

由于数学思想是数学内容的进一步提炼和概括,它所涉及的面又宽又广,它所渗透的体又厚又大,因此,作者提出了作为数学思想的奠基性或总括性成分的基本数学思想观点,以及基本数学思想是由两大“基石”、两大“支柱”、两大“主梁”思想等三大块有机组成的探讨,以试图给数学思想构建一种理论体系。

又由于数学思想是以数学内容为载体的对数学内容的一种本质认识,是一种隐性的知识,学习者要领悟、理解、掌握并运用数学思想,就需要通过学习精心设计的内容与范例,需要通过反复体验才能有所收获。本册书就是在这种思想指导下完成的,本书还包含笔者对在《山西学习报》上连载的百余篇文章进行整理而成的有关章节的内容。

让我们领悟数学思想!让我们用数学思想领悟吧!

沈文选 杨清桃

2017年3月于岳麓山下



## 第一章 数学思想概述

1.1 对数学思想重要性的认识渐趋深刻 .....	1
1.1.1 经验的总结 .....	1
1.1.2 现实的需要 .....	1
1.1.3 认知的实现 .....	2
1.2 大力加强对数学思想的探讨 .....	3
1.2.1 思想和数学思想 .....	4
1.2.2 数学思想与科学思想 .....	4
1.2.3 历史上数学思想的几次重大突破与中学数学教材内容的阶段 性转折 .....	5
1.2.4 数学思想中的基本数学思想 .....	11
1.2.5 思路、思绪、思考和意识(观念) .....	11
1.2.6 数学思想与数学方法的关系 .....	12
思考题 .....	13

## 第二章 两大“基石”思想

2.1 符号化与变元表示思想 .....	14
2.1.1 换元思想 .....	15
2.1.2 方程思想 .....	18
2.1.3 参数思想 .....	20
2.2 集合思想 .....	21
2.2.1 类分思想(并集思想) .....	22
2.2.2 求同思想(交集思想) .....	26
2.2.3 互补思想(补集思想) .....	26
思考题 .....	27
思考题参考解答 .....	28

## 第三章 两大“支柱”思想

3.1 对应思想 .....	30
3.1.1 映射思想 .....	30
3.1.2 函数思想 .....	31

# 目 录

## CONTENTS


 目  
录  
CONTENTS

3.1.3 变换思想 .....	37
3.1.4 对称思想 .....	41
3.1.5 递归思想 .....	46
3.1.6 数形结合思想 .....	50
<b>3.2 公理化与结构思想 .....</b>	<b>53</b>
3.2.1 公理化思想 .....	53
3.2.2 演绎思想 .....	55
3.2.3 归纳思想 .....	56
3.2.4 类比思想 .....	56
3.2.5 结构思想 .....	65
3.2.6 极限思想 .....	69
3.2.7 模型思想 .....	72
3.2.8 算法思想 .....	76
思考题 .....	77
思考题参考解答 .....	78

## 第四章 两大“主梁”思想

<b>4.1 系统与统计思想(一) .....</b>	<b>81</b>
4.1.1 系统思想 .....	81
4.1.2 整体思想 .....	83
4.1.3 分解组合思想 .....	85
4.1.4 运动变化思想 .....	87
4.1.5 最优化思想 .....	93
<b>4.2 系统与统计思想(二) .....</b>	<b>94</b>
4.2.1 统计思想 .....	94
4.2.2 随机思想 .....	95
4.2.3 统计调查思想 .....	95
4.2.4 假设检验思想 .....	96
4.2.5 量化思想 .....	97
<b>4.3 化归与辩证思想(一) .....</b>	<b>97</b>
4.3.1 化归思想 .....	97
4.3.2 纵向化归 .....	98
4.3.3 横向化归 .....	99
4.3.4 同向化归 .....	100
4.3.5 逆向化归 .....	101
<b>4.4 化归与辩证思想(二) .....</b>	<b>104</b>
4.4.1 辩证思想 .....	104
4.4.2 对立统一思想 .....	104
4.4.3 互变思想 .....	108
4.4.4 转换思想 .....	111
4.4.5 一分为二思想 .....	120
思考题 .....	121
思考题参考解答 .....	121



## 第五章 数学思想的运用与领悟

5.1 集合问题	126
5.1.1 学习集合应注意的几个问题——符号化与变元表示思想的运用	126
5.1.2 集合的图形表示及应用——数形结合思想的运用	127
5.1.3 关注集合元素的特征——符号化与变元表示思想的运用	129
5.1.4 重视空集的特殊性和重要作用——一分为二思想的运用	131
5.1.5 反面求解——补集思想的运用	132
5.2 简易逻辑与推理问题	134
5.2.1 逻辑联结词与真假命题的集合语言表示——结构思想的运用	134
5.2.2 用集合观点处理充要条件问题——集合思想的运用	136
5.2.3 对数学归纳法的深入理解——递归思想的运用	136
5.3 函数问题	138
5.3.1 映射、函数等概念的正确把握——特殊与一般转换思想的运用	138
5.3.2 函数的单调区间及单调性的应用——模型思想的运用	140
5.3.3 指数函数、对数函数的单调性及应用——类分思想的运用	141
5.3.4 幂函数、指数函数、对数函数的参变量漫谈——运动变化思想的运用	143
5.3.5 从反函数的定义谈起——对应思想的运用	144
5.3.6 函数奇偶性的判定与应用——符号化与变元表示思想的运用	147
5.3.7 关于对称问题的求解——对称思想的运用	149
5.3.8 函数图像的判定及有关参量取值的确定——极限思想的运用	151
5.3.9 原函数与其导函数的周期性、奇偶性的关系——系统思想的运用	153
5.4 三角问题	155
5.4.1 对角的概念推广与符号表示的深刻认识——符号化与变元表示思想的运用	155
5.4.2 弧度制及应用——对应思想的运用	156
5.4.3 诱导公式的新概括——符号化与变元表示思想的运用	158
5.4.4 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像——变换思想的运用	159
5.4.5 单位圆的应用——数形结合思想的运用	163
5.4.6 三角函数的性质及应用——特殊与一般转换思想的运用	165
5.4.7 角的代换与变换——化归思想的运用	168
5.4.8 三角式余弦定理——特殊与一般转换思想的运用	171
5.4.9 弦函数的“平方差”公式——整体思想的运用	173
5.4.10 三角中的三倍角公式——变换思想的运用	175

# 目 录

## CONTENTS


 目  
录  
CONTENTS

5.4.11	余弦定理的简单应用——转换思想的运用	176
5.5	立体几何问题	179
5.5.1	平面的属性与描述——符号化与变元表示思想的运用	179
5.5.2	公理3的三个推论的证明——公理化思想的运用	181
5.5.3	空间直线位置关系的识别与证明——类分思想的运用	182
5.5.4	线面垂直判定定理的证明——转化思想的运用	184
5.5.5	直线和平面所成的角及其求解——转化思想的运用	185
5.5.6	平面与平面平行、垂直的判定与性质——归纳思想的运用	187
5.5.7	二面角的求解方法——归纳思想的运用	189
5.5.8	立体几何求解题的规范化表述——最优化思想的运用	191
5.5.9	立体几何中的反证法证明——补集思想的运用	193
5.5.10	平面图形的翻折问题及求解——运动变化思想的运用	194
5.5.11	异面直线上两点间的距离公式——化归思想的运用	197
5.5.12	底面为矩形的棱锥的一个美妙结论——化归思想的运用	198
5.5.13	平行六面体的妙用——模型思想的运用	199
5.5.14	立体几何中的几何变换——运动变化思想的运用	202
5.5.15	一种重要的思维方式——类比思想的运用	204
5.5.16	一种有效的处理途径——转换思想的运用	206
5.5.17	一种常用的求解方法——分解组合思想的运用	207
5.5.18	射影法与解析法的配合运用——转化思想的运用	209
5.5.19	三类角的珠联璧合关系——系统思想的运用	212
5.5.20	立体几何中的“定比分点”公式——特殊向一般转换思想的运用	216
5.6	平面解析几何问题	218
5.6.1	解析法证题浅谈——数形结合思想的运用	218
5.6.2	定比分点公式浅析——公式所包含的多种思想	220
5.6.3	直线及直线方程的建立——数形结合思想的运用	222
5.6.4	简单的线性规划及应用——最优化思想的运用	228
5.6.5	直(曲)线系方程——参数思想的运用	230
5.6.6	直线与圆有公共点的运用——参数思想的运用	233
5.6.7	圆的各种形式的方程及应用——符号化与变元表示思想的运用	235
5.6.8	圆的直径式方程——分解组合思想的运用	238
5.6.9	动点到两定点距离的和、差的最值——类比思想的运用	240
5.6.10	圆、椭圆、双曲线的定义问题——纵向化归思想的运用	242
5.6.11	利用圆锥曲线的定义解题——化归思想的运用	244
5.6.12	一串优美的定值结论——特殊与一般转化思想的运用	248
5.6.13	圆锥曲线焦半径公式的应用——模型思想的运用	255
5.6.14	圆锥曲线的切线问题——变换思想的运用	257
5.6.15	轨迹方程的求法——交集思想的运用	272
5.6.16	处理圆锥曲线问题应注意的一个方面——对称思想的运用	274



5.6.17	设而不求——整体思想的运用	275
5.6.18	简化计算的妙方——对称思想的运用	284
5.6.19	一道抛物线问题的求解——结构思想的运用	289
5.6.20	圆锥曲线的光学性质及应用——结构思想的运用	291
5.6.21	从圆到圆锥曲线——类比思想的运用	295
<b>5.7</b>	<b>排列组合与二项式定理问题</b>	<b>333</b>
5.7.1	两个计数原理的理解与运用——类分思想的运用	333
5.7.2	从集合的角度看排列组合——集合思想的运用	335
5.7.3	二项式定理的应用举例——模型思想的运用	337
<b>5.8</b>	<b>概率问题</b>	<b>340</b>
5.8.1	对事件及概率的辨析理解——类比思想的运用	340
5.8.2	从集合角度看事件与概率——集合思想的运用	342
<b>5.9</b>	<b>向量问题</b>	<b>344</b>
5.9.1	向量的概念及加减运算——模型思想的运用	344
5.9.2	平面向量的基本定理及应用——符号化与变元表示思想的运用	346
5.9.3	平面向量的数量积及应用——类比与转化思想的运用	351
5.9.4	空间向量在立体几何中的应用——数形结合思想的运用	355
<b>5.10</b>	<b>数列问题</b>	<b>359</b>
5.10.1	关于数列一般概念的理解——结构思想的运用	359
5.10.2	对等差数列的深化认识——结构思想的运用	361
5.10.3	用函数观点处理等差数列问题——函数思想的运用	366
5.10.4	对等比数列的深刻认识——类比与结构思想的运用	368
5.10.5	等差、等比中项的巧用——化归思想的运用	372
5.10.6	可化为等差、等比数列的数列问题——模型思想的运用	374
5.10.7	数列求和的若干方法——化归思想的运用	376
<b>5.11</b>	<b>不等式问题</b>	<b>378</b>
5.11.1	由实数的性质到不等式的性质——化归思想的运用	378
5.11.2	实系数一元不等式的统一解法——函数思想的运用	379
5.11.3	两个不等式的一般形式——模型思想的运用	381
5.11.4	二元与三元均值不等式的巧用——转换思想的运用	383
5.11.5	构造函数证明不等式——函数思想的运用	385
5.11.6	运用放缩法证明不等式——化归思想的运用	386
<b>5.12</b>	<b>复数问题</b>	<b>389</b>
5.12.1	对复数概念的深刻认识——对应思想的运用	389
5.12.2	复数丰富多彩的性质——变换思想的运用	390
5.12.3	处理复数问题的一条有效途径——方程思想的运用	392
5.12.4	借图速解复数题——数形结合思想的运用	394
5.12.5	复数帮了三角的忙——横向化归思想的运用	396
5.12.6	复数在求解代数、平面几何问题中的应用——横向化归思想的运用	398
5.12.7	复数与解析几何问题——化归思想的运用	400

# 目 录

## CONTENTS


 目  
录  
CONTENTS

思考题 .....	402
思考题参考解答 .....	403
参考文献 .....	409
作者出版的相关书籍与发表的相关文章目录 .....	411
编后语 .....	418

## 第一章 数学思想概述

随着各门科学抽象化、数字化水平的日益提高,以及数学本身由于集合论与结构思想的发展而日益走向整体化,人们对精髓性、灯塔性、普遍性的数学思想的高度重视、研究及教学探讨,已成为历史的必然和时代的要求,成为数学教育现代化进程中的一个重要课题。

### 1.1 对数学思想重要性的认识渐趋深刻

国际数学教育界关于基础数学教育(中小学数学教育)现代化的问题,曾进行了多种实验研究,提出过种种设想方案,许多人基本上倾向如下观点:数学教育的现代化,并不只是要进行“现代数学的教学”,而是要进行“数学的现代教学”,要把基础数学教育“建立在现代数学的思想基础上,并使用现代数学的方法和语言”。

我们的教学实践也表明:中小学数学教育的现代化,主要不是内容的现代化,而是数学思想、方法及教学手段的现代化,加强数学思想方面的教学是基础数学教育现代化的关键。特别是对能力培养这一问题的探讨与摸索,以及社会对数学价值的要求,使我们更进一步地认识到数学思想的重要性。

#### 1.1.1 经验的总结

随着教育理论的研究和教育实践的深入进行,广大数学教育工作者对数学思想的认识也渐趋深刻。

众所周知,知识是人们在改造世界的实践中获得的认识和经验的总结,它是人类文化的核心内容。在数学学科中,概念、法则、性质、公式、公理、定理等显然属于知识的范围,这些知识要素也都有其本身的内容。长期以来,人们一直思考着:这丰富多彩的数学内容反映了哪些共同的、带有本质性的东西呢?历史的车轮碾出了人们所需要的答案,这就是数学思想。人们逐渐认识到,数学思想是数学知识中奠基性的成分,是使人们获得概念、法则、性质、公式、公理、定理等必不可少的基础,是人类文化的重要组成部分,是数学文化的核心内容,它作为数学知识内容的精髓,是铭记在人们头脑中起永恒作用的精神与态度。

例如,自1949年以来,我国的数学教育经历了10次教学大纲到数学课程标准的指导,这些纲领性文献对数学思想的重要性的认识就是一个从低到高的过程。特别是在数学课程标准中,并列地提出了要求学生掌握数学的基础知识、基本技能、基本思想,充分体现了数学教育工作者对数学课程发展的一些共识,对数学思想的重要性的共识。

#### 1.1.2 现实的需要

##### (1) 形势发展的需要

时代的前进依赖于科技的发展,现代科技日新月异,促进着社会主义市场经济的迅猛发