

 燎原[®] 高数

高等院校教材同步辅导及考研复习用书

高等数学辅导

同济·第七版

上下册合订本

主 编 张天德

详解教材习题 剖析重点难点
渗透考研真题 精解典型例题

 浙江教育出版社
ZHEJIANG EDUCATION PUBLISHING HOUSE

高等数学辅导

同济·第七版

上下册合订本

主 编 张天德

副主编 张焕玲 刘永乐



 浙江教育出版社
ZHEJIANG EDUCATION PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导. 同济 : 第七版 / 张天德主编. --
杭州 : 浙江教育出版社, 2018. 7
ISBN 978-7-5536-7555-8

I. ①高… II. ①张… III. ①高等数学—高等学校—
教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 154710 号

高等数学辅导(同济·第七版)

GAODENGSHUXUE FUDAO TONGJI DIQIBAN

主编 张天德

出版发行: 浙江教育出版社

(杭州市天目山路 40 号 邮编:310013)

责任编辑: 谢 园

文字编辑: 朱毅萱

美术编辑: 曾国兴

封面设计: 星火视觉设计中心

责任校对: 栗 丽

责任印务: 刘 建

印 刷: 莱芜市塑料彩印厂

开 本: 720mm×1020mm 1/16

印 张: 32

字 数: 700 000

版 次: 2018 年 7 月第 1 版

印 次: 2018 年 7 月第 1 次印刷

标准书号: ISBN 978-7-5536-7555-8

定 价: 49.80 元

版权所有·侵权必究

联系电话: 0571-85170300-80928

高等数学是理工类专业一门重要的基础课程,也是硕士研究生入学考试的重点科目。为帮助、指导广大读者学好高等数学,我们编写了这本与同济大学数学系主编的《高等数学》(第七版)完全配套的《高等数学辅导》,以使读者加深对基本概念的理解,加强对基本解题方法与技巧的掌握,最终提高应试能力和数学思维水平。

本书章节的划分和内容设置与同济第七版教材完全一致。在每一章的开头先对本章知识进行简要的概括,然后用网络结构图的形式揭示出本章知识点之间的有机联系,以便于学生从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容。

讲解结构三大部分

1. 教材知识全解:先对每节所涉及的考研大纲进行解读,然后对本节涉及的基本概念、基本定理进行系统梳理,指出理解基本概念和运用定理解题的难点,解答学习过程中可能出现的疑难问题,并特别归纳出各类考试中经常考查的知识点。

2. 典型例题解析:这一部分是每节讲解中的核心内容,也是全书的核心内容。我们基于多年的教学经验和对研究生入学考试试题研究经验,将该节教材内容中学生需要掌握的、考研中经常考到的重点、难点、考点,归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型,然后针对每个基本题型,举出大量的精选例题深入讲解,使您对每一个知识点扎实掌握,并能熟练运用在具体解题中。可谓基础知识梳理、重点考点深讲、联系考试解题三重互动、一举突破,从而获得实际应用能力的全面提升。例题讲解中穿插出现的“思路探索”“方法点击”,更是巧妙点拨,让您举一反三、触类旁通。

3. 教材习题详解:为了方便读者对教材中所学过的知识进行复习巩固,对教材里全部习题作详细解答,与市面上习题答案不全的某些参考书有很大的不同。在解题过程中,对部分有代表性的习题,设置了“思路探索”以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法;安排有“方法点击”来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。有的习题还给出了一题多解,以培养读者的分析能力和发散思维能力。

前言

内容编写三大特色

1. **知识梳理清晰、简洁**:直观、形象的条目总结,精练、准确的考点提炼,实用、独到的方法归纳,将教材内容抽丝剥茧、层层展开,呈现给读者简明扼要、层次分明的知识结构,便于读者快速复习、高效掌握,形成稳固、扎实的知识网,为提高解题能力和思维水平夯实基础。

2. **能力提升迅速、持续**:所有重点、难点、考点,统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型,然后针对每一个基本题型,举出丰富的精选例题、考研真题,举一反三、深入讲解,真正将知识掌握和解题能力提升高效结合、一举完成。

3. **联系考研密切、实用**:本书既是一本教材同步辅导书,也是一本考研复习用书,书中处处联系考研,例题中有考研试题,讲解中处处渗透考研经常考到的考点、重点等,为的就是让同学们在同步学习中完成考研备考,达到考研要求的水平。

本书博采众家之长,参考了多本同类书籍,吸取了不少养分。在此向这些书籍的编著者表示感谢。书中如有疏漏与不妥之处,敬请广大读者提出宝贵意见,以便再版时更正、改进。

编者

2018年6月

目 录

教材知识全解+教材习题详解

第三节 齐次方程	112
第四节 一阶线性微分方程	113
第五节 可降阶的高阶微分方程	116
第六节 高阶线性微分方程	118
第七节 常系数齐次线性微分方程 ..	120

第八节 常系数非齐次线性微分方程	122
* 第九节 欧拉方程	124
* 第十节 常系数线性微分方程组解法 举例	126

教材习题详解(上册)

第一章 函数与极限	128
教材习题 1-1 解答	128
教材习题 1-2 解答	131
教材习题 1-3 解答	133
教材习题 1-4 解答	134
教材习题 1-5 解答	136
教材习题 1-6 解答	137
教材习题 1-7 解答	139
教材习题 1-8 解答	140
教材习题 1-9 解答	142
教材习题 1-10 解答	143
教材总习题一解答	144
第二章 导数与微分	147
教材习题 2-1 解答	147
教材习题 2-2 解答	150
教材习题 2-3 解答	154
教材习题 2-4 解答	156
教材习题 2-5 解答	158
教材总习题二解答	161
第三章 微分中值定理与导数的应用	164
教材习题 3-1 解答	164

教材习题 3-2 解答	166
教材习题 3-3 解答	168
教材习题 3-4 解答	170
教材习题 3-5 解答	174
教材习题 3-6 解答	179
教材习题 3-7 解答	182
教材习题 3-8 解答	184
教材总习题三解答	185
第四章 不定积分	190
教材习题 4-1 解答	190
教材习题 4-2 解答	192
教材习题 4-3 解答	197
教材习题 4-4 解答	200
教材习题 4-5 解答	203
教材总习题四解答	204
第五章 定积分	209
教材习题 5-1 解答	209
教材习题 5-2 解答	213
教材习题 5-3 解答	216
教材习题 5-4 解答	220
教材习题 5-5 解答	222
教材总习题五解答	223

第六章 定积分的应用	230	教材习题 7-4 解答	249
教材习题 6-2 解答	230	教材习题 7-5 解答	253
教材习题 6-3 解答	237	教材习题 7-6 解答	255
教材总习题六解答	240	教材习题 7-7 解答	258
第七章 微分方程	243	教材习题 7-8 解答	260
教材习题 7-1 解答	243	教材习题 7-9 解答	264
教材习题 7-2 解答	244	教材习题 7-10 解答	266
教材习题 7-3 解答	246	教材总习题七解答	270

教材知识全解(下册)

第八章 向量代数与空间解析几何	277	* 第九节 二元函数的泰勒公式(略)	324
第一节 向量及其线性运算	278	324
第二节 数量积 向量积 *混合积	280	* 第十节 最小二乘法(略)	324
.....	280	第十章 重积分	325
第三节 平面及其方程	284	第一节 二重积分的概念与性质	325
第四节 空间直线及其方程	286	第二节 二重积分的计算法	327
第五节 曲面及其方程	290	第三节 三重积分	335
第六节 空间曲线及其方程	293	第四节 重积分的应用	341
第九章 多元函数微分法及其应用	295	* 第五节 含参变量的积分	345
第一节 多元函数的基本概念	295	第十一章 曲线积分与曲面积分	347
第二节 偏导数	300	第一节 对弧长的曲线积分	348
第三节 全微分	304	第二节 对坐标的曲线积分	350
第四节 多元复合函数的求导法则	307	第三节 格林公式及其应用	354
.....	307	第四节 对面积的曲面积分	359
第五节 隐函数的求导公式	311	第五节 对坐标的曲面积分	361
第六节 多元函数微分学的几何应用	314	第六节 高斯公式 * 通量与散度	364
.....	314	第七节 斯托克斯公式 * 环流量	366
第七节 方向导数与梯度	318	与旋度	366
第八节 多元函数的极值及其求法	320		

目 录

教材知识全解+教材习题详解

第十二章 无穷级数	369	* 第六节 函数项级数的一致收敛性及 一致收敛级数的基本性质	384
第一节 常数项级数的概念和性质	369	第七节 傅里叶级数	386
第二节 常数项级数的审敛法	372	第八节 一般周期函数的傅里叶级数	388
第三节 幂级数	377		
第四节 函数展开成幂级数	380		
第五节 函数的幂级数展开式的应用	383		

教材习题详解(下册)

第八章 向量代数与空间解析几何	390	教材习题 10-3 解答	442
教材习题 8-1 解答	390	教材习题 10-4 解答	446
教材习题 8-2 解答	391	教材习题 10-5 解答	451
教材习题 8-3 解答	393	教材总习题十解答	453
教材习题 8-4 解答	395	第十一章 曲线积分与曲面积分	459
教材习题 8-5 解答	397	教材习题 11-1 解答	459
教材习题 8-6 解答	399	教材习题 11-2 解答	461
教材总习题八解答	400	教材习题 11-3 解答	464
第九章 多元函数微分法及其应用	404	教材习题 11-4 解答	469
教材习题 9-1 解答	404	教材习题 11-5 解答	472
教材习题 9-2 解答	406	教材习题 11-6 解答	473
教材习题 9-3 解答	407	教材习题 11-7 解答	474
教材习题 9-4 解答	409	教材总习题十一解答	477
教材习题 9-5 解答	412	第十二章 无穷级数	481
教材习题 9-6 解答	415	教材习题 12-1 解答	481
教材习题 9-7 解答	418	教材习题 12-2 解答	483
教材习题 9-8 解答	420	教材习题 12-3 解答	485
教材习题 9-9 解答	423	教材习题 12-4 解答	486
教材习题 9-10 解答	424	教材习题 12-5 解答	488
教材总习题九解答	425	教材习题 12-6 解答	492
第十章 重积分	430	教材习题 12-7 解答	494
教材习题 10-1 解答	430	教材习题 12-8 解答	496
教材习题 10-2 解答	432	教材总习题十二解答	499



教材知识全解(上册)

第一章 函数与极限

本章内容概览

函数是高等数学讨论的主要对象,它以极限理论为基础.在研究函数时,我们总是通过函数值 $f(x)$ 的变化来看函数的性质,所以运用变化的观点来掌握函数极限与函数的连续性理论是高等数学的基础,如何用已知来逼近未知,用有限来逼近无限,在无限变化的过程中考查变量的变化趋势,从有限过渡到无限,这是本章需掌握的基本思想.

本章知识图解



第一节 映射与函数

教材知识全解

考研大纲要求解读

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立应用问题的函数关系式.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

- 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
- 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

重点及常考点突破

1. **函数奇偶性的运算:**两个奇函数的和或差仍是奇函数;两个偶函数的和、差、积、商(除数不为0)仍是偶函数;两个奇函数的积或商(除数不为0)为偶函数;一个奇函数与一个偶函数的积、商(除数不为0)为奇函数.

2. **复合函数**可由两个或多个函数相继进行有限次复合而成.但是并不是任意两个函数都可以进行复合.设外层函数 $y = f(u)$, $u \in D$, 内层函数 $u = g(x)$, $x \in E$ 仅当外层函数的定义域与内层函数的值域相交时,即 $E' = \{x | g(x) \in D, x \in E\} \neq \emptyset$ 时,两个函数才能复合.例如, $y = \sqrt{u^2 - 2}$, $u = \sin x$ 就不能复合成 $y = \sqrt{\sin^2 x - 2}$.

3. **函数有反函数的充要条件**为函数是一一对应的.严格单调函数必有反函数,且严格递增(减)函数的反函数也必严格递增(减).反之,有反函数的函数未必一定是严格单调函数, $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 表示同一条曲线,若用 x 表示自变量, y 表示因变量,则 $y = f^{-1}(x)$ 及 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, $f^{-1}(x)$ 的定义域即为 $f(x)$ 的值域.

4. **分段函数**是特别要注意的一类函数,它用几个不同解析式“分段”表示一个函数.所有解析式对应的自变量集合的并集是该函数的定义域.定义域的各段最多只能在端点处重合,重合时对应的函数值应相等.图像分段的函数不一定是分段函数,分段函数的图像也可以是一条不断开的曲线(或曲面).

5. 本节的难点是复合函数,重点是复合函数及分段函数.考研中常出现的题型是求复合函数,特别是求分段函数的复合函数,方法主要有3种:代入法、分析法和图示法.

典型例题解析

基本题型 I :求函数定义域

【例1】 (考研题)若函数 f 和 g 满足 $f(x) = e^x + 4$, $f[g(x)] = x^2$, 求函数 $g(x)$ 的定义域.

解:由题设条件知: $f[g(x)] = e^{g(x)} + 4$, 又因为 $f[g(x)] = x^2$, 所以有 $e^{g(x)} + 4 = x^2$, 即 $g(x) = \ln(x^2 - 4)$, 因而 $x^2 - 4 > 0$, 即 $x < -2$ 或 $x > 2$. 故 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

方法点击:求初等函数的定义域有下列原则:

- | | |
|--|--|
| (1) 分母不能为零. | (2) 偶次根式的被开方数不能为负数. |
| (3) 对数的真数不能为零或负数. | (4) $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $ x \leq 1$. |
| (5) $\tan x$ 的定义域为 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$. | (6) $\cot x$ 的定义域为 $x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$. |

求复合函数的定义域,通常将复合函数看成一系列初等函数的复合,然后考查每个初等函数的定义域和值域,得到对应的不等式组,通过联立求解不等式组,就可以得到复合函数的定义域.

【例2】 求函数 $y = \sqrt{\lg \frac{5x-x^2}{4}}$ 的定义域.

解:由对数定义知: $\frac{5x-x^2}{4} > 0$, 即 $0 < x < 5$. 当 $\lg \frac{5x-x^2}{4} \geq 0$ 时,函数有定义. 即 $\frac{5x-x^2}{4} \geq 1$, 可知 $1 \leq x \leq 4$. 故函数定义域为: $1 \leq x \leq 4$.

基本题型 II :求初等函数的表达式

【例3】 已知 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$, 求 $f(x)$.

解:因为 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}$, 所以 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$.

基本题型 III: 求分段函数的表达式

【例4】(考研题) 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $g[f(x)] = (\quad)$.

- (A) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0, \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2+x^2, & x \geq 0, \end{cases}$ (C) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0, \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$

$$\text{解: } g[f(x)] = \begin{cases} 2-f(x), & f(x) \leq 0, \\ f(x)+2, & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2+x, & x \geq 0, \\ x^2+2, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$$

故选 D.

●方法点击: 本题考查将两个分段函数复合成一个复合函数的过程. 先将 $g[f(x)]$ 表示为 $f(x)$ 的函数, 再解不等式 $f(x) \leq 0$ 与 $f(x) > 0$, 最后将 $g[f(x)]$ 表示为 x 的函数.

复合函数的求解方法主要有三种:

- ① 代入法: 将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替, 适用于初等函数的复合.
- ② 分析法: 抓住最外层函数定义域的各区间段, 结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析, 适用于初等函数与分段函数的复合或两分段函数的复合.
- ③ 图示法: i. 画出中间变量 $u = \varphi(x)$ 的图像; ii. 将 $y = f(u)$ 的分界点在 xu 坐标平面上画出; iii. 写出 u 在不同区间上 x 所对应的变化区间; iv. 将 iii 所得的结果代入 $y = f(u)$ 中, 便得到复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应的变化区间. 此方法适用于两分段函数的复合.

基本题型 IV: 求反函数

【例5】函数 $y = \frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}$ 的反函数为 _____.

解: 令 $t = \sqrt{1-x}$, 则 $y = \frac{1+t}{1-t}$, 所以 $t = \frac{y-1}{y+1}$, 即 $\sqrt{1-x} = \frac{y-1}{y+1}$, 从而 $x = 1 - \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2 = \frac{4y}{(y+1)^2}$, 因此反函数为 $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$. 故应填 $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$.

●方法点击: 反函数求解方法比较固定, 即由 $y = f(x)$ 解出 x 的表达式, 然后交换 x 与 y 的位置, 即可求得反函数 $y = f^{-1}(x)$. 对于分段函数要注意所求函数表达式的区间.

基本题型 V: 把复合函数分解为基本初等函数的复合

【例6】函数 $y = \ln \cos(e^x)$ 由哪些基本初等函数复合而成?

解: 函数 $y = \ln \cos(e^x)$ 可由基本初等函数: $u = e^x, v = \cos u, y = \ln v$ 三个函数复合而成.

●方法点击: 牢记基本初等函数的表达式是解决此类问题的基础, 而由里到外, 逐级分解是解决问题的关键. 做题时不能跨越某个级别, 漏掉某个基本初等函数, 要分清复合函数的成分和结构.

基本题型 VI: 函数单调性的问题

【例7】判断函数 $y = \cos x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的单调性.

解: 对任意 $x_1, x_2 \in (0, \pi), x_1 < x_2$, 因为 $\cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_1+x_2}{2} \sin \frac{x_2-x_1}{2}$, 由于 $x_1 < x_2$, 故有 $0 < \frac{x_1+x_2}{2} < \pi, 0 < \frac{x_2-x_1}{2} < \pi$, 所以 $\sin \frac{x_1+x_2}{2} > 0, \sin \frac{x_2-x_1}{2} > 0$, 从而 $\cos x_2 - \cos x_1 < 0$, 即 $y = \cos x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上单调递减.

基本题型 VII: 函数奇偶性问题

【例 8】 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且对 $\forall x, y$ 都有 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, 且 $f(x) \neq 0$. 证明 $f(x)$ 为偶函数.

【思路探索】 判断函数的奇偶性关键要考查 $f(x)$ 和 $f(-x)$ 的关系, 因此紧盯住这一目标, 对条件进行变形是解决问题的入手点.

证明: 由 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, 用 $-y$ 代替 y 得 $f(x-y) + f(x+y) = 2f(x)f(-y)$, 得 $2f(x)f(y) = 2f(x)f(-y)$, 又因为 $f(x) \neq 0$, 故 $f(y) = f(-y)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数.

方法点击: 判断函数奇偶性通常采用的方法有:

(1) 先判断定义域关于原点是否对称再从定义出发, 或者利用运算性质(奇函数的代数和为奇函数等等).

(2) 证明 $f(-x) + f(x) = 0$ 或 $f(-x) - f(x) = 0$.

基本题型 VIII: 函数周期性问题

【例 9】 设 $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形关于 $x = a, x = b$ 均对称($a < b$), 求证: $y = f(x)$ 是周期函数并求其周期.

证明: 由题意 $y = f(x)$ 的图形关于 $x = a, x = b$ 对称知对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$\begin{aligned} f(x+2b-2a) &= f(b+x+b-2a) = f(b-(x+b-2a)) \\ &= f(a+a-x) = f(a-(a-x)) = f(x). \end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 是周期函数, $2b-2a$ 是它的一个周期.

方法点击: 判定函数为周期函数的主要方法:

(1) 从定义出发, 找到 $T \neq 0$, 使得 $f(x+T) = f(x)$.

(2) 利用周期函数的运算性质证明.

第二节 数列的极限

教材知识全解

考研大纲要求解读

1. 理解数列极限的概念, 并用其证明简单极限问题.
2. 了解数列极限的性质.

重点及常考点突破

1. 正确理解数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义.

① $\varepsilon > 0$ 的任意给定性: ε 是任意给定的正数, 它是任意的, 但一经给出, 又可视作固定的, 以便依 ε 来求 N . 由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 所以定义中的不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 可改为 $|x_n - a| < k\varepsilon$ ($k > 0$ 为常数), 也可改为 $|x_n - a| < \varepsilon^2$, $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{M}$ (M 是任意正整数), $|x_n - a| \leq \varepsilon$ 等等, 其含义与 $|x_n - a| < \varepsilon$ 等价.

② N 的相应存在性: N 依赖于 ε , 通常记作 $N = N(\varepsilon)$, 但 N 并不是唯一的, $N(\varepsilon)$ 是强调其依赖性的一个符号, 并不是单值函数关系, 这里, N 的存在性是重要的, 一般不计较其大小, 甚至也不必是自然数, 只要是正数就可以. 所以, 定义中的 $n > N$ 可改为 $n \geq N$ 或 $n > A$ ($A \in \mathbf{R}^+$).

③ 定义中“当 $n > N$ 时有 $|x_n - a| < \varepsilon$ ”是指下标 $n > N$ 的无穷多项 x_n 都进入数 a 的 ε 邻域: $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, 即在 a 的 ε 邻域外最多只有 $\{x_n\}$ 的有限项. 由此可知: 改变或增减数列 $\{x_n\}$ 的有限项, 并不影响数列 $\{x_n\}$ 的收敛性.

2. 用极限定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 是本节的难点.

用定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的关键在于给了 ϵ , 求对应的 $N = N(\epsilon)$, 这往往通过解不等式实现, 有时 N 可直接解出, 有时要利用一些技巧将不等式放缩. 读者熟练掌握解证不等式的技巧是攻克这一难点的关键.

3. 数列 $\{x_n\}$ 若收敛, 则它必为有界数列, 反之有界数列未必收敛, 例如 $\{\sin n\}$ 是有界数列, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ 不存在.

4. 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{x_n\}$ 的任一子列都收敛, 且有相同的极限. (这个定理主要用于证明不收敛)

典型例题解析

基本题型 I: 用极限定义证明数列的极限

【例1】(考研题)“对任意给定的 $\epsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < 2\epsilon$ ”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的().

- (A) 充分条件但非必要条件 (B) 必要条件但非充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分条件又非必要条件

解: 由数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的定义得“对任意给定的 $\epsilon_1 > 0$, 总存在正整数 N_1 , 当 $n > N_1$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \epsilon_1$ ”. 显然可推导出“对任意给定的 $\epsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < 2\epsilon$ ”. 反过来, 若有“对任意给定的 $\epsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\epsilon$ ”, 则对于任意的 $\epsilon_1 > 0$ (不妨设 $0 < \epsilon_1 < 1$, 当 $\epsilon_1 > 1$ 时, 取 $\bar{\epsilon}_1, 0 < \bar{\epsilon}_1 < 1 < \epsilon_1$, 代替即可), 取 $\epsilon = \frac{1}{3}\epsilon_1 > 0$, 存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\epsilon = \frac{2}{3}\epsilon_1 < \epsilon_1$, 令 $N_1 = N - 1$, 则满足“对任意给定的 $\epsilon_1 > 0$, 总存在正整数 N_1 , 当 $n > N_1$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \epsilon_1$ ”. 可见上述两种说法是等价的. 故选 C.

●方法点击: 数列极限定义中有“任意小”和“无限大”两个术语, 二者均不是确定的值, 至于它们用什么符号表示并不重要, 应注意 2ϵ 同样是一个无穷小量.

【例2】证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 - 1} = 0$.

证明: $\forall \epsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{1}{n^2 - 1} - 0 \right| < \epsilon$, 只要 $\frac{1}{n - 1} < \epsilon$ ($n \geq 3$), 即只需 $n > 1 + \frac{1}{\epsilon}$, 取 $N = 1 + \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时有 $\left| \frac{1}{n^2 - 1} \right| < \epsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 - 1} = 0$.

【错解分析】有的人用以下方法作:

$\forall \epsilon > 0$, 要证 $\left| \frac{1}{n^2 - 1} - 0 \right| < \epsilon$ 只需 $\left| \frac{1}{n - 1} \right| < (n + 1)\epsilon$, 取 $N = 1 + [(n + 1)\epsilon]$, 则当 $n > N$ 时, 有 $\left| \frac{1}{n^2 - 1} - 0 \right| < \epsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 - 1} = 0$.

以上解法是错误的, 因为数列极限定义中的 N 只与 ϵ 有关, 它不依赖于 n , 因此选取的 N 是错误的; 另外, 对于给定的小正数 ϵ , 与 ϵ 对应的 N 不唯一.

【例3】 用 $\epsilon-N$ 方法证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

证明: $\forall \epsilon > 0$, 要证 $\left| \frac{n!}{n^n} \right| = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} < \epsilon$, 实际上只需 $\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} < \frac{1}{n} \cdot \frac{n^{n-1}}{n^{n-1}} = \frac{1}{n} < \epsilon$, 即 $n > \frac{1}{\epsilon}$, 取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, 有 $\left| \frac{n!}{n^n} \right| < \epsilon$. 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

方法点击: 在 $\epsilon-N$ 定义中, 并不一定要找到一个最小的 N , 经常先将 $|x_n - A|$ 适当放大后再小于 ϵ , 以方便寻找 N .

基本题型 II: 证明数列发散

【例4】 设 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{n\pi}{2}$, 证明数列 $\{a_n\}$ 发散.

【思路探索】 若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则由极限性质知道极限应是唯一的, 要证明 $\{a_n\}$ 没有极限, 只要找到两个子数列分别收敛到不同的值即可.

证明: 设 k 为整数, 若 $n = 4k$, 则 $a_{4k} = \left(1 + \frac{1}{4k}\right) \sin \frac{4k\pi}{2} = \left(1 + \frac{1}{4k}\right) \sin 2k\pi = 0$. 若 $n = 4k + 1$, 则

$$a_{4k+1} = \left(1 + \frac{1}{4k+1}\right) \sin \left(\frac{4k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{4k+1}\right) \sin \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{4k+1} \rightarrow 1 (k \rightarrow \infty),$$

因此 $\{a_n\}$ 发散.

方法点击: 在证明数列发散时, 可采用下列两种方法:

- (1) 找两个极限不相等的子数列.
- (2) 找一个发散的子数列.

第三节 函数的极限

教材知识全解

考研大纲要求解读

1. 理解函数极限的概念, 并用其证明简单极限问题.
2. 了解函数极限的性质.

重点及常考点突破

1. 正确理解函数极限的定义并用其证明简单极限问题是本节的重点与难点.

若把数列 $\{a_n\}$ 理解为自变量仅取自然数 n 的函数, 即 $a_n = f(n)$, 则数列极限就是一类特殊的函数极限.

2. 由函数极限的定义可直接得到下列两个结论:

- ① $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$;
- ② $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

这两个结论可用来证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 还可用来证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在.

3. 函数极限的许多重要性质与数列极限的相应性质类似, 可对照学习, 加深理解.

- ① 极限若存在, 则必唯一, 这为用各种方法求极限提供了依据.
- ② 有极限的函数是局部有界的, 而收敛数列的有界性是整体性的. 即若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n| \leq M$ (M 是与 n 无关的正常数且 $M = \max\{M_1, M_2\}$, 其中 $\forall n > N$ 有 $|a_n| \leq M_1$, 而 M_2

$= \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|\}$). 函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 若存在, 则只能推得函数在 x_0 的某邻域有界, 即 $\exists U_0(x_0, \delta)$, 当 $x \in U_0(x_0, \delta)$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$, 这是函数极限与数列极限的一个不同之处, 要特别重视.

4. 极限不存在的几个典型例子.

① 趋于 ∞ : $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2, \lim_{x \rightarrow \infty} x, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$ 等.

② 左右极限不相等: $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x (a > 1) (\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0)$,

$\lim_{x \rightarrow 0} \arctan x (\lim_{x \rightarrow +0} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -0} \arctan x = -\frac{\pi}{2})$ 等.

③ 振荡: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x, \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x, \lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{1}{x-1}$ 等.

典型例题解析

基本题型 I: 用定义证明函数极限

【例 1】 利用极限定义证明: $\lim_{x \rightarrow 2} (5x+2) = 12$.

证明: 对 $\forall \epsilon > 0$, 由 $|5x+2-12| = 5|x-2| < \epsilon$ 得 $|x-2| < \frac{\epsilon}{5}$, 故取 $\delta = \frac{\epsilon}{5}$, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x-2| < \delta$ 时, 有 $|5x+2-12| < \epsilon$ 成立, 即 $\lim_{x \rightarrow 2} (5x+2) = 12$.

方法点击: 用定义证明函数极限存在的步骤:

(1) 对于任给的 $\epsilon > 0$, 由不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$, 经一系列适当放大可得:

$|f(x) - A| < \dots < c|x - x_0| < \epsilon$ (c 为常数) (或 $|f(x) - A| < \dots < cM(x)$ (c 为常数)).

(2) 解不等式 $c|x - x_0| < \epsilon$ (或 $cM(x) < \epsilon$), 得 $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{c}$ (或 $|x| > N$).

(3) 取 $\delta = \frac{\epsilon}{c}$ (或取正数 $X = N$), 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 (或当 $|x| > X$ 时), 总有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$).

解题的关键在于对 $\forall \epsilon > 0$, 找到 $\delta > 0$, 常用到不等式放大的方法.

【例 2】 在求函数极限时, 何时要考虑单侧极限?

解: 在求函数极限的过程中, 以下几种情形通常都需考虑单侧极限.

(1) 分段函数在分界点处;

(2) 含有绝对值的函数;

(3) 取整函数;

(4) 一些函数在特殊点处或无穷远处, 如 $\cot x$ 在 $x = 0$ 处; $\tan x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处; $a^x (a > 0, a \neq 1)$,

$e^x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 应特别注意事实: $\lim_{x \rightarrow 0^+} a^{\frac{1}{x}} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} a^{\frac{1}{x}} = 0 (a > 1)$.

例如, 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$ 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

事实上, $f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{3^{\frac{1}{x}} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1}{3^{\frac{1}{x}}}}{1 + \frac{1}{3^{\frac{1}{x}}}} = 1$,

$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{3^{\frac{1}{x}} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$.

基本题型 II:证明函数极限不存在

【例 3】 设 $f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } |x| \leq 1, \\ x-2, & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$ 试讨论 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

【思路探索】 本题中函数是分段表达的,因此要讨论 $x \rightarrow \pm 1$ 时 $f(x)$ 的极限值必须从左、右极限入手.

解:① 由题目条件知: $f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{当 } x < -1, \\ x, & \text{当 } -1 \leq x \leq 1, \\ x-2, & \text{当 } x > 1. \end{cases}$

因为 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$.

所以 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$,

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在.

② 因为 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x-2) = -3$,

所以 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$,

所以 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 不存在.

【例 4】 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$ 不存在.(类比 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin n$.)

证明:设 $f(x) = x \sin x$, 取 $x_n = n\pi$ 及 $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, 显然 $n \rightarrow \infty$ 时有 $x_n \rightarrow +\infty$, $y_n \rightarrow +\infty$, 但是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n\pi \cdot \sin n\pi = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = +\infty,$$

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$ 不存在.

方法点击:证明极限不存在常用的办法就是从证明左、右极限入手,或者说明一个极限不存在,或者说明二者存在不相等.为了简化过程,这时通常取特殊子列进行求解.

第四节 无穷小与无穷大

教材知识全解

考研大纲要求解读

理解无穷小与无穷大的概念,并会判断无穷小与无穷大.

重点及常考点突破

1. 无穷小是一个变量,“0”是唯一的无穷小常数,任何一个绝对值很小很小的数都不能作为无穷小.有限个无穷小的和、差、积仍是无穷小,无穷小与有界函数的乘积仍是无穷小.

2. 无穷大必为无界,而无界未必是无穷大.

3. 无穷大和无穷小的关系.在同一自变量的变化过程中:① 如 $f(x)$ 为无穷大,则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小.② 如 $f(x)$ 为无穷小,且 $f(x) \neq 0$,则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

典型例题解析

基本题型 I:按定义判定无穷小和无穷大

【例 1】 指出下列哪些是无穷小量,哪些是无穷大量.

- (1) $\frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时; (2) $\frac{\sin x}{1 + \cos x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时;