“希望杯”数学竞赛系列丛书

周国镇◎主编

HOPE
希望杯
全国数学邀请赛
since 1990

骆华 程新林 等◎编著

希望杯 数学能力培训教程

初二（第4版）

象出版社
na Meteorological Press

“希望杯”数学竞赛系列丛书

周国镇◎主编

希望杯

数学能力培训教程

初二（第4版）

骆华 程新林 等◎编著

气象出版社
China Meteorological Press

图书在版编目(CIP)数据

"希望杯"数学能力培训教程. 初二/骆华等编著. —4 版.
北京:气象出版社,2014.6
("希望杯"数学竞赛系列丛书)
ISBN 978-7-5029-5954-8

Ⅰ.①希… Ⅱ.①骆… Ⅲ.①中学数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 125932 号

"Xiwangbei"Shuxue Nengli Peixun Jiaocheng. Chuer(Di-4 Ban)

"希望杯"数学能力培训教程·初二(第 4 版)

骆 华 程新林 等◎编著

出版发行:	气象出版社		
地 址:	北京市海淀区中关村南大街 46 号	邮政编码:	100081
总 编 室:	010-68407112	发 行 部:	010-68409198
网 址:	http://www.cmp.cma.gov.cn	E-mail:	qxcbs@cma.gov.cn
责任编辑:	侯娅南	终 审:	章澄昌
封面设计:	符 赋	责任技编:	吴庭芳
责任校对:	华 鲁		
印 刷:	三河市鑫利来印装有限公司		
开 本:	720 mm×960 mm 1/16	印 张:	16
字 数:	290 千字		
版 次:	2014 年 6 月第 4 版	印 次:	2014 年 6 月第 1 次印刷
印 数:	1—20000	定 价:	28.00 元

前 言

这套教程充分注意了中小学数学教学大纲，力求充分体现“希望杯”的特色，为中小学师生提供系统、全面、实用的数学内容、思想和方法，以“鼓励学好课本知识，适当拓宽知识面，激发学习数学的兴趣和热情，培养科学的思维能力、创新能力和实践能力”。

本教程中所有原始的素材都来源于历届“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题，这些题目中的绝大多数是由“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会的专家们命题，其余则是由全国各地数学命题的研究人员编制。这些题目不但贴近现行的中小学数学课本，而且很有启发性、思考性和趣味性，寓科学于趣味之中，寓知识、能力的考查于数学的美育之中。学习和研究这些题目不仅能使学习者对数学课本的理解、掌握和应用能力达到高水平，并且能实实在在地提高科学思维素质，而这种素质对于有效地学习任何知识都是必需的。正因为如此，历届“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题被多方人士看好：中考、高考命题人员经常从中吸取营养；有远见的数学教师从中选取大量资料，来充实和丰富教学内容；众多的数学教育和培训机构则用来作为教材的主要内容。最有说服力的是千千万万的中小学生，正是通过对“希望杯”试题的学习、研究，提高了水平，大大加强了学数学的兴趣和信心，他们的数学素养明显地不同于没有接触过“希望杯”的学生们。值得一提的是，北大、清华等著名高校以及远赴国外大学的众多学子中有不少人，在中小学时代，都曾有参加过“希望杯”全国数学邀请赛并且获奖的经历。

“希望杯”全国数学邀请赛从1990年开始举办，至今已举办25届中学组比赛。25年来，参赛的初一、初二、高一、高二这四个年级，每个年级的试题、培训题累计超过3000个，四个年级的题目则累计近1.2万个，几乎覆盖了中学数学的全部以及中学数学课本以外的很多内容，不仅如此，而且蕴涵了丰富的数学思想和方法。从1993年开始，至今已举办12届小学组比赛，四、五、六级的试题、培训题累计也近5000个。若要将这些题目全部做一遍，对于一位数学教师来说，确也值得和可能，但是，对于一名学生，则难度就很大了。因此，如何从中提取最精彩、最重要的部分，按数学内容的系统整理出来，就非常必要。这套教程正是做了这样一件事：它从每个年级的试题中各精选了1/5左右，分为若干个专题，对每个专题，给出了

相关的必备知识,再详细分析若干个题目,然后安排做少量的题,通过这样一个过程,一个专题就拿下来了。一个个专题,陆续学下来,中小学数学的最主要的内容、思想和方法也就能熟悉和掌握,数学功底必然大大地得到加强。

考虑到大部分中小学生只是希望能很好地掌握学校里数学课本上的内容,另一方面又有不少中小学生并不满足于此,他们对课本以外的数学也有强烈的求知欲,所以我们的教程分课本以内(基础篇)和课本以外(提高篇)两部分。前者占教程的大部分,后者只占教程的小部分。

这套教程由气象出版社于2005年12月开始出版,此后多次重印,包括高一、高二,初一、初二,小学四、五、六年级,共七册。该教程在内容上贴近新的中小学数学教学大纲,更突出对科学思维能力的培养,而且在行文上力求简明易懂。

随着“希望杯”试题的不断更新和学校数学教学的需要,本教程将逐年修订,不断优化,力求将教、学和应试三者融为一体。衷心希望本套教程能引导更多的中小学生走向热爱数学、掌握数学的成功道路。

这套教程的作者主要是“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会的成员,有的作者是多年带领学生参加“希望杯”全国数学邀请赛,并对“希望杯”试题深有研究的数学教师。

真诚地欢迎读者指出书中不妥之处。

周国镇

2014年6月10日

注:**周国镇** 数学教育专家,1991年创办《数理天地》杂志并担任杂志社社长兼总编;中国优选法统筹法与经济数学研究会常务理事,数学教育委员会主任;1991年创办“希望杯”全国数学邀请赛,一直是组委会第一负责人,并兼秘书长、命题委员会主任。2010年,与美国加州大学伯克利分校合作创办了世界数学团体锦标赛(World Mathematics Team Championship),担任组委会主席。

目　　录

第一部分　基础篇

第 1 讲　因式分解

一、知识提要

1. 概念

将一个多项式化成几个最简整式的乘积的形式，就叫作将这个多项式因式分解，也可称为将这个多项式分解因式.

2. 因式分解的基本方法

(1) 提公因式法：如果多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提到括号外面，将多项式写成因式乘积的形式.

(2) 运用公式法：

平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

完全平方公式：$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$；

立方和公式：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$；

立方差公式：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

另外两个常用公式：

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$；

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

(3) 分组分解法：将一个多项式分成二组或三组，各组分别提公因式后，彼此又有公因式可提出.

3. 因式分解的技巧

(1) 十字相乘法：将二次三项式 ax^2+bx+c 的系数 a 分解成 a_1a_2，常数项 c 分解成 c_1c_2，并且把 a_1,a_2,c_1,c_2 排列如下：

$$\begin{matrix} a_1 & & c_1 \\ & \times & \\ a_2 & & c_2 \end{matrix}$$

这里按斜线交叉相乘，再相加，得到 $a_1c_2+a_2c_1$，如果它正好等于 b，那么 ax^2+bx+c 就可以分解成 $(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$.

(2) 双十字相乘法：对于某些二元二次六项式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$，可以看作是关于 x 的二次三项式 $ax^2+(by+d)x+cy^2+ey+f$. 先用十字相乘法将“常数项”cy^2+ey+f 分解，然后再次利用十字相乘法将关于 x 的二次三项式分解.

(3) 换元法：将一个较复杂的代数式中的某一部分看作一个整体，用一个新字母替代它，从而简化运算过程，分解后要注意将新字母还原.

(4) 拆项、添项：将多项式中的某一项拆成两项或多项，或者在多项式中添上两个符号相反的项，再用分组分解法或其他分解法进行分解因式.

(5) 比较法：若能断定多项式可分解为某几个因式，而这几个因式中的某些系数或某些项尚未确定，则可以用一些字母来表示待定的系数或项. 将这几个因式相乘后，与多项式进行比较，就可以求出待定的系数或项.

(6) 利用因式定理：如果 $x=a$ 时，关于 x 的多项式的值为零，那么 $x-a$ 是该多项式的一个因式.

4. 因式分解的步骤

如果多项式的各项有公因式，应先提公因式；如果各项没有公因式，再看能否直接运用公式或用十字相乘法分解；如还不能，就试用分组分解法或其他方法. 因式分解，必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止.

二、例题

1. 怎样进行因式分解

例 1. 分解因式：$a^3b+ab+30b$ 的结果是________.

第 11 届(2000 年)初二第 1 试

解：原式 $= b(a^3+a+30)$

（提公因式）

$= b[(a^3+27)+(a+3)]$

（拆项、分组分解）

$= b[(a+3)(a^2-3a+9)+(a+3)]$

（运用公式）

$= b(a+3)(a^2-3a+10)$

（提公因式）.

例 2. 把代数式 $(x+y-2xy)(x+y-2)+(xy-1)^2$ 分解成因式的乘积，应当是________.

第 9 届（1998 年）初二第 2 试

解：原式 $= (x+y)^2-2xy(x+y)-2(x+y)+4xy+x^2y^2-2xy+1$

$= (x+y)^2-2(x+y)(xy+1)+(xy+1)^2$

（提公因式、运用公式）

$= (x+y-xy-1)^2$

（运用公式）

$= [(x-1)+(y-xy)]^2$

（分组分解）

$= [(x-1)\cdot(1-y)]^2$

（提公因式）

$= (x-1)^2\cdot(y-1)^2$.

例 3. 分解因式：$a^5+a+1=$ ________.

第 13 届（2002 年）初二培训题

解：原式 $= a^5-a^2+a^2+a+1$

（添 $-a^2$ 和 $+a^2$ 两项）

$= a^2(a^3-1)+(a^2+a+1)$

（前两项提公因式 a^2）

$= a^2(a-1)(a^2+a+1)+(a^2+a+1)$

（用立方差公式）

$= (a^2+a+1)(a^3-a^2+1)$

（提公因式 a^2+a+1）.

例 4. 化简 $1+x+x(1+x)+x(1+x)^2+\cdots+x(1+x)^{1995}$，得到________.

第 6 届（1995 年）初二第 1 试

解:依次从左向右提取公因式,则

$$\begin{aligned}原式 &= (1+x)(1+x)+x(1+x)^2+\cdots+x(1+x)^{1995} \\ &= (1+x)^2(1+x)+\cdots+x(1+x)^{1995} \\ &= \cdots \\ &= (1+x)^{1996}.\end{aligned}$$

例 5. 若代数式 $mx^3+2x^2-2x+m^2$ 有因式 $x-1$,则 m 的值是________.

第 20 届(2009 年)初二培训题

解:设代数式 $mx^3+2x^2-2x+m^2$ 的另一个因式为 k,则 $mx^3+2x^2-2x+m^2=k(x-1)$. 利用因式定理,取 $x=1$,则有

$$m+2-2+m^2=0,$$

所以
$$m(m+1)=0,$$

解得
$$m=0 \text{ 或 } m=-1.$$

例 6. 将代数式 $x^3+(2a+1)x^2+(a^2+2a-1)x+(a^2-1)$ 分解因式,得________.

第 21 届(2010 年)初二第 2 试

解:将 a 看作主元,则原式是关于字母 a 的二次三项式,即

$$\begin{aligned}原式 &= (x+1)a^2+(2x^2+2x)a+(x^3+x^2-x-1) \\ &= (x+1)a^2+2x(x+1)a+(x+1)^2(x-1)\end{aligned}$$

(分组分解)

$$= (x+1)(x^2+2ax+a^2-1)$$

(提公因式)

$$= (x+1)(x+a+1)(x+a-1).$$

(运用公式法)

例 7. 如果 $(x+3)(x+a)-2$ 可以因式分解为 $(x+m)(x+n)$(其中 m,n 均为整数),则 a 的值是________.

第 22 届(2011 年)初二培训题

解:根据题意,用比较法

$$\begin{aligned}&(x+3)(x+a)-2 \\ =\ &x^2+(3+a)x+(3a-2) \\ =\ &x^2+(m+n)x+mn,\end{aligned}$$

从而
$$\begin{cases} m+n=3+a \\ mn=3a-2 \end{cases},$$

消去 a,得
$$mn-3(m+n-3)=-2,$$

即　$(m-3)(n-3)=-2.$

因为　m,n 均为整数，

所以　$\begin{cases}m=5\\n=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=2\\n=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=4\\n=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=1\\n=4\end{cases}$，

因此　$a=4$ 或 $a=2$.

2. 因式分解的应用

例 8. 若 $a+b+c=0$，则 $a^3+a^2c-abc+b^2c+b^3$ 的值是________.

(A) -1.　　(B) 0.　　(C) 1.　　(D) 2.

第 9 届(1998 年)初二第 2 试

解：

$$\begin{aligned}&a^3+a^2c-abc+b^2c+b^3\\=&(a+b)(a^2-ab+b^2)+c(a^2-ab+b^2)\\=&(a^2-ab+b^2)(a+b+c)\\=&0.\end{aligned}$$

故选(B).

例 9. 已知 n 是正整数，且 n^4-16n^2+100 是质数，那么 $n=$ ________.

第 12 届(2001 年)初二第 1 试

解：原式 $=n^4+20n^2+100-36n^2$

$=(n^2+10)^2-36n^2$

$=(n^2+6n+10)(n^2-6n+10).$

因为　n^4-16n^2+100 是质数，且 n 是正整数，

又　$n^2+6n+10\neq 1$，

所以　$n^2-6n+10=1$，即 $(n-3)^2=0$，

所以　$n=3.$

例 10. 如果自然数 a 和 $b(a>b)$ 的和、差、积、商相加得 27，那么 $a=$ ________，$b=$ ________.

第 20 届(2009 年)初二第 1 试

解：若两数 a 和 b 的和、差、积、商相加得 27，因为 27 是整数，所以 a 必是 b 的整数倍，设 $a=kb$(k 是整数)，则有

$$kb+b+kb-b+kb^2+k=27,$$

化简得　$kb^2+2kb+k=27,$

$$k(b+1)^2=3\times 3^2=27\times 1^2,$$

则　$k=3,b=2,a=6,$

或　$k=27,b=0,a=0.$(不符合题意，舍去)

所以 $$k=3,b=2,a=6.$$

例 11. 若三角形的三条边的长分别为 a,b,c，且 $a^2b-a^2c+b^2c-b^3=0$，则这个三角形一定是________.

(A) 等腰三角形. (B) 直角三角形.

(C) 等边三角形. (D) 等腰直角三角形.

第 22 届(2011 年)初二第 1 试

解: 分解因式，得
$$\begin{aligned}&a^2b-a^2c+b^2c-b^3\\=&a^2(b-c)+b^2(c-b)\\=&(b-c)(a^2-b^2)\\=&(b-c)(a+b)(a-b).\end{aligned}$$

由 $$(b-c)(a+b)(a-b)=0,$$

得 $$b=c\text{ 或 }a=b,$$

所以这个三角形是等腰三角形，但不一定是直角三角形或等边三角形. 故选(A).

例 12. 已知正整数 x,y 满足 $2^x+49=y^2$，则 $x=$________，$y=$________.

第 20 届(2009 年)初二第 2 试

解: 因为 x,y 是正整数，2^x 是偶数，由 $2^x+49=y^2$ 知 y^2 是奇数，所以 y 一定是奇数，又
$$2^x=y^2-49=(y+7)(y-7),$$
所以 $y+7$ 与 $y-7$ 都是 2 的整数次幂，令
$$y-7=2^k,y+7=2^m,$$
则两式相加得 $$2y=2^k+2^m=2^k(1+2^{m-k}),$$

则 $$y=2^{k-1}(1+2^{m-k}),$$

因为 y 是奇数，所以只能是 $k-1=0$，即 $k=1$，可得
$$y=2^k+7=9,$$
代入 $2^x+49=y^2$ 得 $$x=5.$$

三、习题

(一) 选择题

1. 下列四个从左到右的变形中，是因式分解的是________.

(A) $(x+1)(x-1)=x^2-1$.

(B)$(a-b)(m-n)=(b-a)(n-m)$.

(C)$ab-a-b+1=(a-1)(b-1)$.

(D)$m^2-2m-3=m\left(m-2-\frac{3}{m}\right)$.

第 8 届(1997 年)初二第 1 试

2. 已知四个代数式:①$m+n$;②$m-n$;③$2m+n$;④$2m-n$. 当用 $2m^2n$ 乘以上述四个式中的两个时,便得到多项式 $4m^4n-2m^3n^2-2m^2n^3$,那么这两个式子的编号是________.

(A)① 与 ②.　　(B)① 与 ③.

(C)② 与 ③.　　(D)③ 与 ④.

第 8 届(1997 年)初二第 1 试

3. 下列五个多项式:

①$a^2b^2-a^2-b^2-1$;　　②$x^3-9ax^2+27a^2x-27a^3$;

③$x(b+c-d)-y(d-b-c)-2c+2d-2b$;

④$3m(m-n)+6n(n-m)$;　　⑤$(x-2)^2+4x$.

其中在有理数范围内可以进行因式分解的有________.

(A)①②③.　　(B)②③④.

(C)③④⑤.　　(D)①②④.

第 10 届(1999 年)初二第 2 试

4. 将多项式 $x^2-4y^2-9z^2-12yz$ 分解成因式的积,结果是________.

(A)$(x+2y-3z)(x-2y-3z)$.　　(B)$(x-2y-3z)(x-2y+3z)$.

(C)$(x+2y+3z)(x+2y-3z)$.　　(D)$(x+2y+3z)(x-2y-3z)$.

第 9 届(1998 年)初二第 1 试

5. 有以下四个多项式:

①$16x^5-x$;　　②$(x-1)^2+4(x-1)+4$;

③$(x+1)^4-4x(x+1)^2+4x^2$;　　④$-4x^2-1+4x$.

分解因式后,结果含有相同因式的是________.

(A)①②.　　(B)①③.　　(C)①④.　　(D)②③.

第 21 届(2010 年)初二培训题

6. $y-2x+1$ 是 $4xy-4x^2-y^2-k$ 的一个因式,则 k 的值是________.

(A)0.　　(B)-1.　　(C)1.　　(D)4.

第 14 届(2003 年)初二第 2 试

7. 已知 $x^2+ax-12$ 能分解成两个整系数的一次因式的乘积,则符合条件的整

数 a 的个数是________.

(A)3个.　　(B)4个.　　(C)6个.　　(D)8个.

第7届(1996年)初二第2试

8. 若 $m=2006^2+2006^2\times2007^2+2007^2$,则 m ________.

(A) 是完全平方数,还是奇数.　　(B) 是完全平方数,还是偶数.

(C) 不是完全平方数,但是奇数.　　(D) 不是完全平方数,但是偶数.

第17届(2006年)初二第2试

(二) 填空题

9. 计算:$\dfrac{2012}{2012^2-2011\times2013}=$________.

第23届(2012年)初二培训题

10. 因式分解:$9a^2-4b^2+4bc-c^2=$________.

第7届(1996年)初二第1试

11. 分解因式:$a^2+2b^2+3c^2+3ab+4ac+5bc=$________.

第2届(1991年)初二第2试

12. 分解因式:$ab(a+b)^2-(a+b)^2+1=$________.

第16届(2005年)初二第1试

13. 分解因式:$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=$________.

第13届(2002年)初二培训题

14. 若 $2^{28}-1$ 能被110与130之间的三个自然数整除,那么这三个自然数分别是________.

第20届(2009年)初二培训题

15. 已知多项式 $2x^2+xy-3y^2-x-4y-1$ 可以分解为 $(2x+3y+m)(x-y+n)$ 的形式,那么 $m+n$ 的值等于________.

第14届(2003年)初二培训题

16. 若 $x+2$ 是多项式 x^3+x^2+ax+b 的一个因式,且 $2a^2+3ab+b^2\neq0$,则分式 $\dfrac{ab^2-4a^3+b^3-4a^2b}{2a^2+3ab+b^2}$ 的值是________.

第6届(1995年)初二第2试

17. 两位同学将同一个二次三项式分解因式,一位同学因看错了一次项系数而分解成 $2(x-1)(x-9)$,另一位同学因看错了常数项而分解成 $2(x-2)(x-4)$,则将原多项式分解因式后,正确的结果应该是________.

第20届(2009年)初二培训题

18. 已知多项式 $3x^3+ax^2+3x+1$ 能被 x^2+1 整除,且商式是 $3x+1$,那么 a

的值是________.

第 7 届(1996 年)初二第 1 试

答案·提示

(一)选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	C	B	D	C	B	C	A

提示

1. 因式分解是把一个多项式化成几个整式的乘积的形式.据此可知选(C).

2. 原式$=2m^2n(2m^2-mn-n^2)$

$=2m^2n(2m+n)(m-n)$.

故选(C).

3. ②式$=(x-3a)^3$;

③式$=x(b+c-d)+y(b+c-d)-2(b+c-d)$

$=(b+c-d)(x+y-2)$;

④式$=3(m-n)(m-2n)$.

故选(B).

4. 原式$=x^2-(2y+3z)^2$

$=(x+2y+3z)(x-2y-3z)$.

故选(D).

也可将各选项展开,选择符合题意的选项.但这样做运算量较大.

5. 将这四个多项式分解因式如下:

①式$=x(16x^4-1)=x(4x^2+1)(4x^2-1)=x(4x^2+1)(2x+1)(2x-1)$;

②式$=[(x-1)+2]^2=(x+1)^2$;

③式$=[(x+1)^2-2x]^2=(x^2+1)^2$;

④式$=-(2x-1)^2$.

其中,①④两式含有相同的因式$(2x-1)$.故选(C).

6. 很显然,$x=0,y=-1$满足不定方程$y-2x+1=0$,而

$$y-2x+1 \text{ 是 } 4xy-4x^2-y^2-k \text{ 的一个因式},$$

所以 $$x=0,y=-1 \text{ 必能满足方程 } 4xy-4x^2-y^2-k=0.$$

代入后解得 $$k=-1.$$

故选(B).

7. 设$x^2+ax-12=(x+m)(x+n)$,其中m,n是整数.所以

$$\begin{cases} mn=-12 \\ m+n=a \end{cases}.$$

而 $$-12=-(1\times 12)=-(2\times 6)=-(3\times 4).$$

所以 $$a=\pm 11 \text{ 或 } \pm 4 \text{ 或 } \pm 1.$$

故选(C).

8. 令$a=2006,a+1=2007$,则

$$\begin{aligned} m &= a^2+a^2(a+1)^2+(a+1)^2 \\ &= a^2-2a(a+1)+(a+1)^2+a^2(a+1)^2+2a(a+1) \\ &= [a-(a+1)]^2+a^2(a+1)^2+2a(a+1) \\ &= a^2(a+1)^2+2a(a+1)^2+1 \\ &= [a(a+1)+1]^2. \end{aligned}$$

因为 $$a(a+1) \text{ 是偶数},$$

所以 $$a(a+1)+1 \text{ 是奇数},$$

所以 $$m \text{ 是完全平方数且是奇数}.$$

故选(A).

(二)填空题

题号	9	10	11	12
答案	2012	$(3a-2b+c)(3a+2b-c)$	$(a+b+c)(a+2b+3c)$	$(a^2+ab-1)(b^2+ab-1)$

题号	13	14	15	16	17	18
答案	$(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$	127,129,113	0	4	$2(x-3)^2$	1

提示

9. 利用平方差公式，可知

$$\begin{aligned}&2012^2-2011\times 2013\\=&2012^2-(2012-1)(2012+1)\\=&2012^2-(2012^2-1)\\=&1,\end{aligned}$$

故原式的值是 2012.

10. 原式 $=9a^2-(2b-c)^2$

$=(3a-2b+c)(3a+2b-c)$.

11. 原式 $=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+b^2+2c^2+ab+2ac+3bc$

$=(a+b+c)^2+(b+2c)(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a+2b+3c)$.

12. 设 $a+b=x$，则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=abx^2-(a+b)x+1\\&=(ax-1)(bx-1)\\&=(a^2+ab-1)(b^2+ab-1).\end{aligned}$$

13. 原式 $=x^3(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$

$=(x^2+x+1)(x^3+1)$

$=(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

14. $2^{28}-1=(2^{14}+1)(2^{14}-1)$

$=(2^{14}+1)(2^7+1)(2^7-1)$,

而 $2^7-1=127$，$2^7+1=129$，都符合要求.

考虑 $2^{14}+1$ 能否分解因式：

$$\begin{aligned}2^{14}+1&=(2^7)^2+2\times 2^7+1-2\times 2^7\\&=(2^7+1)^2-2^8\\&=(2^7+1+2^4)(2^7+1-2^4),\end{aligned}$$

其中　　$2^7+1-2^4=113$，$2^7+1+2^4=145$（不符合题意，舍去）.

所以满足条件的三个数是 127，129，113.