考研专用

高等数学
辅导及习题解答

下册

考研数学命题研究组 编

高等教育出版社

考研专用

高等数学
辅导及习题解答

下册

考研数学命题研究组 编

高等教育出版社·北京

内容提要

《考研专用高等数学辅导及习题解答(下册)》以同济大学数学系编写的《高等数学(下册)》第七版为参考,共分5章,章节的划分与第七版基本一致。每节内容由3部分组成:基本概念;重要性质、定理与公式;典型例题解析。各章后有归纳与总结小节。所选例题大多为典型考研试题。

本书可作为学生考研的系统复习与基础训练用书,也可作为教师教学的参考书,同时也是一本同步指导与训练教程,而且也可作为高等工科院校高等数学学习的辅导读物。

图书在版编目(CIP)数据

考研专用高等数学辅导及习题解答. 下册 / 考研数学命题研究组编. --北京:高等教育出版社,2017.8
ISBN 978-7-04-048335-2

Ⅰ.①考… Ⅱ.①考… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第187474号

策划编辑 张耀明　　责任编辑 张耀明　　封面设计 李小璐　　版式设计 范晓红
责任校对 吕红颖　　责任印制 耿 轩

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京市密东印刷有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
总 印 张 51
总 字 数 1270千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
版　　次 2017年8月第1版
印　　次 2017年8月第1次印刷
定　　价 108.00元

物 料 号 48335-00

预备知识

1. 常用不等式

(1) 三角不等式：$|a|-|b| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b|$.

(2) 平方－算术－几何均值不等式：

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均为正实数，则

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \cdots \cdot x_n},$$

其中等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立.

(3) 均值不等式的常用例子：设 $a, b>0$，则 $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

(4) 柯西不等式(二维形式)：$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqslant (ac+bd)^2$，等号当且仅当 $ad=bc$ 时成立.

2. 常用多项式算式

(1) $(a \pm b)^2=a^2 \pm 2ab+b^2$，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

(2) $(a \pm b)^3=a^3 \pm 3a^2b+3ab^2 \pm b^3$，$a^3 \pm b^3=(a \pm b)(a^2 \mp ab+b^2)$.

(3) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

(4) 二项展开式：$(a+b)^n=\sum\limits_{r=0}^{n} \mathrm{C}_n^r a^{n-r} b^r$，其中 $\mathrm{C}_n^r=\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$.

3. 三角函数之间的关系

(1) 倒数关系：$\tan\alpha\cot\alpha=1$；$\sin\alpha\csc\alpha=1$；$\cos\alpha\sec\alpha=1$.

(2) 商数关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$；$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

(3) 平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$；$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$.

4. 常用三角函数诱导公式

(1) $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$；$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$；$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$；$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$.

(2) $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$；$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$；$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$；$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$.

(3) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$；$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$；$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$；$\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$.

(4) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$；$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$；$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$；$\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$.

5. 三角函数和角、差角、倍角公式

(1) $\sin(\alpha \pm \beta)=\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$；　$\cos(\alpha \pm \beta)=\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$.

(2) $\tan(\alpha \pm \beta)=\dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$；　$\cot(\alpha \pm \beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$.

(3) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$；$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

(4) $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$;$\cot 2\alpha=\dfrac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$.

6. 三角函数的积化和差与和差化积公式

(1) 积化和差

- $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$.
- $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$.
- $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$.
- $\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$.

(2) 和差化积

- $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$.
- $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$.
- $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$.
- $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

7. 三角函数万能公式

(1) $\sin\alpha=\dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$.　(2) $\cos\alpha=\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$.　(3) $\tan\alpha=\dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

8. 常用平面图形的面积公式

(1) 平行四边形、矩形的面积:$S=ah$,其中 a 为平行四边形(矩形)的一边长,h 为 a 所对应的高.

(2) 正方形的面积:$S=a^2$,其中 a 为正方形的边长.

(3) 梯形的面积:$S=\dfrac{(a_1+a_2)h}{2}$,其中 a_1,a_2 分别为梯形的上底和下底,h 为梯形的高.

(4) 若圆的半径为 r,则圆的周长为 $2\pi r$,面积为 πr^2.

(5) 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的面积为 πab,其中 $a,b>0$.

9. 常用空间区域的面积公式与体积公式

(1) 柱体的侧面积 $S=$ 底面周长 $\times$ 高,体积 $V=$ 底面积 $\times$ 高.

特殊情况:底面半径为 r,高为 h 的圆柱体的侧面积 $S=2\pi rh$,体积 $V=\pi r^2h$.

(2) 球体:半径为 r 的球体的表面积 $S=4\pi r^2$,体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

(3) 棱锥的体积:$V=\dfrac{1}{3}\times$ 底面积 $\times$ 高.

10. 四面体的形心公式

四面体的形心坐标为

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4},\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right),$$

其中 $(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3,4)$ 为四面体的顶点坐标.

11. 数列求和公式

(1) 首项为 a_1,公差为 d 的等差数列求和公式:$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

(2) 首项为 a_1,公比为 $q(q \neq 1)$ 的等比数列求和公式:$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

12. 复数的(三角形式的)乘法公式——棣莫弗公式

设复数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$,$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$,则

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

特别地,对 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$,有

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta).$$

目　　录

第八章 向量代数与空间解析几何

本章内容概览

本章介绍了向量代数与空间解析几何的相关内容,这是学习多元函数微积分的基础. 在本章中,我们依次引入了向量、向量运算、空间平面与直线、空间曲面与曲线等概念,并给出了相应的例子. 在学习中,要注意培养用代数语言描述几何问题的意识,这对之后的多元函数微积分的学习将很有帮助.

- 向量代数与空间解析几何
  - 向量及其运算
    - 向量的概念
      - 向量的坐标表达式
      - 向量的模、方向角、投影
    - 向量的线性运算 —— 加法与数乘
    - 向量的数量积、向量积与混合积
  - 平面与直线
    - 平面及其方程 —— 点法式、截距式、一般形式
    - 空间直线及其方程 —— 点向式、参数形式、两点式、一般形式
    - 空间中的位置关系
      - 平面与平面、平面与直线、直线与直线的夹角
      - 平面与平面、平面与直线、直线与直线平行、垂直的条件
    - 点到平面以及点到直线的距离
  - 空间曲面与空间曲线
    - 曲面及其方程
      - 球面、柱面与旋转曲面
      - 常用二次曲面方程及其图形
    - 空间曲线及其方程 —— 空间曲线在坐标面上的投影

考研大纲要求

本章内容仅数一要求.

1. 理解空间直角坐标系,理解向量的概念及其表示.
2. 掌握向量的运算(线性运算、数量积、向量积、混合积),了解两个向量垂直、平行的条件.
3. 理解单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式,掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.
4. 掌握平面方程和直线方程及其求法.
5. 会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角,并会利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题.
6. 会求点到直线以及点到平面的距离.
7. 了解曲面方程和空间曲线方程的概念.
8. 了解常用二次曲面的方程及其图形,会求简单的柱面和旋转曲面的方程.
9. 了解空间曲线的参数方程和一般方程. 了解空间曲线在坐标平面上的投影,并会求该投影曲线的方程.

第一节　向量及其线性运算

一、基本概念

1. 向量的概念

向量最早出现于物理学. 我们知道,力是既有大小,又有方向的,不能仅用一个数值来刻画力. 古希腊学者亚里士多德就曾经用"向量"来表示力,而两个力的和可以用"平行四边形法则"(两个力合成时,以表示这两个力的有向线段为邻边作平行四边形,这个平行四边形的对角线的大小和方向就表示合力的大小和方向)得到.

随着数学的发展,数学家们逐步认识到了空间的向量结构,将空间的性质与向量运算联系起来,使向量进入了数学领域,并逐步完善,成为一套优良的数学工具.

(1) **向量的定义**　在客观世界中,有一类量既有大小,又有方向,我们把它们称为向量. 例如,力、位移、速度等.

(2) **向量的模**　向量的大小称为向量的模. 在数学上,我们常用有向线段来表示向量. 有向线段是既具有长度、又具有方向的线段. 以点 A 为起点、点 B 为终点的有向线段可表示向量 $\overrightarrow{AB}$,箭头从有向线段的起点指向终点. 该有向线段的长度为 $\overrightarrow{AB}$ 的模,记作 $|\overrightarrow{AB}|$.

除了使用有向线段外,在本书中,我们还用黑体字母或者带箭头的字母来表示向量. 例如,$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{F}$,$\vec{a}$,$\vec{v}$,$\vec{F}$ 等.

(3) **向量的两大要素**　从向量的定义中,我们可以看出,大小和方向是确定一个向量的两大要素. 向量相等是指向量的长度相等,且方向相同,与向量的起点并无关系.

在数学上,我们仅研究与起点无关的向量,称为自由向量,简称向量.

(4) 与向量对应的一个概念是标量. 这类量只有大小,没有方向,用数值便能表示. 例如,质量、体积、温度等.

标量之间可以进行比较. 例如,质量、体积有大小之分、温度有高低之分等.

但是向量之间不能进行比较. "向量 $\boldsymbol{a}$ 大于向量 $\boldsymbol{b}$"这样的句子是没有意义的. 不过,向量的模是标量,我们可以比较两个向量的模的大小.

(5) **两类特殊的向量**　单位向量和零向量,分别表示模为 1 和模为零的向量. 零向量的起点与终点重合,它的方向可以取任意方向.

2. 向量之间的夹角

两向量的模之间有大小关系,那么两向量的方向之间的关系该如何描述呢? 这就引入了向量之间的夹角的概念.

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,任取空间中一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,规定不超过 π 的角 $\angle AOB$(设 $\varphi=\angle AOB,0\leqslant\varphi\leqslant\pi$)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,如图 8-1-1 所示,记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$.

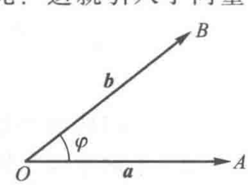

图 8-1-1

(1) 从向量夹角的记法可以看出,两向量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$之间的夹角与$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$的顺序无关,即$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的夹角等于$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{a}$的夹角.

(2) 若$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$,则称向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$同向;若$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi$,则称向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$反向. 向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$同向和向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$反向均称为向量$\boldsymbol{a}$平行于向量$\boldsymbol{b}$,记作$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

若$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$,则称向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$垂直,记作$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(3) 若$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$中有一个向量是零向量,则$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$可取0到$\pi$之间的任意值. 从而零向量与任何向量都平行,零向量与任何向量都垂直.

(4) 若把两平行向量的起点放在同一点上,则这两个向量的终点与公共起点也在同一条直线上. 因此,两向量平行也称为两向量共线.

把$k(k\geqslant 3)$个向量的起点放在同一点上,若这k个向量的终点与公共起点在同一个平面上,则称这k个向量共面.

3. 向量的线性运算

我们通过引入向量的线性运算来研究几何空间的线性结构. 向量的线性运算包括向量的加减法与数乘(即向量与数的乘法).

下面我们分别介绍向量的加减法与数乘的概念.

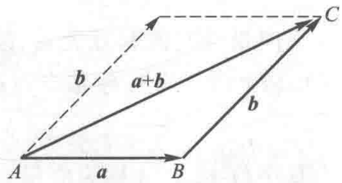

图 8－1－2

(1) **加法的定义**　向量的加法运算依照三角形法则进行,如图 8－1－2:

$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和,记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

可以这样理解向量的加法(三角形法则):甲从A地出发,沿着$\boldsymbol{a}$方向前进了$|\boldsymbol{a}|$米到达B地,然后再从B地出发,沿着$\boldsymbol{b}$方向前进$|\boldsymbol{b}|$米到达C地,这个过程的效果等同于甲从A地出发,沿连接A,C两地之间的直线段行进到达C地. 我们将由A指向C的直线方向定义为向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的方向,而把向量$\overrightarrow{AC}$的长度定义为向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的模.

(2) **减法的定义**　记$\boldsymbol{a}$为一向量,与$\boldsymbol{a}$的模相同而方向相反的向量叫做$\boldsymbol{a}$的负向量,记作$-\boldsymbol{a}$. 我们规定,两个向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的差$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$.

上面的定义同样可以用图来表示:图 8－1－3,图 8－1－4.

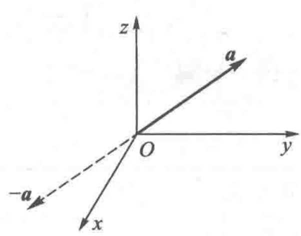

图 8－1－3

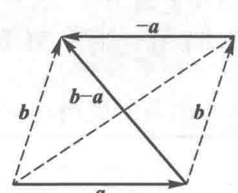

图 8－1－4

(3) **数乘的定义**　向量$\boldsymbol{a}$与实数λ的乘积记作$\lambda\boldsymbol{a}$,规定$\lambda\boldsymbol{a}$是这样一个向量,它的模$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 当$\lambda>0$时,$\lambda\boldsymbol{a}$的方向与$\boldsymbol{a}$相同;当$\lambda<0$时,$\lambda\boldsymbol{a}$的方向与$\boldsymbol{a}$相反;当$\lambda=0$时,$\lambda\boldsymbol{a}$为零向量.

向量数乘的几何意义是将原向量沿同方向(或反方向)进行伸缩.

4. 向量的坐标化

法国数学家拉格朗日曾说过:"只要代数同几何分道扬镳,它们的进展就缓慢,它们的应用就狭窄.但是当这两门科学结合成伴侣时,它们就互相吸取新鲜的活力,从那以后,就以快速的步伐走向完善."

解析几何的建立是数学中的一大创举,笛卡儿和费马是公认的开创解析几何这一方向的数学家.他们用代数方法来研究几何问题,把代数方程与曲线、曲面等联系起来.而用代数方法来研究几何问题的第一步,就是坐标化.

坐标系的建立,使得空间中的每个点都被赋予一个有序实数组(即坐标),从而可以把几何问题转化为代数问题.

向量的模和方向都能用它的坐标表达式来刻画,下面我们给出这个坐标化的过程.

在空间取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$,就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴,依次记为 x 轴,y 轴,z 轴,它们构成一个空间直角坐标系,称为 $Oxyz$ 坐标系.由于向量与它的起点无关,故任意给定一个向量 $\boldsymbol{r}$,都能在该坐标系下找到对应点 M,使得 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,将 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向进行投影分解,得到

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

有序数 x, y, z 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标,记作 $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$;有序数 x, y, z 也称为点 M 在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标,记作 $M(x, y, z)$.

除非特别指出,本书中的空间坐标系均取空间直角坐标系 $Oxyz$.

(1) 三条坐标轴中任意两条可确定一个平面,这样确定的平面叫做坐标面.x 轴,y 轴确定的坐标面叫做 xOy 面,类似地,可以定义 yOz 面,zOx 面.

(2) 三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分称为一个卦限,用罗马数字依次记为第 Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ 卦限.给定一个点,如何判断该点所在卦限?

一般可以按如下步骤:

① 先看 z 轴坐标.若 $z>0$,则属于上半空间,包括第 Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ 卦限;若 $z<0$,则属于下半空间,包括第 Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ 卦限.

② 再看 x 轴和 y 轴坐标.依照 $(+,+)$,$(-,+)$,$(-,-)$,$(+,-)$ 的顺序,分别对应第 Ⅰ(Ⅴ)卦限、第 Ⅱ(Ⅵ)卦限、第 Ⅲ(Ⅶ)卦限和第 Ⅳ(Ⅷ)卦限.

下面我们分别给出各卦限内点的坐标的符号.

第 Ⅰ 卦限	$(+,+,+)$	第 Ⅴ 卦限	$(+,+,-)$
第 Ⅱ 卦限	$(-,+,+)$	第 Ⅵ 卦限	$(-,+,-)$
第 Ⅲ 卦限	$(-,-,+)$	第 Ⅶ 卦限	$(-,-,-)$
第 Ⅳ 卦限	$(+,-,+)$	第 Ⅷ 卦限	$(+,-,-)$

(3) 向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径.一个点与该点的向径具有相同的坐标.记号 (x,y,z) 既表示点 M,又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

5. 向量的投影

向量的投影可以如下定义：一般地，设点 O 与单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定 u 轴. 任给向量 $\boldsymbol{r}$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，再过点 M 作与 u 轴垂直的平面 Π 交 u 轴于点 M'，（点 M' 叫做点 M 在 u 轴上的投影），则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的分向量. 设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$，则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$ 或 $(\boldsymbol{r})_u$，实际上，该投影即为 $\overrightarrow{OM}$ 与 u 轴的单位方向向量 $\boldsymbol{e}$ 的数量积.

（1）图 8－1－5 中，$\angle OM'M$ 是直角. 这是因为，平面 Π 与 u 轴垂直，从而 u 轴与该平面中的所有直线都垂直.

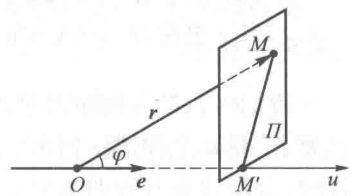

图 8－1－5

（2）以我们常见的直角坐标系为例，若 u 轴是直角坐标系 $Oxyz$ 中的 x 轴，则上图中向量 $\boldsymbol{r}$ 与 u 轴的夹角 φ 是该向量的一个方向角，$\cos\varphi$ 是对应的方向余弦，而 λ 是 $\boldsymbol{r}$ 在 x 轴上的坐标. 特别地，向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 在 x 轴上的投影为 x.

（3）要注意，向量的投影是**数值**，而不是向量. 投影可以是正数、负数或零.

二、重要性质、定理与公式

1. 两向量平行的充分必要条件

如何判断两向量是否平行呢？我们有如下定理：

定理 8.1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

（1）两向量同向和两向量反向，均可以称它们平行. 当 $\lambda>0$ 时，这两个向量同向；当 $\lambda<0$ 时，这两个向量反向. 当 $\lambda=0$ 时，$\boldsymbol{b}$ 是零向量，当然也与 $\boldsymbol{a}$ 平行.

（2）一个非零向量的模是一个非零实数. 一个非零向量除以它的模的结果是得到一个与原向量同方向的单位向量.

2. 向量加法的运算律

（a）交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.［图 8－1－6(a)］

（b）结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.［图 8－1－6(b)］

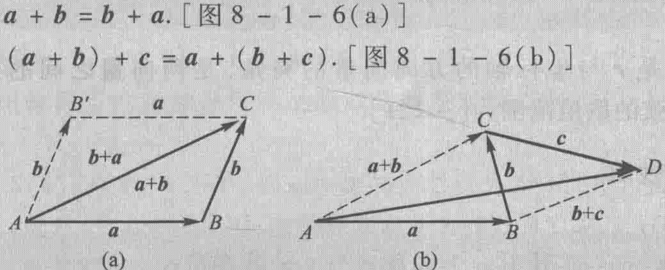

图 8－1－6

图 8－1－6(a) 展示的是向量加法的交换律，图 8－1－6(b) 展示的是向量加法的结合律. 图

8-1-6(a)中,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$体现为:从点$A$出发沿向量$\boldsymbol{a}$前进到达点$B$,再沿向量$\boldsymbol{b}$前进到达的终点与从点$A$出发沿向量$\boldsymbol{b}$前进到达点$B'$,再沿向量$\boldsymbol{a}$前进到达的终点是一致的,都是点$C$.图8-1-6(b)中,$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$体现为:从点$A$出发沿向量$\boldsymbol{a}$前进到达点$B$,再沿向量$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$前进到达的终点与从点$A$出发沿向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$前进到达点$C$,再沿向量$\boldsymbol{c}$前进到达的终点也是一致的,都是点$D$.

3. 向量数乘的运算律

(a) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

(b) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$, $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

我们可以结合向量数乘的几何意义来理解向量数乘的结合律与分配律.以结合律为例,它说的是,向量$\boldsymbol{a}$先伸缩μ倍再伸缩λ倍与先伸缩λ倍再伸缩μ倍,或者直接伸缩$\lambda\mu$倍所得向量是一样的.分配律也有较明显的几何解释,感兴趣的同学可以思考一下如何用图形表示这条运算规律.

4. 利用坐标作向量的线性运算

利用坐标,可以使向量的线性运算表示为相应的坐标的数量运算.

设$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,$\lambda$为实数,则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z),\quad \lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

注意:记号(x,y,z)既可以表示点,又可以表示向量.当它表示向量时,可以对它进行运算;当它表示点时,不能进行运算.

5. 向量的模与方向余弦的坐标表达式

向量$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$的模的坐标表达式为$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

非零向量$\boldsymbol{r}$与三条坐标轴的夹角α,β,γ称为向量$\boldsymbol{r}$的方向角.

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\right)=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}(x,y,z)=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\mathrm{e}_r.$$

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$称为向量$\boldsymbol{r}$的方向余弦.以向量$\boldsymbol{r}$的方向余弦为坐标的向量就是与$\boldsymbol{r}$同方向的单位向量$\mathrm{e}_r$,从而$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

注意:$\boldsymbol{r}$的方向角是$\boldsymbol{r}$与坐标轴的方向向量的夹角,是**两向量之间的夹角**,其取值范围为$[0,\pi]$.因此,方向余弦的取值范围为$[-1,1]$.

6. 向量的投影的性质

(a) $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$,其中$\varphi$为向量$\boldsymbol{a}$与$u$轴的夹角;

(b) $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$;

(c) $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

性质(a)与性质(c)较容易由定义推出,我们给出性质(b)的图解,如图8-1-7,将 u 轴平移,使其过点 A,记为 u',点 A 在 u 轴上的投影为 A',用同样的方法可得到过点 B 且与 u' 轴垂直的平面与 u' 轴的交点 B'',$|\overrightarrow{AB''}| = \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$. 由 B'' 点作 u 轴的垂线,得 $B''B'$,于是 $A'B'B''A$ 是矩形,从而 $|\overrightarrow{AB''}|$ 与 $|\overrightarrow{A'B'}|$ 相等,都等于 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$,因此

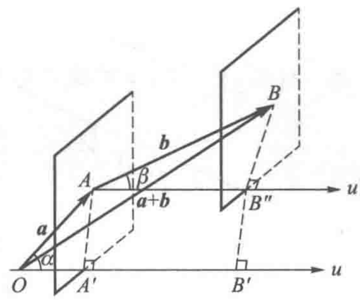

图 8-1-7

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = |\overrightarrow{OB'}| = |\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B'}|$$
$$\xlongequal{O,A',B'\text{ 共线}} |\overrightarrow{OA'}| + |\overrightarrow{A'B'}|$$
$$= \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a} + \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}.$$

由向量投影的性质可知,除了直角坐标系外,我们也可以取不共面的3个单位向量 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{w}$ 和一定点 O 来建立坐标系 $Ouvw$,向量 $\boldsymbol{r}$ 在该坐标系下的坐标($\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$, $\mathrm{Prj}_v\boldsymbol{r}$, $\mathrm{Prj}_w\boldsymbol{r}$)即由它在各坐标轴上的投影组成.

三、典型例题解析

题型导读:

Ⅰ. 特殊位置的点的坐标　　　Ⅲ. 向量的模、方向角与方向余弦

Ⅱ. 向量的线性运算　　　Ⅳ. 向量运算的几何应用

题型 Ⅰ:特殊位置的点的坐标

【例 8.1.1】(1) 求点(1,1,1)关于点(a,b,c)的对称点的坐标. 特别地,求点(1,1,1)关于坐标原点的对称点的坐标.

(2) 求点(1,1,1)到各坐标面的投影点,并求它关于各坐标面的对称点的坐标.

(3) 求点(1,1,1)到各坐标轴的垂线以及垂足坐标,并求它关于各坐标轴的对称点的坐标.

解 记点(1,1,1)为 P_0.

(1) 点(1,1,1)关于点(a,b,c)的对称点应满足点(a,b,c)是所求对称点与点(1,1,1)的连线的中点. 设所求对称点的坐标为(x,y,z),则

$$a = \frac{x+1}{2}, \quad b = \frac{y+1}{2}, \quad c = \frac{z+1}{2}.$$

因此所求对称点的坐标为($2a-1$,$2b-1$,$2c-1$).

点(1,1,1)关于坐标原点的对称点应满足原点是所求对称点与点(1,1,1)的连线的中点,故所求对称点的坐标为(-1,-1,-1).

(2) 如图8-1-8(a),点 $P_0(1,1,1)$ 到 xOy 面的投影点为 $A(1,1,0)$,关于 xOy 面的对称点为 P_1,坐标为(1,1,-1);点 $P_0(1,1,1)$ 到 yOz 面的投影点为 $B(0,1,1)$,关于 yOz 面的对称点为 P_2,坐标为(-1,1,1);点 $P_0(1,1,1)$ 到 zOx 面的投影点为 $C(1,0,1)$,关于 zOx 面的对称点为 P_3,坐标为(1,-1,1).

(3) 如图8-1-8(b),P_0A 为点 P_0 到 xOy 面的垂线,P_0B 为点 P_0 到 yOz 面的垂线,P_0C 为点 P_0 到 zOx 面的垂线.

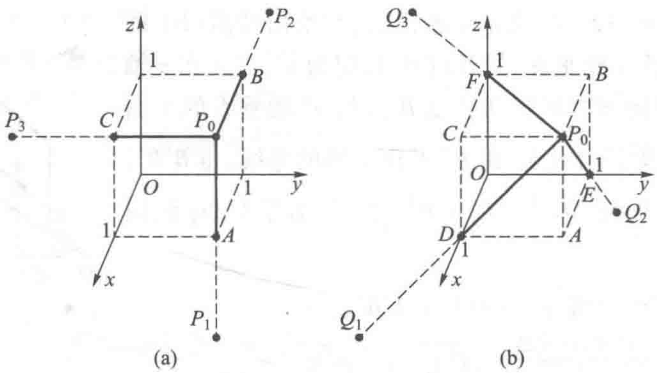

图 8 - 1 - 8

x 轴垂直于正方形 P_0CDA 所在平面,故 x 轴垂直于 P_0D,P_0D 是点 P_0 关于 x 轴的垂线,垂足 D 的坐标为$(1,0,0)$;y 轴垂直于正方形 P_0AEB 所在平面,故 y 轴垂直于 P_0E,P_0E 是点 P_0 关于 y 轴的垂线,垂足 E 的坐标为$(0,1,0)$;z 轴垂直于正方形 P_0BFC 所在平面,故 z 轴垂直于 P_0F,P_0F 是点 P_0 关于 z 轴的垂线,垂足 F 的坐标为$(0,0,1)$.

延长 P_0D,使得 Q_1 为 P_0D 的延长线上一点,满足点 D 为 P_0Q_1 的中点,则点 Q_1 为点 P_0 关于 x 轴的对称点,其坐标为$(1,-1,-1)$;延长 P_0E,使得 Q_2 为 P_0E 的延长线上一点,满足点 E 为 P_0Q_2 的中点,则点 Q_2 为点 P_0 关于 y 轴的对称点,其坐标为$(-1,1,-1)$;延长 P_0F,使得 Q_3 为 P_0F 的延长线上一点,满足点 F 为 P_0Q_3 的中点,则点 Q_3 为点 P_0 关于 z 轴的对称点,其坐标为$(-1,-1,1)$.

注 由本题我们可以总结出点(a,b,c)关于坐标原点、各坐标面以及各坐标轴的对称点的坐标. 这是空间中曲线、曲面关于坐标原点、坐标面以及坐标轴的对称性的基础.

点(a,b,c)关于坐标原点、坐标面及坐标轴的对称点

参照对象	坐标原点	xOy 面	yOz 面	zOx 面
对称点	$(-a,-b,-c)$	$(a,b,-c)$	$(-a,b,c)$	$(a,-b,c)$
参照对象	x 轴	y 轴	z 轴	
对称点	$(a,-b,-c)$	$(-a,b,-c)$	$(-a,-b,c)$	

小结

特殊位置的点的坐标常用于确定曲线、曲面位置. 下面我们总结一下常见的特殊位置的点的坐标:

① 各个卦限的点的坐标特点,见"基本概念"部分.

② 坐标面与坐标轴上的点的坐标.

坐标面上的点的坐标特点是:表示坐标的三个有序数中至少有一个为零. 例如,xOy 面上的点的坐标形如$(x,y,0)$.

坐标轴上的点的坐标特点是:表示坐标的三个有序数中至少有两个为零. 例如,x 轴上的点的坐标形如$(x,0,0)$.

③ 点(x,y,z)在各坐标面上的投影的坐标，以及到各坐标轴的垂线的垂足的坐标. 见例 8.1.1.

④ 给定点关于坐标面、坐标轴以及坐标原点的对称点的坐标. 见例 8.1.1.

题型 Ⅱ：向量的线性运算

【例 8.1.2】设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c}$.

(1) 试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $3\boldsymbol{u}+7\boldsymbol{v}$.

(2) 设 $\boldsymbol{a}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,0)$，$\boldsymbol{c}=(1,1,1)$. 试求 $3\boldsymbol{u}+7\boldsymbol{v}$ 的坐标.

解 (1) 根据向量线性运算的运算律，

$$3\boldsymbol{u}+7\boldsymbol{v}=3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+7(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c})=17\boldsymbol{a}+32\boldsymbol{b}-25\boldsymbol{c}.$$

(2) 利用(1)中的结果，

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{u}+7\boldsymbol{v}&=17\boldsymbol{a}+32\boldsymbol{b}-25\boldsymbol{c}=(17,0,0)+(32,32,0)+(-25,-25,-25)\\&=(24,7,-25).\end{aligned}$$

【例 8.1.3】$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，讨论 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 成立的条件.

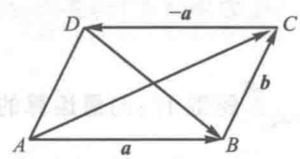

图 8－1－9

分析 本题考查了向量加法的三角形法则. 如图 8－1－9，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 表示的是以 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$ 为边的平行四边形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}$，而 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 表示的是同一个平行四边形的另一条对角线 $\overrightarrow{DB}$.

解 （法一）根据矩形的性质，以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形两条对角线长度相等的充分必要条件是：该平行四边形为矩形，即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

（法二）在学习过第二节的数量积后，我们可以利用数量积来解本题.

由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 可得，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$. 又因为

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},$$

所以由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$ 可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 从而根据数量积的几何意义可知 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

小结

解关于向量的线性运算的题，需要熟练掌握运算律，并会利用坐标来进行运算，如例 8.1.2. 此外，要学会利用"数形结合"的思想来解决问题，如例 8.1.3.

题型 Ⅲ：向量的模、方向角与方向余弦

【例 8.1.4】单位向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴的夹角 α 为 $\dfrac{\pi}{3}$，与 y 轴的夹角 β 为 $\dfrac{\pi}{2}$，求 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

解 设 $\boldsymbol{a}$ 与 z 轴的夹角为 γ. 由于 $\boldsymbol{a}$ 是单位向量，其坐标 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 由 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦构成，满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$