

儿童数学教育丛书

吴正宪 张丹◎主编



LEARNING BY DRAWING:
A WAY TO MASTER MATHS
FOR THE KIDS

让儿童 在涂画 中学习数学

吴正宪 贾福录◎主 编

陈凤伟 孙佳威◎副主编



教育科学出版社

ESPH Educational Science Publishing House

儿童数学教育丛书

吴正宪 张丹◎主编

让儿童 在涂画 中学数学

吴正宪 贾福录◎主 编

陈凤伟 孙佳威◎副主编

教育科学出版社

· 北 京 ·

出版人 李 东
项目统筹 郑 莉
责任编辑 杨建伟
版式设计 宗沅书装 刘 莹
责任校对 贾静芳
责任印制 叶小峰

图书在版编目 (CIP) 数据

让儿童在涂画中学数学 / 吴正宪, 贾福录主编. —
北京: 教育科学出版社, 2017.6
(儿童数学教育丛书 / 吴正宪, 张丹主编)
ISBN 978-7-5191-1103-8

I. ①让… II. ①吴… ②贾… III. ①小学数学课—
教学研究 IV. ① G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 121146 号

儿童数学教育丛书
让儿童在涂画中学数学
RANG ERTONG ZAI TUHUA ZHONG XUE SHUXUE

出版发行	教育科学出版社	市场部电话	010-64989009
社 址	北京·朝阳区安慧北里安园甲 9 号	编辑部电话	010-64981151
邮 编	100101	网 址	http://www.esph.com.cn
传 真	010-64891796		
经 销	各地新华书店		
制 作	宗沅书装		
印 刷	天津市银博印刷集团有限公司		
开 本	169 毫米 × 239 毫米 16 开	版 次	2017 年 6 月第 1 版
印 张	9.5	印 次	2017 年 6 月第 1 次印刷
字 数	121 千	定 价	40.00 元

如有印装质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。



LEARNING BY DRAWING:
A WAY TO MASTER MATHS
FOR THE KIDS

创设“好吃又有营养”的儿童数学教育

——儿童数学教育本土理论与实践的探索

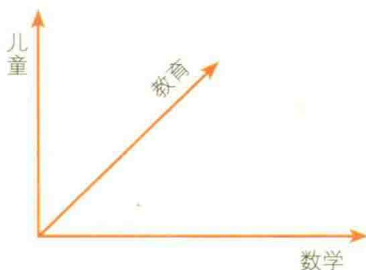
多年来，我一直在思考：儿童需要学习什么样的数学？儿童喜欢以什么样的方式学数学？儿童到底应该从数学学习中获得什么？数学又可以为儿童的可持续成长提供什么？同时，我也一直在追问：作为教师，我们应该怎样为儿童创设“好吃又有营养”^①的数学教育？我们又应该为儿童的全面发展做些什么？令人欣喜的是，“儿童数学教育丛书”的《让儿童在问题中学数学》《让儿童在对话中学数学》《让儿童在涂画中学数学》和《发展儿童数学关键能力》四本书，就从不同的维度对这些问题进行了回应。丛书讲述了儿童数学学习的故事，同时也记录了一线教师、教研员开展儿童数学教育研究的历程与理性思考。这里的儿童数学教育理论与智慧是从课堂里生长出来的，是经过坚守在一线的教师、教研员长期的教学实践而生成的，它具有本土性、实践性、可操作性，值得与大家共同分享。

丛书的四本书围绕“儿童数学教育”这个主题，从不同的切入点展开讨论。儿童数学教育的内涵到底是什么？怎样来诠释它？此时我可能还很难一言以概之，但是多年的实践让我对儿童数学教育有了自己独特的理解。在我的心中，儿童数

^① 关于“好吃又有营养”的数学我已多次表达，它是具有双重价值取向的数学教育。“有营养”是从学习内容和学习资源来讲的，要让儿童在学习数学知识的过程中获得终身可持续发展所需要的基本知识、基本技能、数学思想方法、基本数学活动经验、科学的探究态度及解决实际问题的创新能力。“好吃”是从教学方式和学习方式来讲的，要把有营养的数学烹调成适合儿童口味的数学，也就是儿童想学的数学、爱学的数学、乐学的数学、能学的数学，达到让儿童想学、爱学、学会、会学的目的，提升儿童的学习力，让儿童学有后劲。

学教育已经不仅仅是“研究数量关系和空间形式”的一门科学，它还是一种理性精神，一种科学态度，一种文化传承，一种思维方式，一种交流语言，一种特殊工具。因此可以说，儿童数学教育就是教书育人的重要过程。

我认为，儿童数学教育由三个要素组合而成，即儿童、数学、教育。它们共同构架起一个立体坐标系（见下图）。



在儿童数学教育的立体坐标系中，顶天立地的纵轴上清晰地书写着“儿童”。它提醒我们，关注儿童是教育工作的关键。我们要把握儿童的认知特点和学习规律，坚持全面育人——这不仅仅包括“知识技能”“认知风格”“思维水平”等维度，也涵盖了“情感、态度、价值观”层面。关注儿童，才不会陷入学科本位，才不会只关注基础知识、基本技能而忽略其他。

坐标系中向右伸展出去的横轴上清晰地书写着“数学”。它提醒我们，关注数学是我们学科独有的重要任务，无可替代。只有关注数学、研究数学，把握数学本质，才不会使教学偏离数学的轨道，才能让儿童拥有数学视角与数学思维，为教学注入科学的科学元素，不违背数学的初衷。

坐标系中支撑它从“平面”走向“立体”的关键轴上清晰地书写着“教育”。它提醒我们，要做的是儿童的数学教育，教书育人是重要使命。“教育”是人与人的理解与沟通，它用恰当的方式让儿童感受数学学习的意义和价值，体会数学知识的广泛应用，感受数学思维的独特魅力，从而爱学数学、善学数学、会学数学，以便将来高质量地工作和生活。

因此，作为小学数学教师，一是要理解儿童，研究儿童学习的规律；二是要

理解数学，研究数学的本质属性；三是要理解教育特别是数学教育，研究教育特别是数学教育的规律。只有在理解和研究儿童、理解和研究数学的基础上，才能更好地理解和研究儿童数学教育。

丛书明确地提出了“儿童数学教育”的理念和教学策略，确立了将“儿童”作为数学教育研究和实践对象的基本立场，强调以儿童的全面发展为目的，满足儿童的发展需求，遵循儿童的发展规律，努力为儿童创设“好吃又有营养”的数学教育。丛书正是对儿童数学教育本土理论与实践研究的丰富和发展。四本书聚焦一个主题——“儿童数学教育”，又各有特色和侧重——分别从引导儿童“在问题中学数学”“在涂画中学数学”“在对话中学数学”三个不同的维度展开，提供了创设“好吃又有营养”的儿童数学教育的三种途径和方式，最终实现“发展儿童数学关键能力”这一目的。

四本书都以给教师提建议的方式为特色，每个部分中的每篇文章从标题开始就体现出建议特色，并在其后的内容中通过多个栏目阐释这个建议：首先通过“教学故事”引出问题，再通过“吴老师说”分析点评，继而通过“为你支招”给出具体的、可操作的实践策略，最后通过“观点聚焦”再次点明主旨，帮助教师获得提升。

丛书主要以第二人称“你”的方式展开叙述，将其中的理念向教师们娓娓道来，阐述实实在在的“招”，并进行图文并茂的案例式解读，为教师的实践提供脚手架。丛书每本书的字里行间都自然流淌着教师对儿童的热爱与理解，对儿童数学学习规律的敬畏与尊重。读完每一个建议，如果作为读者的你有了自己的感悟和实践案例，还可以随时记录在“你的感想与实践”栏目中，从而更好地丰富自己对儿童数学教育的理解和实践。

《让儿童在问题中学数学》一书重点阐述了如何通过问题引领儿童的数学学习。“学起于思，思源于疑。”疑是最容易引起探索反射的，思维也就应运而生。有了问题、疑问和惊奇，儿童才能积极主动地思考。问题引领儿童学习的过程，正是使儿童经历发现问题、解决问题同时又生成问题的过程。一个个有趣且有价值的“问题串”由浅入深，激励儿童进行深度思考。环环相扣的问题由表及里，

使思维得到延伸。恰到好处的“问题串”引起儿童的认知冲突，打破儿童的认知平衡。一个个问题的抛出，一个个思维高潮的迭起，搅动思维的涟漪，把课堂的温度建立在思维的深度上，使儿童处于欲罢不能的状态，沉浸在自主探索的气氛中，感受着学习数学的乐趣与价值。有了问题就会有思考，“不愤不启，不悱不发”，从而引发儿童思维共振，使儿童主动地投入探索之中。

《让儿童在对话中学数学》一书重点阐述了如何帮助儿童在对话中理解和学习数学。儿童有四大天性：好奇心、好探究、好秩序和好分享。^①课堂学习中既要有儿童个体的独立思考探究，也要有群体的交流分享。这种相互讨论、倾听、补充、调整、修正、欣赏、沟通与分享的学习过程，为儿童的发展提供了重要契机。要鼓励儿童敢讲话、会讲话、善提问、敢追问，学会与同伴对话、交流、分享；鼓励儿童用自己原生态的语言诠释对数学概念的理解；鼓励儿童充分表达，注重儿童“讲数学”，让他们把自己的思考说出来。学习中要营造民主平等交流的氛围，让儿童在争辩中获得正确的认识，深化对知识的理解，激活思维。要使“一言堂”的数学课堂变成师生互动交流的“群言堂”。课堂上要让儿童有话可说，有问题可质疑。巧妙的设问、适时的追问、恰到好处的“煽风点火”和环环相扣的问题，搅动儿童的思维，让思考在对话中调整、在追问中丰富、在反思中深刻，使思维品质得到良好的发展。

《让儿童在涂画中学数学》一书重点阐述了如何在涂涂画画中帮助儿童理解和学习数学。数学是严谨、抽象的，儿童则以直观、形象思维为主，二者之间的矛盾是影响儿童学好数学的因素之一。儿童喜欢涂画，它是儿童自觉进行的游戏。涂画不仅能表达儿童的内心世界，开启儿童的思维，激发儿童自身的潜能，唤起儿童创造的活力，还能培养儿童的专注力和观察、分析、想象的能力。我们能否让直观、形象、有趣的涂画成为儿童数学学习的有效路径呢？带着这样的思考，该书作者团队开展了让儿童在涂画中学习数学的实践探索。实践印证了：图画蕴含着丰富的数学信息；涂画能唤起儿童已有的经验；涂画能帮助儿童理解数学概

① 任景业. 分享孩子的智慧：改进教学的建议 [M]. 长春：东北师范大学出版社，2014：7.

念和数量关系；涂画是儿童重要的表达方式；涂画是儿童学习数学的工具；涂画是促进儿童有效地学好数学的重要途径。

《发展儿童数学关键能力》一书重点阐述了如何帮助儿童在数学学习中提升数学素养和数学关键能力。该书对数学能力要素中处于中心位置，最基本、最重要、最关键、能起决定作用的能力进行了筛选，梳理出七个数学关键能力——数感、符号意识、运算能力、空间观念、数据分析观念、推理能力和模型思想，并通过一线教师丰富的教学故事和鲜活的教学案例对这些关键能力进行了解读。一方面，它对儿童数学关键能力的内涵进行阐述，明确从数学核心素养的角度整体把握儿童数学关键能力；另一方面，它结合教学实际给出具有实操性的“招”，使教师“有招可依”。该书不仅有数学核心素养理念的引领，还有典型案例与成功实践经验的引领，更加凸显发展儿童数学关键能力的“实操性”。

这四本书从一个主题、多个维度阐述了我们对于儿童数学教育本土理论与实践的再思考。我们要坚守“以儿童发展为本”的教育理念，坚持为儿童创设“好吃又有营养”的数学教育。儿童的需求和喜爱，就是我们前行的动力。我们愿与你一起站在儿童视角审视儿童数学教育、研究儿童数学教育、实践儿童数学教育，愿更多的儿童能够享受到高质量的数学教育。

由于我们的认识水平和能力有限，书中难免有不妥之处，还请批评指正。

北京教育科学研究院 吴正宪

2017年4月

走进儿童的数学“涂画”世界

什么是儿童？儿童是发展中的人，存在着与生俱来的潜能，这种潜能是自然的、向上的、生动的、发展的，它具有蓬勃的生命力量，具有需要开发的创造力。

什么是数学？如果你问一位数学家“为什么要研究纯粹数学”，你能想象出他们是怎么回答的吗？很多数学家的答案简洁到只有一个字，那就是“美”！也许这恰好说明，一切美好的事物，都吸引着人类追随的目光、探索的脚步、执着的精神，都能让人获得独特的经历和感受！

成人尚且如此，儿童呢？儿童作为自然人，他们的眼中有数学吗？儿童作为学习人，他们又是怎么认识数学的？他们在数学学习中获得了怎样的感受？在未来成长的道路上，这些感受会给儿童留下怎样的印记？



（该图画为儿童作品，出于尊重儿童原创的考虑，书中类似图画作品均原貌呈现）

1. 涂画是儿童重要的表达方式

毕加索曾在参观了儿童的画展后说：“我花了终生的时间去学习如何画得像这些孩子一样。”

儿童的涂画是什么样子的？儿童的涂画是丰富多彩的，它有着丰富的情绪、情感和内容；儿童的涂画是纯粹的，随意、直接的线条以及各异的图形，汇聚着他们眼睛看到的、心中想到的、直觉体会到的世界；儿童的涂画是极富个性的，他是谁，他的画就是谁，没有掩饰，不受周围嘈杂事物的干扰；儿童的涂画更是充满创意的，他们会用无拘无束的遐想让线条、图形、色彩长上翱翔的翅膀……



一个儿童就是一个完整的世界。观察儿童的涂画，他们的线条是带着强烈的情感与情绪的，并且线条在儿童的情感与情绪的控制下改变着方向和强弱。

如果儿童涂画中的线条是生硬的、混杂的、重叠的，颜色是暗淡的，这些表明他们当下或许正有着消极的情绪；相反，如果儿童涂画中的线条是柔和的、丰富的，颜色是明快的，则或许表明儿童的情绪是积极的，心情也是不错的。（见下图）所以说，儿童的涂画是表达他们内心世界的重要方式，他们用这样的方式向周围表达着他喜欢什么或不喜欢什么、他高兴了或是难过了……



看，数学城堡！这是一种怎样的欣喜、兴奋的状态？是神奇的数学让他获得了无以言表的感觉，他向周围宣布“数学让我成了超人”，他是拥有强大城堡的超人，他有超能力！

此时，儿童表达的不仅是自己的状态，还有对世界的认识、对数学的认识。他的这种表达是有需求的，他需要被认可，认可他变得强大了，是“超人”了。还要认可什么？认可他真的长大了，站在了高高的城堡上，这是他继续成长的动力。



所以，一个真正的教育者，一名好老师会始终有着一颗纯真的童心，能够用儿童的眼睛去观察，用儿童的耳朵去倾听，用儿童的兴趣去探寻，用儿童的大脑去思考，用儿童的感情去热爱。就这样用纯粹的心做专业的事，用心地给每一个儿童提供帮助，善待、呵护每一个儿童的好奇心，由衷地去理解每一个儿童的情感体验，成就每一个儿童梦想。

2. 儿童涂画里蕴含着丰富的数学信息

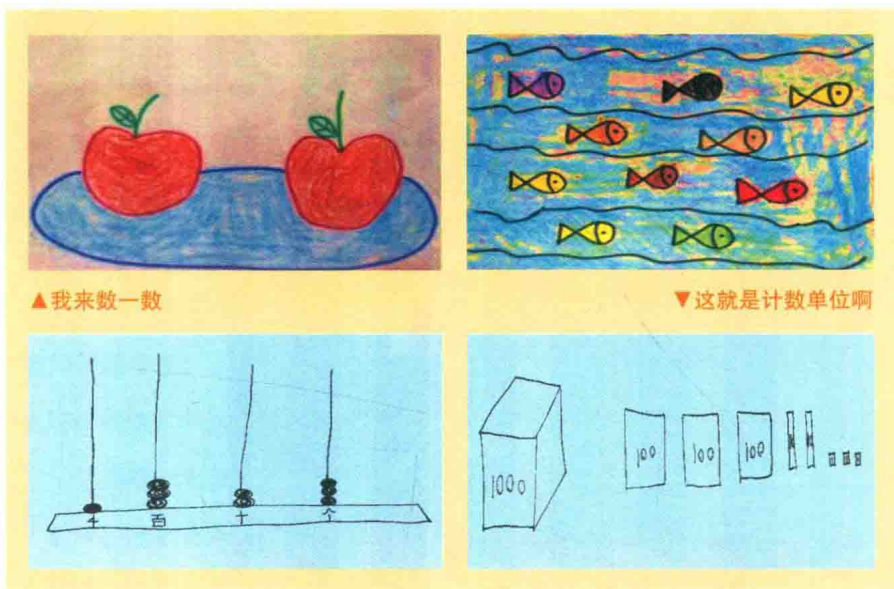
儿童的天性决定了他们能通过丰富多彩的涂画表达同样丰富多彩的生活，这些内容中自然少不了数学的身影，因为数学自始至终都在儿童的生活里。

(1) 走进“数”的世界。

看，从认数开始，儿童就是用涂画的方式将生活中的“数”和数学中的“数”进行对接的，从理解“基数”的意义、认识“序数”的含义，到初步感知“十进制值制”，进而进行加法、减法的运算……

不管是盘子里的“2个”苹果，还是水中游动的“一群”鱼，都是他们对数的初步感知，是“生活数学”向“数学”过渡时不可或缺的“数感”积累。这种积累是儿童走向数学学习的开端。

“十进制位置值”是数与代数领域的核心概念，借助“神奇的小珠子”和计数器，将“计数单位”和“数位”的含义变得形象、直观了。

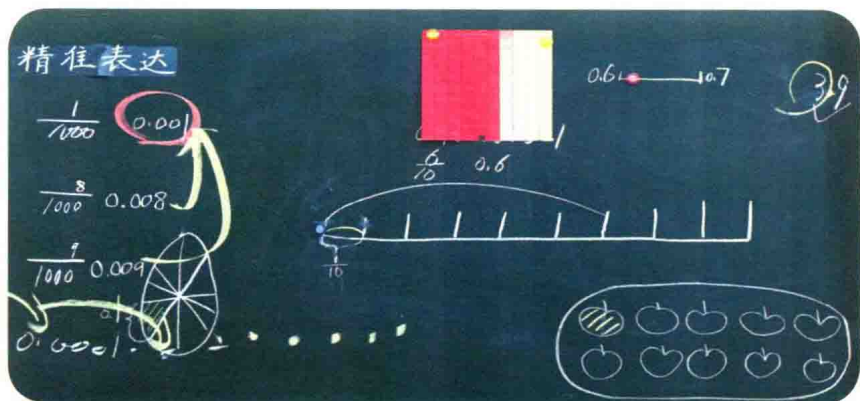


这正是：少了数的严谨，认知只能停留在表面；少了形的直观，认知则空洞抽象。只有依据儿童的特点，遵从数学自身的规律，将二者完美结合，才能和谐统一。

(2) “涂”出关系，“画”出联系。

走进吴正宪老师“小数的意义”的课堂教学，四年级的学生在小数的认识过程中，看到了这样一幅画面。（见下页图）

吴老师用“小数到底是什么样的？”唤起儿童先前的经验。看那个红白的条形图，是儿童之前学习“分数的初步认识”时留下的，由此让儿童联想到小数如何呈现。那个“平均分的圆”沟通了小数和分数的关系，而表示整体与部分关系的“苹果图”和“线段图”，则由具体到抽象地呈现了小数的“十进制”关系。



这些“原汁原味”的数学图，将儿童“头脑”中的小数和概括出的数学中的小数对接起来，让数学知识“活”了起来，成了儿童亲近数学的好帮手。

3. 涂画是儿童学习数学的工具

(1) 你为什么擦了我的桃子？

有这样一个场景让吴正宪老师终生不忘。

在“分数的初步认识”的课堂上，吴老师让学生结合生活经验表示出 $\frac{1}{2}$ 。有学生画了一个桃子，用一把剪刀把它切开。按照预先的教学设计，只需用这个环节引出这些都表示 $\frac{1}{2}$ 就可以了。所以，当达到了预设的效果后，吴老师就把学生表示出的 $\frac{1}{2}$ 都擦掉了，包括这个桃子。

但是，意想不到的情景出现了，桃子的作者，那个小男生看到桃子被擦后，把铅笔盒一扣，再也不听吴老师讲课了……

下课后，吴老师问小男生：“为什么开始上课时那么积极，后来就不高兴了，不参与啦？”没想到小男生反问道：“你为什么要我画，又把我画的桃子擦掉？”吴老师有些猝不及防，怎么解释呢？她陷入沉思……

吴老师问自己：“我真正尊重学生了吗？读懂他们想要表达的是什么呢？我还是习惯以自己的理解来处理——完成我预设使命的‘桃子’是要‘被擦掉’的！”

于是，吴老师再次执教此课时调整了做法，当再进入上述情节时，吴老师询问学生：“现在看你们表示的 $\frac{1}{2}$ ，认为可以擦的就擦了，愿意留的也可以保留。”这时的结果是什么样子的？

结果有三名学生不愿意擦，要保留下来，吴老师用红笔把这三幅图圈了起来。随着学习进程的深入，有的学生表示先前画的可以擦了。可是直到下课，还有一名学生始终保留着他的 $\frac{1}{2}$ 图。

透过这个案例，你是否感受到，画图是儿童学习数学的一种工具，与儿童的认知特点相契合？为什么有人开始就不用保留 $\frac{1}{2}$ 图，而有的则是在逐步理解的过程中表示可以不保留了，还有的则一直保留着？这分明是在提示老师，学生“数学化”的进程是不一样的，学生从认识到理解、到抽象出数的概念，是需要过程的。

数学是抽象概括的，同时也是直观形象的。儿童的涂画正好可以把“数与形”相结合，将抽象的数学问题直观化、形象化，以儿童的视角和方式揭示出数学的本质，使儿童逐步向生活化的、不十分严谨的数学告别，向数学化的、严谨的方向过渡。渡过数学认知难点的工具，则是他们自己“发明”的“涂画”。

(2) “+1”还是“-1”呢？

问题：“小朋友站成一队，从前往后数小明是第5个，从后往前数小明也是第5个，这队一共有多少人？”学生的解法各异，有 $5+5+1=11$ ，有

$5+5-1=9$ ，有 $4+1+4=9$ ，还有 $5+4=9$ ，也有的学生不会列式但能说出结果。究竟是“+1”还是“-1”呢？怎么才能让学生真正理解呢？吴正宪老师是这样做的。

吴老师像儿童一样画了画。从前面数是第5个，从后面数还是第5个，那就给这个“第5”点上红色，这个“红点”就是小明。现在给前5个圈一个圈，再给后5个圈一个圈。咦？两次都圈上了“小明”，那么应该怎样列式表示呢？学生看着图，经过讨论确认是“ $5+5-1$ ， $4+1+4$ ， $5+4$ ”。



在有关“数的认识”教学中，“几个和第几个”的问题往往让儿童陷入困境，这是为什么呢？是因为儿童在生活中对“基数”积累的经验比较丰富，而对“序数”积累的经验不足。在生活中，儿童经常会遇到“这是多少个？”“一共有多少？”的问题，因此积累了“数数”“算数”的经验。

怎么解决序数认知的难点问题呢？像吴老师那样以儿童为师，用儿童的涂画方法解决问题，这是智慧有效的。

看下面的图，儿童自己来解决“两个数之间有几个？”的问题。尽管下面第一幅图中有着一些非数学元素，但是已经把数之间的关系表示出来了，而下面第二幅图呢？数学化的程度更高了，用了概括化的表示。