中国数学奥林匹克协作体学校 培训教材

高中奥数专题讲座

主编 李 迅 陈德燕
顾问 裘宗沪 吴建平

2 位数学院士 学术讲座

10 位金牌教练员专题讲座

24 所协作体学校 模拟训练

ECNUP 上海市著名商标 华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

中国数学奥林匹克协作体学校 培训教材

高中奥数专题讲座

主编 李　迅 陈德燕

顾问 裘宗沪 吴建平

编委

陈文科 陈先春 陈兴江 程新忠
邓　晓 顾　滨 何忆捷 李建国
李　响 李朝晖 林天齐 邵　达
施柯杰 宋　超 苏　林 谭祖春
唐小徐 王广廷 王慧兴 王中立
危志刚 吴　边 吴承昊 于杰延
张保才 张端阳 张建强 张　雷
张琳洽 张　琪 张湘君 朱启东
邹　明

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中奥数专题讲座/李迅，陈德燕主编. —上海：华东师范大学出版社，2017

ISBN 978-7-5675-6597-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李…②陈… Ⅲ. ①中学数学课—教学研究—高中 Ⅳ. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 131781 号

高中奥数专题讲座

主　　编　李　迅　陈德燕
总 策 划　倪　明
项目编辑　孔令志　石　战
审读编辑　石　战　周　俊
装帧设计　黄惠敏

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　常熟市文化印刷有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　25.5
字　　数　552 千字
版　　次　2017 年 7 月第 1 版
印　　次　2017 年 7 月第 1 次
书　　号　ISBN 978-7-5675-6597-5/O·280
定　　价　58.00 元

出 版 人　王　焰

序 言

我们数学奥林匹克协作体成立于 1999 年 11 月 2 日 . 2000 年起每年举办一次夏令营. 它讲评解题、练习解题，为参加数学竞赛作准备. 题是有一定难度，比课堂上难，做难题需要时间和精力，不但要循序渐进，而且要有奋斗精神，要坚持，像爬山一样，只有不断奋斗，一直坚持，才能取得最后胜利，登上山顶.

曾有一些参加 IMO 的队员和我谈起，奖牌进入大学后渐渐淡忘了，坚持奋斗精神的培养，倒有时产生较深回味带来启迪，碰到困难能较从容面对，增强克服的信心. 有人说，回忆竞赛的过程，比得奖目标更美好，急躁的心情总是忽视过程，只追求目标，这样的人恐难成大事.

夏令营是竞赛的一个过程，有好多新同学、新老师在一起，帮你学到新的解题方法. 有不少竞赛解题能手是在夏令营成长的，和所有夏令营一样，是快乐时光，是美好的.

祝诸位同学高高兴兴地度过，大有心得收获.

袁亨浣

2017. 4. 10

我所了解的CMO协作体

1999年11月"全国高级中学校长委员会会议"在广州召开，会议期间，中国数学奥林匹克委员会约请有关学校的校长召开了一个小型研讨会，时任中国数学奥林匹克委员会常务副主席的裘宗沪教授主持了这个会议，我当时也应邀参加了，有来自16家学校的校长与会.

会议回顾了开展数学竞赛活动的历史并分析了现状，介绍了各自学校开设数学选修课及活动课的情况，交流探索了数学与科学人才发现和培养的规律，大家一致认为共同构筑一个平台是十分必要的，于是就有了"中国数学奥林匹克协作体".

经过后来的几次"扩军"，目前协作体成员学校有25所：东北育才学校、上海中学、华南师大附中、湖南师大附中、武钢三中、大连24中、人大附中、清华附中、青岛二中、江苏盐城中学、复旦附中、上海延安中学、华中师大一附中、黄冈中学、长沙一中、深圳中学、福州一中、东北师大附中、成都七中、哈师大附中、天津市耀华中学、温州中学、江西鹰潭一中、郑州外国语学校、南京师大附中.

协作体每两年召开一次协作体学校校长会议，确定大政方针；每两年由两位校长共同担任轮值主席，负责实施这两年的工作，2016—2017年的轮值主席是清华附中和福州一中.

协作体每年暑假举办一次协作体内部的高中数学夏令营，出版或汇编由各成员学校提供的专题讲座、模拟试题，供协作体成员校使用.这次福州一中组织出版的材料就是这样一份东西.

十多年来，协作体的工作在成员学校各位领导关心支持和老师们的悉心努力下，取得了令人瞩目的成绩，为我国的数学奥林匹克事业做出了显著的贡献.从2000年到今年中国共派出18只代表队、108人次参加国际数学奥林匹克(IMO)，其中有71人次来自"协作体"成员学校.

我想只要我们充分依靠各个中学的关心重视，充分尊重一线教师们的辛勤劳动，充分调动学生参与数学竞赛的积极性，无论过去、现在、还是将来中国队在IMO这个竞争平台上都是一支强队！衷心祝愿中国数学奥林匹克协助体不断取得新的成绩.

吴建平

2017.4.10

目　录

学术讲座

1. 有限的微积分

时间：2012 年 7 月 24 日

地点：福州一中学术报告厅

主讲人：林群院士

主讲人简介：

林群，中国科学院数学与系统科学研究院研究员，中国科学院院士，第三世界科学院院士，曾任全国人大代表，中国数学会副理事长，现任全国大学生数学竞赛委员会组长.

科学都是做问题(包括猜想)的，那么微积分做什么问题呢？取哪个模型最好？我遇到的是求高问题. 一天，我散步在一棵古树下，听游客在争论如何测树高，有人说只有砍树才行，要砍树吗？

我学过初中三角，意识到一个经济的方法是利用视角，就是计算(斜率×底)，因此不必砍树.

如果问题变复杂，例如测山高，我们将面临一个曲边三角形，怎么办？大曲边三角形可以分割成小直边三角形，但曲与直之间有缝，山高＝(小三角形的高＋缝)的和，可见要求出山高，应计算出这些缝的和. 微积分就是将曲线变直.

用中学数学解决：如果曲线是二次曲线，比如(抛物线)，缝的和＝底；对高次(如 5 次)曲线，缝的和是底的高次多项式. 如：

$$\text{缝的和} = \text{底} + \text{底}^2 + \text{底}^4, \tag{1}$$

(右边各项的系数依赖于曲线本身).

用高等数学解决：如果曲线是光滑曲线，缝的和是底的无限次多项式，如：

$$\text{缝的和} = \text{底} + \text{底}^2 + \text{底}^4 + \cdots + \text{底}^{100} + \cdots, \tag{2}$$

(右边各项的系数依赖于曲线本身)后面的项是底的更高次幂，当底变成小数(如十分之一)，按四舍五入，后面的项就消失了，曲边三角形的高终于用直边三角形求出了.

微积分讲三件事：小高(对应微分)，全高(对应积分)与缝，以及两个结果(1)(2)(万能公式). 其中前面是后面的特例.

全区间$[a, b]$等分成 $m+1$ 个小区间，即在$[a, b]$中等间距地插入 m 个点

$$x_1,\ x_2,\ \cdots x_m,\ h = \frac{b-a}{m+1}.\ x_0 = a,\ x_{m+1} = b.$$

于是我们得到：

$$x_1^2-a^2=(x_0+h)^2-x_0^2=2x_0\cdot h+h^2,$$
$$x_2^2-x_1^2=(x_1+h)^2-x_1^2=2x_1\cdot h+h^2,$$
……
$$b^2-x_m^2=(x_m+h)^2-x_m^2=2x_m\cdot h+h^2,$$

将以上式子(即小高)相加,得全高

$$b^2-a^2=2(x_0+x_1+\cdots+x_m)h+(m+1)h^2, \tag{3}$$

h^2 为小缝,对任一 h, $b^2-a^2-2(x_0+x_1+\cdots+x_m)h=(b-a)h\cdots(3)$ 是 h 的 1 阶多项式,万能公式(2) 的特例. 如果(3) 最后的校正(即 h) 是小数,由四舍五入,那么校正消失,右边简化为第一项 b^2-a^2,而左边的和号变成$\int$(这时其中的曲线逐渐变直),底 h 变成 $\mathrm{d}x$,(3) 变成微积分基本公式$\int_a^b 2x\mathrm{d}x=b^2-a^2$,这里用小数或四舍五入代替极限的概念.

式子(3)的发酵或大爆炸:

$$(3x_0^2+3x_1^2+\cdots+3x_m^2)h=b^3-a^3-\frac{3}{2}(b^2-a^2)h+\frac{1}{2}(b-a)h^2,$$
$$(4x_0^3+4x_1^3+\cdots+4x_m^3)h=b^4-a^4-2(b^3-a^3)h+(b^2-a^2)h^2,$$
$$(5x_0^4+5x_1^4+\cdots+5x_m^4)h=b^5-a^5-\frac{5}{2}(b^4-a^4)h+\frac{5}{3}(b^3-a^3)h^2-\frac{1}{6}(b-a)h^4,$$
$$(6x_0^5+6x_1^5+\cdots+6x_m^5)h=b^6-a^6-3(b^5-a^5)h+\frac{5}{2}(b^4-a^4)h^2-\frac{1}{2}(b^2-a^2)h^4,$$
$$(7x_0^6+7x_1^6+\cdots+7x_m^6)h=b^7-a^7-\frac{7}{2}(b^6-a^6)h+\frac{7}{2}(b^5-a^5)h^2-\frac{7}{6}(b^3-a^3)h^4+\frac{1}{6}(b-a)h^6,$$
$$(8x_0^7+8x_1^7+\cdots+8x_m^7)h=b^8-a^8-4(b^7-a^7)h+\frac{14}{3}(b^6-a^6)h^2-\frac{7}{3}(b^4-a^4)h^4+\frac{2}{3}(b^2-a^2)h^6,$$

……

$$\sum nx^{n-1}h=b^n-a^n-Ch, \tag{4}$$

其中,C 为 h 的多项式,Ch 即缝的和,它们都是万能公式(2)的特例. 式子(4)变成

$$\int_a^b nx^{n-1}\mathrm{d}x=b^n-a^n, \tag{5}$$

(4)(5)合成: 对多项式 $F(x)$,有等式(1)

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=\sum F(x)h+Ch.$$

如果校正(或 h)是小数,由四舍五入,那么校正消失,右边简化成第一项 $f'(x)$,称为左边函数 $f(x)$的导数,$f(x)$在$[a, b]$上的全高由以上小高加起来,

$$f(b)-f(a)=\sum[f(x+h)-f(x)]=\sum f'(x)h+\text{校正}, \tag{6}$$

其中|校正|$<C|h|$如果校正(或 h)是小数,由四舍五入,那么校正消失,左边称为 $f'(x)$的积分,记为

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x. \tag{7}$$

(6)(7)合成: 令 $f'(x)=F(x)$,则$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=\sum F(x)h+$校正,|校正|$<C|h|$,这里不够精确,因为有不等号,现转向光滑曲线,推导精确等式(2). 为此,要用上面不精确的基本公式(7) 与下面精确的泰勒展开式: $f(x)$ 的小高

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{1}{6}f^{(3)}(x)h^3+\frac{1}{24}f^{(4)}(x)h^4+\cdots,$$

$f(x)$的全高

$$f(b)-f(a)=\sum f'(x)h+\sum f''(x)h\frac{1}{2}h+\sum f^{(3)}(x)h\frac{1}{6}h^2+\sum f^{(4)}(x)h\frac{1}{24}h^3+\cdots.$$

又将 $f'(x)$, $f''(x)\cdots$的全高

$$f'(b)-f'(a)=\sum f''(x)h+\sum f^{(3)}(x)h\frac{1}{2}h+\sum f^{(4)}(x)h\frac{1}{6}h^2+\sum f^{(5)}(x)h\frac{1}{24}h^3+\cdots,$$

$$f''(b)-f''(a)=\sum f^{(3)}(x)h+\sum f^{(4)}(x)h\frac{1}{2}h+\sum f^{(5)}(x)h\frac{1}{6}h^2+\sum f^{(5)}(x)h\frac{1}{24}h^3+\cdots,$$

代入 $f(x)$的全高,得万能公式(2)

$$f'(x)=F(x), \int_a^b F(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a),$$

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=\sum F(x)h+[F(b)-F(a)]\frac{h}{2}+[f'(b)-F'(a)]\frac{-h^2}{12}+\cdots,$$

后面不带 h 的奇数项. 这个是微积分的顶峰,也称欧拉-麦克劳林公式.

(林芳整理)

2. 掌握学习的主动权

时间：2015 年 1 月 9 日
地点：福州一中学术报告厅
主讲人：李大潜院士

主讲人简介：

李大潜，1937 年 11 月出生，复旦大学教授，中国科学院院士，法国科学院外籍院士，中法应用数学国际联合实验室中方主任.

各位老师，各位同学，大家好. 因为颁发苏步青数学教育奖的渊源，能够来到福州，来到你们这所闻名遐迩的学校，和大家见面，我感到非常地高兴.

今天我想给大家谈谈掌握学习主动权的问题. 在座的同学们学习都很认真刻苦，老师们也都非常敬业，福州一中在教和学两个方面的成绩是非常突出的，那么为什么要谈这个问题呢？我前不久承担了一个中国科学院的咨询项目，重点调查中学的基础教育. 为此我专门走访了一些中学，到了好几个城市，看到那里中学的同学们学习非常卖力，为了顺利升学，为了考上一个好大学，简直到了拼命的程度，实在使我们非常吃惊. 问他们的校长，你们这样辛辛苦苦培养出来的学生到大学里能够适应吗？校长的回答也非常的干脆和坦诚，他说我只管把他们送进大学，后面的事我就不管了.

我们觉得无论是老师还是校长，虽然他们口口声声地讲素质教育，但目标只有一个，就是追求更高的升学率. 我们为此总结了两句话：轰轰烈烈讲素质教育，扎扎实实抓应试教育. 这样做，学生的学习只能是被动的，只会出现高分低能，不可能使学生有学习上的主动性、自觉性和积极性，不可能使学生有创造精神和创造能力，不可能使学生在今后一生当中健康、持续和快速地成长，不可能使学生将来可以走得更远.

当然这种极端的情况在你们这儿不会发生. 但中学阶段和大学很不一样，往往是老师对学生的安排得多，学生也往往满足、服从老师的安排. 如果形成了习惯，满足于这种被动的学习方式，就谈不到发挥学习的主动性、自觉性和积极性，将来进了大学就难以适应大学的学习生活，或者要经过相当长时间的痛苦的适应过程. 因此，同学们在中学学习阶段就应该对学习有一个明确的目标和定位，要牢牢地掌握学习的主动权，努力为自己一生的发展打下一个良好的基础. 要做到这一点，我觉得首先要有一个明确的认识，要了解中学阶段的学习究竟要达到一个什么样的目标.

中学是人生学习的一个重要阶段. 念了初中就要念高中，念了高中就要念大学，但是念初中的目的不应该只是为了念高中，念高中的目的不应该只是为了念大学. 怀着这样短暂的功利主义的目的来念中学，本质上就是应试教育.

通过中学阶段的学习，一个人要在知识、能力和素质方面得到全面的提升和成长，要为

自己一辈子健康、持续和快速的成长打下一个可靠的根基，怎么能简单地、片面地仅仅归结为升学这样一个目标呢！

牢牢掌握学习的主动权，学得生动活泼，学得扎实灵活，在知识、素质、能力方面有一个飞跃，就可以为自己一生的发展打下良好的基础，而且也一定会如愿进入一所很好的高中或大学，或者在更高一级的学习环境中如鱼得水，取得更大的进步和成就.

你们的中学多年来的办学实践，已经充分证明了它是一座名副其实的优秀的中等学校，相信通过脚踏实地的艰苦努力，在将来一定能更好地启发、调动和发挥广大学生的聪明、智慧和灵气，形成人才辈出的局面，成为弘扬文化的一个重要基地，为国家作出更大的贡献. 从这个意义上说，学校的发展和个人的成才是互为因果的关系. 我们在座的同学如果能更好地学习、更快地成长成才，就是对自己学校的一个很实在的贡献，是回报自己学校的一个最最实际的行动. 希望我们广大的同学能够更好地掌握学习的主动权，更自觉地成长，更迅速地成才. 在这方面，我准备把想到的几点体会和感想，特别是结合自己念中学时的情况，提出来供大家参考：

（一）掌握学习的主动权，要有明确的学习目的

学习不能只是为了应试和升学，而应该是为了充实自己，提高自己，为自己一生的进步和发展打下良好的基础.

自觉地把个人的前途和命运与国家的前途和命运联系在一起，是一种最根本的觉悟. 没有国家的独立自主和繁荣富强，就不可能有我们自己的全面成长和迅速成才，个人的前途和命运是与国家的前途和命运紧密联系在一起的.

一个有自信的年轻人，应具有献身科学、报效祖国、造福人类的宏图大志，下决心通过自己的努力使国家变得更美好，人民变得更幸福，并且在这个过程中而不是离开这个过程，找到自己的事业，找准自己的位置，实现自己的理想和抱负. 也只有这样明确的学习目的，才能化为源源不断的动力，支持鼓励一个人一辈子坚持学习，不断取得新的进步，真正学有所成.

（二）掌握学习的主动权，要注意德智体美的全面发展

中学阶段是长身体、长知识、长智慧、长才能的关键阶段，也是人生观、世界观、价值观基本形成的关键阶段. 同时在中学阶段，数理化、天地生、文史哲、音体美，门门功课都会涉及，为一个人接受全面训练、促进全面成长提供了最有利的条件. 并且，中学阶段学生年纪轻，精力充沛，记忆力强，脑子灵活，学过的东西印象深刻，不易忘记.

在这个打基础的阶段，要为自己一生的发展打下全面又坚实的基础. 只有基础全面扎实，才能构建高楼大厦，才能适应社会多方面的需要，才能顺应科技的飞速进步，才能及时把握各种机遇，才能取得更大的成功和发展.

同时，要争取做到文理相通，文理交融，相得益彰. 一个人要成功，不仅要有数学家的严谨和专注，也要有诗人的激情与遐想. 文理相通，互相促进，是一个人能够成才、成功的重要经验.

（三）掌握学习的主动权，要注意把学习知识、提高能力和培养素质有机结合

一分耕耘一分收获，要提倡刻苦认真的学习态度. 要培养学习的兴趣，不断改进学习方

法和学习习惯，努力学得积极主动、生动活泼，不做书本的奴隶，要做知识的主人，牢牢掌握学习的主动权.

特别重要的是，大家不仅要学，而且要问. 不会发问就进不了科学的大门，而且要问在点子上，问出水平来，就必须思考，而且是认真的思考. 先思后问，多思勤问，才是正确的方式.

不仅要向老师发问，向书本发问，还要经常向自己发问，形成思考的习惯，让思维一直处于活跃的状态. 这就是一种抓住学习主动权的表现，一定会使自己聪明起来，学习也会变得更为有趣，更有效率.

（四）掌握学习的主动权，要养成坚持学习的习惯

十年树木，百年树人. 看一个人是否成才，不能看一时一事，而是要看长期的效果，看他一生对国家和人类做出的成绩和贡献. 学习是一辈子的事，来日方长，只要从现在开始努力，并坚持不懈，持之以恒，就一定能后来居上.

做学问贵在坚持，把学习和创造作为毕生追求的事业，是老一辈数学家传承下来的宝贵精神财富. 很多事实说明：当机遇出现在面前时，若已有了适当的准备，就掌握了主动权. 机遇总是属于那些有所准备、因而能够战胜挑战的人.

（五）掌握学习的主动权，要根据自己的实际情况，不断改进自己的学习方法，提高自己的学习效率

（1）除了总的原则之外，不同的学习科目应有不同的学习方法，是不能一刀切的，需要认真总结. 如学习数学，不应把数学只看成一堆概念、定义、定理和证明的堆积，死记硬背，把自己的头脑变成一本数学字典，而忘记了与数学学习有关的最根本的三件事：数学知识的来龙去脉，数学的精神实质和思想方法，数学的人文内涵.

（2）一个优秀的学生不应局限于老师的讲授和教材上的内容，而应该有一个广泛涉猎的习惯. 在课外时间，学生可以多看一些读物、小说、科普著作和杂志，开拓自己的视野，启迪自己的心灵，使自己更有学习上的生机活力，也更能提高自己学习的兴趣和主动性.

（3）养成自学的习惯，不断提高自学的能力和水平. 学习是终身的任务，活到老，学到老. 不能期望一辈子有老师在身旁指导，要下决心培养自学的习惯和能力.

（4）周围的同学是自己最好的老师. 能够注意看到，并从内心深处欣赏同学身上的长处，就会得到很多的启发.

（5）要勇于并擅于从失败中吸取教训，使自己成熟起来.

最后，我跟大家分享恩格斯在《自然辩证法》这本书导言当中的一段话，这也是我长期以来信奉的格言：近代自然科学，从这样一个伟大的时代算起，这个时代法国人称之为文艺复兴，是从十五世纪后半期开始的. 这是一个人类前所未有的最伟大的进步的革命，是一个需要并且产生了巨人，在思维能力上，热情上和性格上，在多才多艺上和学识渊博上的巨人的时代. 那时，差不多没有一个著名人物不曾做过长途的旅行，不会说四五种语言，不在许多专业放射出光芒. 一些人用笔和舌，一些人用剑，而许多人两者并用，因此才有了使他们成为完人的性格上的完满和坚强.

愿大家站在巨人的肩膀上，跟着巨人的步伐，牢牢掌握学习的主动权，在学业上取得更大的成就和进步，为我们国家增光添彩. 谢谢大家.

讲座问答：

问：老师您好，刚才您说让我们思考一个问题：为什么负负得正，这个问题困扰我很久了，能请您解释一下吗？

答：负负得正是算术中一个重要的运算规律. 从数轴上的点来看，原点右边是正值，原点左边是负值. 乘上一个负号就相当于从左边跳到右边，或者从右边跳到左边. 而乘两次负号，就等于从左边跳到右边、再从右边跳回左边，等于没有变化. 从哲学上讲，这就是否定之否定. 否定一次再否定一次就变成肯定了.

问：老师您好，做数学时要有很强的集中注意力，您对这点有什么比较好的方法吗？

答：做好任何事情都需要集中注意力，数学也不例外. 第一，你要对所做的事情有兴趣. 有兴趣了，坚持的时间就能比较长一点；第二，也不必过分地苛求自己，假如累了就休息休息. 让脑子保持一个清醒的状态，保持一个活跃的状态，使效率提高才是最主要的.

问：请问当到达您这样数学家的高度的时候，您觉得研究数学是单纯地把它当作一门工具来研究，还是有什么其他的意义？

答：关于数学的研究，有两种说法，一种叫纯粹数学，一种叫应用数学. 简单地讲，数学的发展，在根本上，是现实世界的需要，但当数学成为一门学科之后，它内部也有它的矛盾运动，它自己的数学问题. 有些数学家就喜欢数学中出现的难题或者猜想，还有些数学家对数学怎么应用于实际更感兴趣. 有这样两种不同类型的数学家，他们风格不同，目标也不同，因此有了纯粹数学和应用数学之分. 但是，这两方面不是无关联的，它们相互之间是可以转化的，因而也是不可能分得非常清楚的.

（蒋燕敏整理）

1. 函数问题

清华大学附属中学　王慧兴

一、知识提要

(一) 函数及其性质

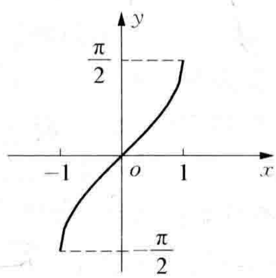
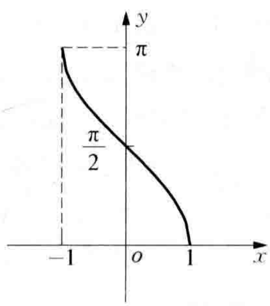
(1) 理解函数定义及其表示方法,基于图象理解函数性质(单调性、对称性、周期性、凹凸性,等),发展直觉意识.

(2) 准确理解函数图象平移、对称以及伸缩变换在解析式上的表现;区分函数图象自对称与两个函数图象之间的对称性条件.

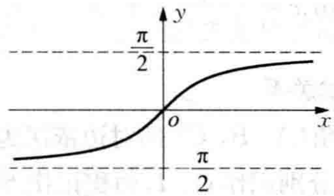
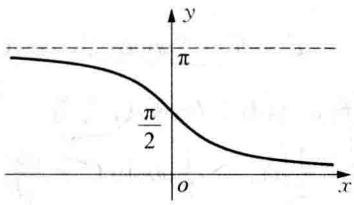
(3) 掌握导数定义、理解导函数、掌握求导方法,会求单调区间、极值与最值;会用切线与弦线建立函数不等式;自觉把导数应用于探究函数问题,培育整体把握的数学学习习惯.

(二) 基本初等函数与典型函数

应基于函数的图象体验、理解相应函数的性质,这里从略;由于常态学习没有反三角函数,下面给出反三角函数的图象与性质.

函数	定义	图象	性质
$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $\sin(\arcsin x)=x$	 对称中心(0, 0)	增函数 $\arcsin(-x)$ $=-\arcsin x$
$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $\arccos x\in[0,\pi]$ $\cos(\arccos x)=x$	 对称中心$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	减函数 $\arccos(-x)$ $=\pi-\arccos x$ $\arccos x+\arcsin x$ $=\frac{\pi}{2}$

续表

函数	定义	图象	性质
$y=\arctan x$	$x\in\mathbf{R}$ $\arctan x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ $\tan(\arctan x)=x$	 对称中心(0, 0)	增函数 $\arctan(-x)$ $=-\arctan x$
$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in\mathbf{R}$ $\operatorname{arccot} x\in(0,\ \pi)$ $\cot(\operatorname{arccot} x)=x$	 对称中心$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$	减函数 $\operatorname{arccot}(-x)$ $=\pi-\operatorname{arccot} x$ $\arctan x+\operatorname{arccot} x$ $=\frac{\pi}{2}$

(三) 三角公式

在三角函数检测中,高联比高考更注重三角变换,这植根于三角公式的正用、逆用、变形用、组合用.

1. 教材中基本公式

终边相同的角同名函数值对应相等,同角三角函数之间的关系,诱导公式,两角和与差的展开公式,二倍角公式,等等.

2. 合成公式:$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+y)$,其中 y 由 $\cos y=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 以及 $\sin y=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 确定;也可合成为 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+y)$,等等.

3. 公式的组合使用

譬如遇到变换 $\sin x\cos y$,就应自觉调用 $\sin(x+y)$ 与 $\sin(x-y)$,要变换 $\cos x\cos y$,就要调用 $\cos(x+y)$ 与 $\cos(x-y)$,等等,要能够组合出新公式.

4. 补充几个三倍角公式

$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$, $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$,

$\sin 3x=4\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, $\cos 3x=4\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

5. 万能公式引发万能代换

万能公式:$\sin x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$, $\cos x=\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$, $\tan x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$,

换元 $\tan\frac{x}{2}=t$，得万能替换公式，架起代数函数与三角函数之间的连结：

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \tan x=\frac{2t}{1-t^2}.$$

6. 三角形中的基本关系

记 $\triangle ABC$ 三个内角$(A,\ B,\ C)$ 的对边依次为$(a,\ b,\ c)$，外接圆半径与内切圆半径分别记为 R、r，外心与内心分别记作 O、I，面积记作 S，则有

(1) 正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

(2) 余弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，等等.

(3) 射影定理：$c=a\cos B+b\cos A$，等等.

(4) 面积公式：$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$

$$=rR(\sin A+\sin B+\sin C)=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{1}{4}(a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C).$$

(5) 重要不等式：$\sin x<x<\tan x$，$\forall x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

(6) 嵌入不等式：如果 $A+B+C=\pi$，则 $\forall x,\ y,\ z\in\mathbf{R}$，都有

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C,$$

"$=$"成立的条件是 $yz\sin A=zx\sin B=xy\sin C$.

(7) 自建恒等式：$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$，等等.

(8) 自建不等式：$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$，等等.

7. 基于对称与向量建构三角公式

$$\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0,$$

$$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0,$$

等等.

(四) 典型函数

1. 简单的二次分式函数

会用基本初等函数图象叠加出稍复杂的函数图象，基于图象体验其单调区间、对称性、凹凸性，等基本性质. 简单的二次分式函数图象呈现"对勾函数"、"单勾函数"、"无勾函数"以及"谷峰函数"，等等.