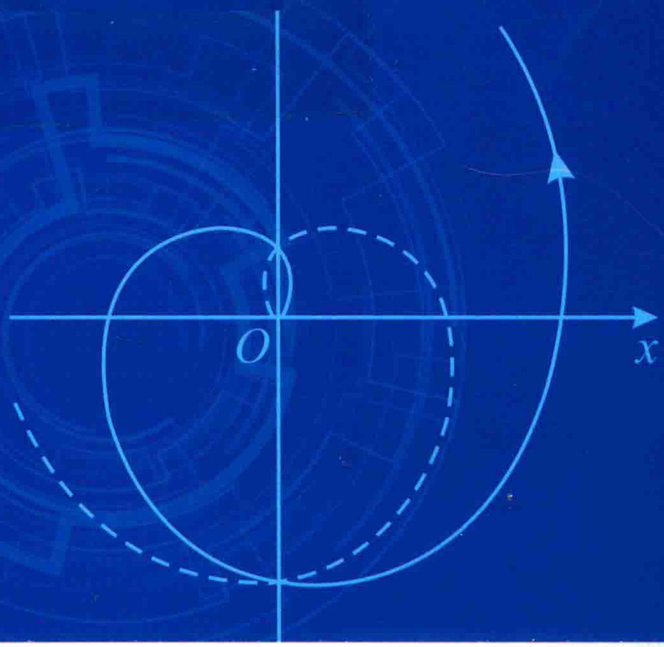
GAODENG SHUXUE



高等数学

上册

魏 嘉 王 静◎主编

陕西师范大学出版总社

高等数学

（上册）

主　编　魏　嘉　王　静
副主编　裴东林　李　旭

陕西师范大学出版总社

图书代号 JC18N1729

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册 / 魏嘉，王静主编. —西安：陕西师范大学出版总社有限公司，2018.12
ISBN 978-7-5695-0069-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①魏… ②王… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 140282 号

高等数学·上册

魏 嘉 王 静 主编

责任编辑	王东升 李 恒
责任校对	刘金茹
封面设计	鼎新设计
出版发行	陕西师范大学出版总社 (西安市长安南路 199 号 邮编 710062)
网 址	http://www.snupg.com
经 销	新华书店
印 刷	兴平市博闻印务有限公司
开 本	787mm×1092mm 1/16
印 张	14.5
字 数	334 千
版 次	2018 年 12 月第 1 版
印 次	2018 年 12 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5695-0069-1
定 价	36.00 元

读者购书、书店添货或发现印装质量问题，请与本社高等教育出版中心联系。
电话：(029)85303622(传真) 85307864

前言

本书是根据编者多年的教学实践，按照新形势下教材改革的精神，并结合《高等数学课程教学基本要求》编写而成. 在教学实践中我们感到仅仅强调高等数学课程的理论严谨和体系完善是不够的，还应该强调理论与实践的结合. 因此，本书在介绍高等数学基本内容的同时增加了微积分综合应用内容，以提升学生解决实际问题的能力. 为了方便学生利用 MATLAB 软件进行微积分运算，根据每章教学内容的特点，在章末以实验的形式介绍了 MATLAB 软件的相关内容.

在本书编写过程中，我们以《高等数学课程教学基本要求》为标准，以理论联系实际为特色，既体现了高等数学理论严谨又突出了微积分的实际应用. 为此本书精选了八个微积分实际应用中的典型案例，并在第十二章中加以介绍. 我们希望通过对高等数学内容的这种调整能激发学生学习数学的热情，并为他们将来应用数学解决实际问题打下坚实的基础.

本书分上、下两册，上册内容包括函数的极限与连续、导数与微分、微分学应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何初步等六章. 下册内容包括多元函数微分学、多元函数积分学、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程、微积分综合应用等六章. 全书每章都安排了相应的实验和数学家简介. 另外，本书还附有二、三阶行列式简介，MATLAB 操作基础，几种常见的曲线、记号说明. 其中王静编写了第六、十、十三章、章末的实验、附录以及习题答案与提示等；魏嘉编写了第三、四、五、十一、十二章，并负责全书的统稿；裴东林编写了第七、八、九章；李旭编写了第一、二章内容.

由于编者水平有限，疏漏之处在所难免，恳请读者给予批评指正.

编　者

2018 年 3 月

目 录

第一章　函数的极限与连续

微积分是一门以变量作为研究对象、以极限方法作为基本研究手段的数学学科. 应用极限方法研究各类变化率问题和几何学中曲线的切线问题,就产生了微分学;应用极限方法研究诸如曲边图形的面积等涉及微小量无穷积累的问题,就产生了积分学. 可以说,整个微积分学是建立在极限理论的基础之上的.

本章我们将在复习映射与函数等初等数学内容的基础上,介绍极限的概念、性质和运算法则;介绍与极限概念密切相关,且在微积分运算中扮演重要角色的无穷小量;我们还将求得两个应用非常广泛的重要极限. 学好这些内容,准确理解极限概念,熟练掌握极限运算方法,是学好微积分的基础.

本章的最后部分将通过极限引入函数的一类重要性质——连续性,连续性是对客观世界广泛存在的连续变动现象的数学描述. 由于连续函数具有良好的性质,不论在理论上还是在应用中都十分重要,故本课程主要讨论连续函数.

第一节　映射与函数

一、区间和邻域

在微积分中最常用的一类实数集是区间. 设 a 和 b 都是实数且 $a<b$,实数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间并记作 (a,b),即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间的端点,它们均不属于 (a,b). 类似地,可定义以 a,b 为端点的闭区间、半开区间等. 它们的记号和定义如下所列:

闭区间　$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$,

半开区间　$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$,$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

以上这些区间都称为有限区间(或有界区间),它们都可以用数轴上长度有限的线段来表示,如图 1-1 中(a),(b)分别表示闭区间$[a,b]$与开区间(a,b). 此外还有无限区间(或无穷区间),引进记号$+\infty$(读作"正无穷大")及$-\infty$(读作"负无穷大")后,则可用类似的记号表示无限区间,例如

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\},(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}.$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}.$$

前两个无限区间在数轴上的表示如图 1-1 中(c),(d)所示.

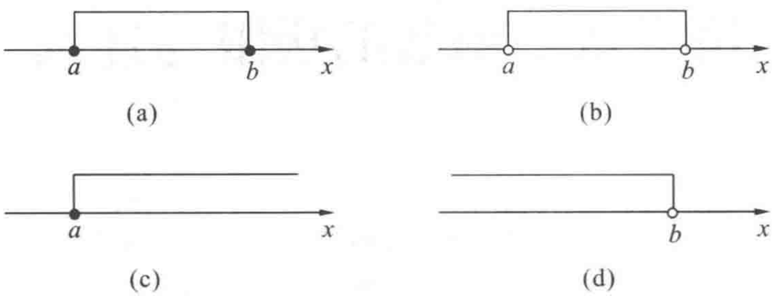


图 1-1

邻域是一种常用的集合. 设a,δ是实数且$\delta>0$,则定义点a的δ邻域(记作$U(a,\delta)$)为下列集合:

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\},$$

或写作

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

可见$U(a,\delta)$就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$. 点a叫作邻域的中心,δ叫作邻域的半径(见图 1-2). 如果把邻域的中心去掉,所得到的集合称为点a的去心δ邻域,记作$\mathring{U}(a,\delta)$,即

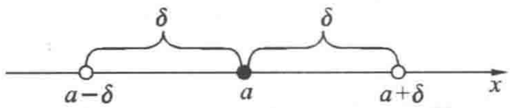


图 1-2

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

为了方便,有时把开区间$(a-\delta,a)$称为a的左δ邻域,把开区间$(a,a+\delta)$称为a的右δ邻域.

两个闭区间的直积表示xOy平面上的矩形区域,例如

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\mid x\in[a,b],y\in[c,d]\}$$

即为xOy平面上的一个矩形区域,其相邻两边各自平行于x轴与y轴,并且在x轴与y轴上的投影分别为区间$[a,b]$和$[c,d]$.

二、映射

1. 映射的概念

设X和Y是两个非空集合,如果存在一个法则T,使得X中的每个元素x按法则T在

Y 中有唯一的元素 y 与之对应,那么称 T 为从 x 到 y 的映射,记作

$$T:X\to Y,$$

元素 y 称为元素 x(在映射 T 下)的象,并记作 $T(x)$,即

$$y=T(x),$$

而元素 x 称为元素 y(在映射 T 下)的一个原象.

集合 X 称为映射 T 的定义域,T 的定义域常记作 $D(T)$. X 中所有元素的象所组成的集合称为映射 T 的值域,T 的值域常记作 $R(T)$. T 的值域有时也称为集合 X(在映射 T 下)的象并记作 $T(X)$,即

$$R(T)=T(X)=\{T(x)\mid x\in X\}.$$

2. 几类重要映射

设 T 是从集合 X 到集合 Y 的映射,若 $T(X)=Y$,即 Y 中任一元素均是 X 中某元素的象,则称 T 为 X 到 Y 上的满射;若对任意的 $x_1,x_2\in X,x_1\neq x_2$,必有 $T(x_1)\neq T(x_2)$,则称 T 为 X 到 Y 的单射;若 T 既是满射又是单射,则称 T 为 X 到 Y 上的一一映射,或称 T 为 X 与 Y 之间的一一对应.

例 1 设 $X_1=(-\infty,+\infty),X_2=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],Y_1=(-\infty,+\infty),Y_2=[-1,1]$. 考虑 $f_1:X_1\to Y_1$, $f_2:X_1\to Y_2$, $f_3:X_2\to Y_1$, $f_4:X_2\to Y_2$,其中 $f_i(i=1,2,3,4)$ 均为如下的对应规则:对定义域内的任一 x,$f_i(x)=\sin x$. 易知 f_1 是 X_1 到 Y_1 的映射,但既非满射,又非单射;f_2 是 X_1 到 Y_2 上的满射,但非单射;f_3 是 X_2 到 Y_1 的单射,但非满射;f_4 是 X_2 到 Y_2 上的满射,又是单射,即为一一映射.

3. 逆映射与复合映射

逆映射 设映射 T 为 X 到 Y 上的一一映射,则由定义,对每个 $y\in Y$,有唯一的 $x\in X$ 适合 $T(x)=y$,于是我们可得到一个从 Y 到 X 的映射,它将每个 $y\in Y$ 映为 X 中的元素 x,这里的 x 满足 $T(x)=y$. 我们把这个映射称为 T 的逆映射,记作 T^{-1}. 即 T^{-1} 为从 Y 到 X 的映射,对每个 $y\in Y$,如果 $T(x)=y$,则 $T^{-1}(y)=x$.

注意,只有一一映射才存在逆映射,因此也把一一映射称为可逆映射. 比如在例 1 中,只有 f_4 才存在逆映射 f_4^{-1},f_4^{-1} 即为大家熟悉的反正弦函数:$f_4^{-1}(x)=\arcsin x$,其定义域为 $[-1,1]$,值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

复合映射 设有映射 $T_1:X\to Y_1,T_2:Y_2\to Z$,且 $T_1(x)\subset Y_2$,由 T_1 和 T_2 可确定从 X 到 Z 的一个对应规则,它将每个元素 $x\in X$,映为 Z 中的元素 $z=T_2(T_1(x))$,显然这个对应规则是从 X 到 Z 的一个映射,我们把这个映射称为由 T_1,T_2 构成的复合映射,并记作 $T_2\circ T_1$,即

$T_2\circ T_1:X\to Z$,对每个元素 $x\in X$,$(T_2\circ T_1)(x)=T_2(T_1(x))$.

例如,设有映射 $T_1:\mathbf{R}\to[-1,1]$,$u=T_1(x)=\sin x$ 和映射 $T_2:[-1,1]\to[0,1]$,$y=T_2(u)=u^2$,则可构成复合映射 $T_2\circ T_1:\mathbf{R}\to[0,1]$,对 $\mathbf{R}$ 中的任一元素 x,

$$(T_2\circ T_1)(x)=T_2(T_1(x))=T_2(\sin x)=\sin^2 x.$$

三、函数

1. 函数概念

设数集 $D\subset\mathbf{R}$,则 D 到 $\mathbf{R}$ 的任一映射,称为定义在 D 上的一元函数,简称为函数,通常简记为 $y=f(x),x\in D$. $x(x\in D)$ 称为函数的自变量,$y(y\in f(D))$ 称为函数的因变量,习惯上也称 y 为 x 的函数. 前面定义的与映射有关的一些概念,如定义域、值域等,也适用于函数. 对于函数 $y=f(x),x\in D$,我们把 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 中的点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图形(或图像).

表示函数的符号是任意选取的,除了常用的 f 外,还可以用其他的英文或希腊字母,如 g,F,φ,Φ 等. 如果在同一个问题中讨论到几个不同的函数,则必须用不同的记号分别表示这些函数,以示区别.

在一些实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 例如自由落体运动中,设物体下落的时间为 t,下落的距离为 s. 如果开始下落的时刻是 $t=0$,落地时刻是 $t=T$,那么 s 与 t 之间的对应关系是

$$s=s(t)=\frac{1}{2}gt^2,t\in[0,T].$$

这个函数的定义域是区间 $[0,T]$.

在数学中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用算式表达的函数,这时约定函数的定义域就是使得算式有意义的一切实数组成的集合,称为函数的自然定义域. 例如 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的自然定义域是 $(-\infty,+\infty)$,$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的自然定义域是区间 $(-1,1)$.

我们定义的函数是指在确定的对应法则下,定义域内的每个元素只对应一个数值,即所谓的"单值函数". 但是往往会有这样的情况,即在某种对应规则下,变元 x 的一个值对应变元 y 有多于一个的值. 例如在 xOy 平面上,圆心在原点,半径为 a 的圆方程是 $x^2+y^2=a^2$. 如果将"满足这个方程"作为 x 与 y 之间的对应法则,那么当 $x=a$ 或 $-a$ 时,对应 $y=0$ 一个值;但当 x 取开区间 $(-a,a)$ 内任一个值时,对应的 y 有两个值. 因此当 $x\in(-a,a)$ 时,若仅仅以"满足方程 $x^2+y^2=a^2$"作为 x 与 y 之间的对应法则,那么这个法则就不符合函数的定义. 但是我们只要把对应法则稍作补充,比如规定当 $x\in[-a,a]$ 时,以"满足方程 $x^2+y^2=a^2$,并且 $y\geqslant 0$"作为对应法则,那么我们就得到了一个确定的(单值)函数,将它记为 $y=y_1(x)$,这时函数有算式表示 $y_1(x)=\sqrt{a-x^2}$. 同样,对应规则"满足方程 $x^2+y^2=a^2$,并且 $y\leqslant 0$"也确定了一个函数,将它记作 $y=y_2(x)$,$y_2(x)=-\sqrt{a-x^2}$. 有时为了叙述的方便,我们说方程 $x^2+y^2=a^2$ 确定了多值函数,并把 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 称为这个多值函数的两个单值分支.

具体表示一个函数时,可以用表格法、图形法、解析法(即算式表示法),有时也可用语言描述,这些是大家在中学里已熟悉的内容,这里就不再详细说明了.

下面举几个函数的例子,例中的定义域均指自然定义域.

例 2　(1)常数函数 $y=3$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$\{3\}$;

(2)绝对值函数 $y=|x|$的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$[0,+\infty)$.

例 3　符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0\end{cases}$$

的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$\{-1,0,1\}$. 它的图形如图 1-3 所示. 对任何 $x\in\mathbf{R}$,有 $x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|$或$|x|=x\operatorname{sgn} x$.

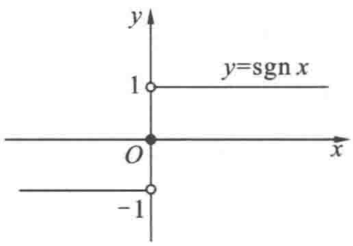


图 1-3

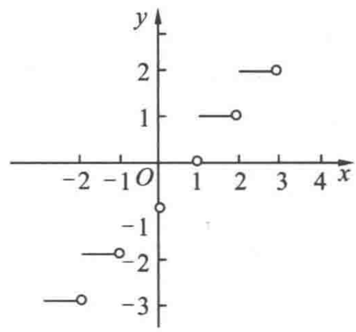


图 1-4

例 4　取整函数.

对任意的 $x\in\mathbf{R}$,用记号$[x]$表示不超过 x 的最大整数,从而得到定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数

$$y=[x],$$

称此函数为取整函数,$[x]$称为 x 的整数部分. 例如$\left[\frac{5}{7}\right]=0$,$[\sqrt{2}]=1$,$[\pi]=3$, $[-1]=-1$,$[-3.5]=-4$.

$y=[x]$的定义域是 $\mathbf{R}$,值域是 $\mathbf{Z}$. 图 1-4 是它的图形. 取整函数还可以表示成

$$y=[x]=n,当 x\in[n,n+1],n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

在例 3、例 4 中看到,有些函数在其定义域的不同部分,对应法则由不同的算式表达,这种函数叫作分段函数. 在科学技术和日常生活中,经常会遇到分段函数.

2. 函数的几种特性

有界性　设函数$f(x)$的定义域为 D,数集 $X\subset D$. 如果存在正数 M,使对任一数 $x\in X$,都满足

$$|f(x)|\leqslant M,$$

就称函数 f 在 X 上有界.

如果这样的 M 不存在,就称 f 在 X 上无界. 换言之,若对任意给定的一个正数 M(不论它多么大),总有某个 $x\in X$,使得$|f(x)|>M$,那么称 f 在 X 上无界.

函数有界的定义也可以这样表述:如果存在常数 M_1 和 M_2,使得对任一 $x\in X$,都有 $M_1<f(x)<M_2$,就称 f 在 X 上有界,并分别称 M_1 和 M_2 为$f(x)$在 X 上的一个下界和一个上界,通常把在 X 上全体有界函数所成之集记作 $B(X)$. 于是,f 在 X 上有界就可表示为 $f\in B(X)$.

容易知道，若$f(x)$在X上有界，则它在X上的上界和下界均不是唯一的.

单调性 设函数$f(x)$的定义域是D，区间$I\subset D$. 如果对任意的$x_1,x_2\in I$，当$x_1<x_2$时总有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

就称函数$f(x)$在区间I上是增加(或称递增)的；如果当$x_1<x_2$时，总有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

就称函数$f(x)$在区间I上是减少(或称递减)的.

增加或减少的函数均称为单调函数.

注：有的教科书把函数单调性定义中的不等式写作非严格的不等式，即≤或≥，而在本书中，除非另行说明，函数单调均指严格不等式意义下的单调，即严格单凋.

奇偶性 设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称(即当$x\in D$时必有$-x\in D$)，如果对任意的$x\in D$，总有

$$f(x)=f(-x),$$

就称$f(x)$是偶函数；如果对任意的$x\in D$，总有

$$f(x)=-f(-x),$$

就称$f(x)$是奇函数.

偶函数的图形关于y轴是对称的；奇函数的图形关于原点是对称的.

周期性 设函数$f(x)$的定义域为D. 如果存在不为0的数T，使得对每一个$x\in D$，有$x\pm T\in D$，且总有

$$f(x+T)=f(x),$$

就称$f(x)$是周期函数，T称作$f(x)$的周期. 通常我们说的周期指的是最小正周期.

大家都知道$y=\sin x$，$y=\cos x$是周期为2π的周期函数，$y=\tan x$是周期为π的周期函数. 显然，周期函数的定义域必是无界集(集合$A\subset\mathbf{R}$称为有界集，是指存在有限区间(a,b)，使得$A\subset(a,b)$. 若集合不是有界的，就称为无界集).

例5 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数}.\end{cases}$$

容易验证，$D(x)$是周期函数，任何有理数r都是它的周期，然而它没有最小正周期. 这个函数的图形是无法画出的.

3. 反函数与复合函数

相应于前面的逆映射与复合映射的概念，在一元函数中有反函数与复合函数的概念.

反函数 设一元函数$f:D\to f(D)$为一一映射，则称逆映射$f^{-1}:f(D)\to D$为函数f的反函数，f^{-1}的对应规则由f的对应规则所确定，即对每个$y\in f(D)$，如果$y=f(x)$，则$x=f^{-1}(y)$. 由于改变自变量和因变量的字母并不改变函数的对应关系，而且习惯上总是以x表示自变量，因此常把$x=f^{-1}(y)$写作$y=f^{-1}(x)$. 例如函数$y=x^3$是一个从$\mathbf{R}$到$\mathbf{R}$的一一映射，故有反函数$x=y^{\frac{1}{3}}$，$y\in\mathbf{R}$. 互换x和y的符号，将这个反函数写作$y=x^{\frac{1}{3}}$，$x\in\mathbf{R}$.

容易证明,若$f(x)$为定义在区间I上的单调函数,则$f(x)$是从I到$f(I)$的一一映射,其反函数必定存在,且$f(x)$与$f^{-1}(x)$有相同的单调性,即如果$f(x)$是增加(减少)的,则$f^{-1}(x)$也是增加(减少)的.

函数$y=f(x)$与它的反函数$y=f^{-1}(x)$的图形在同一坐标平面上是关于直线$y=x$对称的(见图1-5).

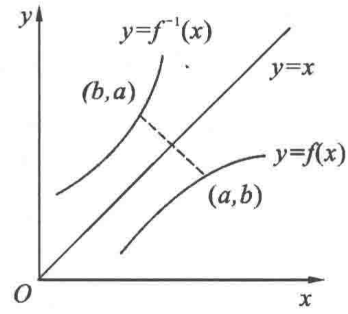


图1-5

复合函数　复合函数是一种特殊的复合映射. 如果复合映射定义中的集合X,Y_1,Y_2,Z都包含于实数集$\mathbf{R}$,就可得到复合函数的定义. 为了便于应用,下面我们利用通常的函数记号来把复合函数的定义重新叙述一遍.

设函数$y=f(u)$的定义域是D',函数$u=g(x)$在集合D上有定义且$g(D)\subset D'$,则将由下式

$$y=f(g(x))\quad(x\in D)$$

定义的函数称为由函数$y=f(u)$,$u=g(x)$构成的复合函数. 变量u称为中间变量,$u=g(x)$称为中间函数. 用$f\circ g$来记这个复合函数,即对每个$x\in D$,有

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)).$$

要注意,函数经复合后,其自然定义域未必是中间函数的自然定义域. 例如函数$y=\arcsin x^2$可看作由$y=\arcsin u$和$u=x^2$复合而成,但是$u=x^2$的自然定义域是$(-\infty,+\infty)$,相应的值域$[0,+\infty)$并没有完全包含在$y=\arcsin u$的自然定义域$[-1,1]$内,只有当$u=x^2$的自变量x在$D=[-1,1]$内取值时,u的对应值才属于$y=\arcsin u$的定义域,因此复合函数$y=\arcsin x^2$的定义域是$D=[-1,1]$. 还要注意两个函数能够复合的条件. 例如$y=\arcsin u$和$u=2+x^2$就不能构成复合函数,因为表达式$y=\arcsin(2+x^2)$对任何实数都没有意义.

4. 函数的运算

设函数$y=f(x)$和$y=g(x)$均在集合D上有定义,α,β为实数,则在D上可定义这两个函数的下列各种运算:

函数的和,记作$f+g$,定义为$(f+g)(x)=f(x)+g(x),x\in D$;

函数的差,记作$f-g$,定义为$(f-g)(x)=f(x)-g(x),x\in D$;

函数的积,记作$f\cdot g$,定义为$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),x\in D$;

函数的商,记作$\dfrac{f}{g}$,定义为$\dfrac{f}{g}(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)},x\in D$且$g(x)\neq 0$;

函数的线性组合,记作$\alpha f+\beta g$(α、β为实数),定义为

$$(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha f(x)+\beta g(x),x\in D.$$

5. 初等函数

在初等数学中已经讲过下面几类函数:

幂函数:$y=x^{\mu}$($\mu\in\mathbf{R}$是常数);

指数函数:$y=a^x$($a>0$,且$a\neq 1$);

对数函数:$y=\log_a x$($a>0$,且$a\neq 1$,特别当$a=\mathrm{e}$时,记为$y=\ln x$);

三角函数：如 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$ 等；

反三角函数：如 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$ 等.

以上列举的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

我们把由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和函数复合步骤所构成的并可以用一个算式表示的函数统称为初等函数. 例如 $y=\sqrt{x^2+1}, y=e^{\frac{1}{1-x}}$ 等都是初等函数，在本课程中讨论的函数基本上都是初等函数.

另外我们介绍一下工程技术上常用到的一类初等函数，即双曲函数及其反函数.

(1) 双曲正弦.

$$y=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

它的定义域是 $\mathbf{R}$，值域是 $\mathbf{R}$. 它是 $\mathbf{R}$ 上增加的奇函数.

(2) 双曲余弦.

$$y=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

它的定义域是 $\mathbf{R}$，值域是区间 $[1,+\infty)$. 它是偶函数并在区间 $(-\infty,0]$ 上减少，在区间 $[0,+\infty)$ 上增加. $\cosh 0=1$ 是这函数的最小值.

(3) 双曲正切.

$$y=\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},$$

它的定义域是 $\mathbf{R}$，它是 $\mathbf{R}$ 上的增加的奇函数. 由于对任意的 $x\in\mathbf{R}$，

$$\tanh x=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=1-\frac{2}{e^{2x}+1}<1,$$

又

$$\tanh x=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=-1+\frac{2}{1+e^{-2x}}>-1,$$

故它的图形夹在直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间.

以上三个双曲函数的图形见图 1－6 与图 1－7.

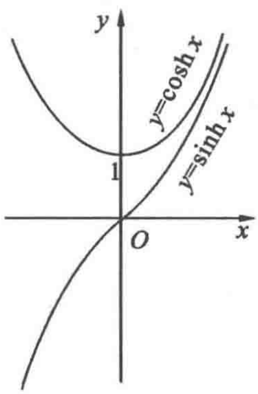


图 1－6

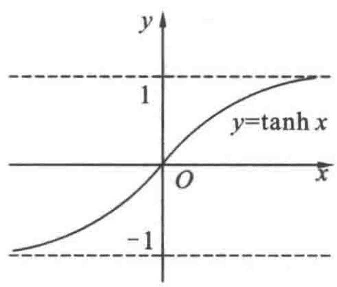


图 1－7

由双曲函数的定义,可以证明下面的恒等式:

$$\sinh(x+y)=\sinh x\cdot\cosh y+\cosh x\cdot\sinh y; \tag{①}$$

$$\cosh(x+y)=\cosh x\cdot\cosh y+\sinh x\cdot\sinh y; \tag{②}$$

$$\sinh(x-y)=\sinh x\cdot\cosh y-\cosh x\cdot\sinh y; \tag{③}$$

$$\cosh(x-y)=\cosh x\cdot\cosh y-\sinh x\cdot\sinh y. \tag{④}$$

在等式①和②中令 $y=x$,得

$$\sinh 2x=2\sinh x\cdot\cosh x, \tag{⑤}$$

$$\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x, \tag{⑥}$$

再在等式④中令 $y=x$,并由于 $\cosh 0=1$,就得

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1. \tag{⑦}$$

请注意将这些双曲函数的恒等式与三角恒等式加以比较,注意两者的异同.

(4)反双曲正弦.

双曲正弦函数 $y=\sinh x$ 的反函数称为反双曲正弦函数,记为

$$y=\operatorname{arsinh} x.$$

这个函数可以利用自然对数来表示,可推得:

$$y=\operatorname{arsinh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}). \tag{⑧}$$

函数 $y=\operatorname{arsinh} x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,它是 $\mathbf{R}$ 上的增加的奇函数. 其图形如图 1-8 所示.

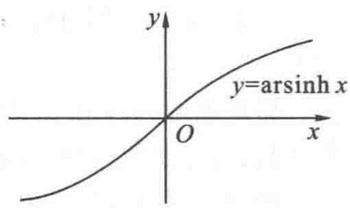


图 1-8

(5)反双曲余弦.

双曲余弦 $y=\cosh x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,它不是从自然定义域 $\mathbf{R}$ 到值域 $[1,+\infty)$ 的一一映射. 如果把它的定义域限制在函数保持单调的区间 $[0,+\infty)$ 上,这样得到的双曲余弦有反函数,称为反双曲余弦函数,记为

$$y=\operatorname{arcosh} x.$$

它也可用自然对数表示,可推得:

$$\operatorname{arcosh} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}). \tag{⑨}$$

函数 $y=\operatorname{arcosh} x$ 的定义域是区间 $[1,+\infty)$,值域是区间 $[1,+\infty)$,并在定义域上是增加的(见图 1-9).

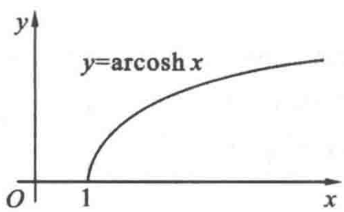


图 1-9

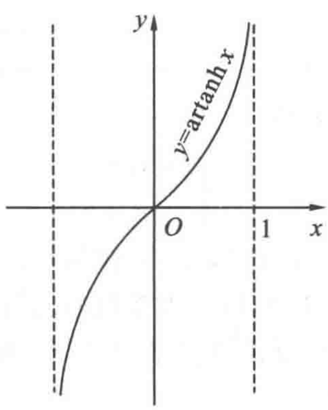


图 1-10

(6)反双曲正切.

双曲正切函数的反函数称为反双曲正切,记为 $y=\operatorname{arctanh} x$,并且可推得:

$$y=\operatorname{artanh} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}. \tag{⑩}$$

这个函数的定义域是开区间$(-1,1)$,它在区间$(-1,1)$上是增加的奇函数(见图1-10).

四、参数方程和极坐标

1. 参数方程

在平面直角坐标系中,曲线 l 上任一点的坐标 x 和 y 表示成变数 t 的函数,即

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(x).\end{cases}\quad(a\leqslant t\leqslant b) \tag{⑪}$$

如果对于 t 的每一个值$(a\leqslant t\leqslant b)$,由⑪确定的点 $P(x,y)$ 都在曲线 l 上,而且曲线 l 上的任一点 $P_0(x_0,y_0)$ 都可以由 t 的某一个值 t_0 通过⑪而得到,方程组⑪就叫作曲线 l 的参数方程.

简单地说,当 t 在$[a,b]$内变动时,点 $P(\varphi(t),\psi(t))$ 就描出曲线 l. 这里的变数 t 叫作参变数,简称参数. 它可以是有物理、几何意义的变数,也可以是没有明显意义的变数.

相对于参数方程来说,前面学过的直接给出曲线上点的坐标关系的方程,叫作曲线的普通方程.

曲线的参数方程⑪,是通过一个参数 t 来间接表示 x 和 y 之间关系的,它与曲线的直角坐标方程之间具有密切的关系. 如果从方程⑪中消去参数 t,就得到曲线的直角坐标方程;如果在直角坐标方程中,适当选取参数,也可以把它变换成参数方程.

例6 把直线方程 $y-y_1=(x-x_1)\tan\alpha$ 化为参数方程.

解 这是经过点 $P_1(x_1,y_1)$,倾角是 α 的直线的直角坐标方程,因为 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,所以此直线方程可以改写成

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\sin\alpha}.$$

设

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\sin\alpha}=t.$$

取 t 作为参数,得

$$\begin{cases}x=x_1+t\cos\alpha,\\ y=y_1+t\sin\alpha.\end{cases}$$

这就是过点 $P_1(x_1,y_1)$,倾角是 α 的直线的参数方程.

从图1-11可以看出参数的几何意义:$|t|$是 $P(x,y)$ 和 $P_1(x_1,y_1)$ 两点间的距离,P 在 P_1 的上方时 $t>0$,P 在 P_1 的下方时 $t<0$.

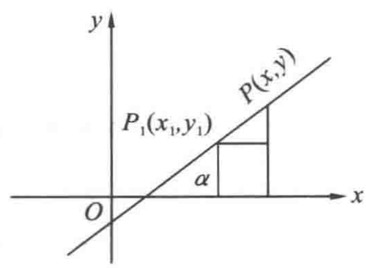


图1-11

例7 把圆的方程 $x^2+y^2=R^2$ 化为参数方程.