走向IMO

数学奥林匹克试题集锦（2012）

顾问　裘宗沪

2012年IMO中国国家集训队教练组　编

53rd International Mathematical Olympiad

MAR DEL PLATA-ARGENTINA

华东师范大学出版社

全国百佳图书出版单位

走向IMO

数学奥林匹克试题集锦

(2012)

2012年IMO中国国家集训队教练组 编

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

走向IMO:数学奥林匹克试题集锦. 2012/2012年IMO中国国家集训队教练组编. —上海:华东师范大学出版社,2012. 8
ISBN 978-7-5617-9860-7

Ⅰ. ①走… Ⅱ. ①2… Ⅲ. ①数学课-中学-竞赛题 Ⅳ. ①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第195915号

走向IMO
数学奥林匹克试题集锦(2012)

编　　者　2012年IMO中国国家集训队教练组
策划编辑　倪　明
项目编辑　孔令志
审读编辑　倪　明　孔令志
装帧设计　高　山

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　江苏句容市排印厂
开　　本　890×1240　32开
印　　张　5.5
插　　页　6
字　　数　120千字
版　　次　2012年9月第一版
印　　次　2012年9月第一次
书　　号　ISBN 978-7-5617-9860-7/G·5837
定　　价　20.00元

出 版 人　朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话021-62865537联系)

2012年IMO中国队在开幕式上

2012年IMO中国队合影　从左到右依次为:
李秋生　瞿振华　吴　昊　陈景文　王昊宇　刘宇韬　左　浩　佘毅阳　熊　斌　冯志刚

前　言

本书以2012年国家集训队的测试题和国家队的训练题为主体，搜集了2011年8月至2012年7月间国内主要的数学竞赛及2012年国际数学奥林匹克试题和解答，并且附上2012年美国和俄罗斯数学奥林匹克、罗马尼亚大师杯数学奥林匹克的试题与解答，这些试题大多是从事数学奥林匹克教学和研究的专家们的精心创作，其中的一些解答源自国家集训队和国家队队员，他们的一些巧思妙解为本书增色不少.

在过去的一年中，我国中学生数学竞赛的主要赛事有2011年全国高中数学联赛（由中国数学会普及工作委员会主办）、2012年中国数学奥林匹克（CMO）（由中国数学奥林匹克委员会主办），以及由中国数学奥林匹克委员会主办的第10届中国女子数学奥林匹克（CGMO）和第11届西部数学奥林匹克（WCMO）等.

在2012年国家集训队和国家队集训期间，得到了裘宗沪、王杰、潘承彪、周青等专家们的鼓励、支持和指导. 另外在国家集训队集训期间，除了集训队教练组外，陶平生教授、李建泉教授、葛军教授以及李秋生、岑爱国、顾滨老师也为学生做了专题讲座. 再次对他们表示衷心的感谢.

本书倾注了许多专家和学者的心血，书中有许多他们的创造

性工作.本书可供数学爱好者、参加数学竞赛的广大中学生、从事数学竞赛教学的教练员、开设数学选修课的教师参考.

2011 年全国高中数学联赛及加试由吴建平整理,2012 年中国数学奥林匹克由陈永高整理,2011 年第 10 届中国女子数学奥林匹克由朱华伟整理,2011 年第 11 届中国西部数学奥林匹克由刘诗雄整理,2011 年中国东南地区数学奥林匹克由李胜宏整理,2012 年国家集训队测试题由熊斌整理,2012 年中国国家队选拔考试题由瞿振华整理,2012 年第 53 届国际数学奥林匹克由熊斌和冯志刚整理.2012 年俄罗斯数学奥林匹克由李伟固提供,2012 年美国数学奥林匹克由张思汇提供,2012 年罗马尼亚大师杯数学奥林匹克由冯志刚、李秋生整理.

囿于作者的水平,加上编写时间仓促,不足和错误在所难免,请广大读者朋友批评指正,不吝施教.

2012 年 IMO 中国国家集训队教练组

2012 年 7 月

目　录

2011 年全国高中数学联赛

受中国数学会委托，2011 年全国高中数学联赛由湖北省数学会承办. 竞赛活动于 2011 年 10 月 16 日(星期日)举行.

2010 年 11 月 19 日，教育部发布了《关于调整部分高考加分项目和进一步加强管理工作的通知》，明确了新的政策：从 2011 年秋季进入高中阶段一年级的学生开始适用，2010 年(含)以前已进入高中阶段学习的学生，仍适用调整前的相关政策. 也就是说 2011 年和 2012 年的联赛一等奖获得者还可以保送，成了“保送末班车”.

为了做好过渡期的竞赛工作，确保安全平稳过渡，普委会制定了“全国高中数学联赛组织工作暂行办法(2011 年、2012 年实施)”，其中最重要的部分就是调整试卷的传送方式，各赛区有两种选择：

选择一：邮寄试卷方式. 联赛(一试)和加试(二试)试卷由全国高中数学联赛组委会统一命制、印刷、考前寄到有关赛区，各单位不得翻印试卷. 选择此方案的赛区，进入冬令营的名额只有三名.

选择二：网络传送方式. 联赛(一试)和加试(二试)的答题卷(不含试题)由全国高中数学联赛组委会统一提供模板，各赛区提前印制备用. 赛前组委会入围命制试题(包括联赛和加试)，考试当天从网上传送试题、解密、速印后送入考场进行考试.

由于是第一次采用这种方式传送试卷，联赛的承办单位——湖北省数学会做了大量的工作，考前进行了两次模拟. 在组委会和各赛区的共同努力下，考试日的各项工作一切顺利.

竞赛确定了“2011 年全国高中数学联赛赛区一等奖名单”：31 个赛区共有 1276 名同学获得赛区一等奖. 确定了“2012 年全国中学生数学冬令营营员名单”：有 222 名同学取得了参加 2012 年西安数学冬令营的资格.

一、填空题(每小题 8 分，共 64 分)

1 设集合 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，若 A 中所有三元子集的三个元素之和组成的集合为 $B=\{-1, 3, 5, 8\}$，则集合 $A=$ ________.

解 显然，在 A 的所有三元子集中，每个元素均出现了 3 次，所以

$$3(a_1+a_2+a_3+a_4)=(-1)+3+5+8=15,$$

故 $a_1+a_2+a_3+a_4=5$，于是集合 A 的四个元素分别为 $5-(-1)=6$, $5-3=2$, $5-5=0$, $5-8=-3$，因此，集合 $A=\{-3, 0, 2, 6\}$.

2 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ 的值域为________.

解 设 $x=\tan\theta$, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$，且 $\theta\neq\frac{\pi}{4}$，则

$$f(x)=\frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\tan\theta-1}=\frac{1}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

设 $u=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$，则 $-\sqrt{2}\leqslant u<1$，且 $u\neq 0$，所以 $f(x)=\frac{1}{u}\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup(1,+\infty)$.

3 设 a、b 为正实数，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant 2\sqrt{2}$，$(a-b)^2=4(ab)^3$，则 $\log_a b=$ ________.

解 由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant 2\sqrt{2}$，得 $a+b\leqslant 2\sqrt{2}ab$. 又

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=4ab+(a-b)^2=4ab+4(ab)^3\\&\geqslant 4\cdot 2\sqrt{ab\cdot(ab)^3}=8(ab)^2,\end{aligned}$$

即

$$a+b\geqslant 2\sqrt{2}ab. \qquad ①$$

于是

$$a+b=2\sqrt{2}ab. \qquad ②$$

再由不等式①中等号成立的条件，得 $ab=1$. 与②联立解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}-1,\\b=\sqrt{2}+1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\sqrt{2}+1,\\b=\sqrt{2}-1,\end{cases}$ 故 $\log_a b=-1$.

4 如果 $\cos^5\theta-\sin^5\theta<7(\sin^3\theta-\cos^3\theta)$，$\theta\in[0,2\pi)$，那么 θ 的取值范围是________.

解 不等式

$$\cos^5\theta-\sin^5\theta<7(\sin^3\theta-\cos^3\theta)$$

等价于

$$\sin^3\theta+\frac{1}{7}\sin^5\theta>\cos^3\theta+\frac{1}{7}\cos^5\theta.$$

又 $f(x)=x^3+\frac{1}{7}x^5$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，所以 $\sin\theta>\cos\theta$，故

$$2k\pi+\frac{\pi}{4}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{4}(k\in\mathbf{Z}).$$

因为 $\theta\in[0,2\pi)$，所以 θ 的取值范围是 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$.

5 现安排 7 名同学去参加 5 个运动项目，要求甲、乙两同学不能参加同一个项目，每个项目都有人参加，每人只参加一个项目，则满足上述要求的不同安排方案数为________.（用数字作答）

解 由题设条件可知，满足条件的方案有两种情形：

(1) 有一个项目有 3 人参加，共有 $C_7^3\cdot5!-C_5^1\cdot5!=3600$ 种方案；

(2) 有两个项目各有 2 人参加，共有 $\frac{1}{2}(C_7^2\cdot C_5^2)\cdot5!-C_5^2\cdot$

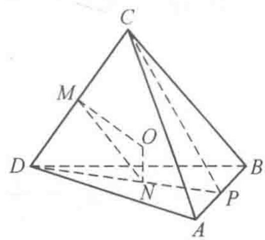
$5!=11\ 400$ 种方案.

所以满足题设要求的方案数为 $3600+11\ 400=15\ 000$.

6 在四面体 $ABCD$ 中,已知 $\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA=60^\circ$, $AD=BD=3$, $CD=2$,则四面体 $ABCD$ 的外接球的半径为________.

解 设四面体 $ABCD$ 的外接球球心为 O,则 O 在过 $\triangle ABD$ 的外心 N 且垂直于平面 ABD 的垂线上. 由题设知, $\triangle ABD$ 是正三角形,则点 N 为 $\triangle ABD$ 的中心. 设 P、M 分别为 AB、CD 的中点,则 N 在 DP 上,且 $ON\perp DP$, $OM\perp CD$.

因为 $\angle CDA=\angle CDB=\angle ADB=60^\circ$,设 CD 与平面 ABD 所成角为 θ,可求得 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.



在 $\triangle DMN$ 中, $DM=\dfrac{1}{2}CD=1$,

$DN=\dfrac{2}{3}\cdot DP=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3=\sqrt{3}$.

由余弦定理得

$$MN^2=1^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot 1\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=2,$$

故 $MN=\sqrt{2}$. 四边形 $DMON$ 的外接圆的直径

$$OD=\frac{MN}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}.$$

故球 O 的半径 $R=\sqrt{3}$.

7 直线 $x-2y-1=0$ 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A、B 两点，C 为抛物线上的一点，$\angle ACB=90^\circ$，则点 C 的坐标为________.

解 设 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(t^2, 2t)$，由 $\begin{cases}x-2y-1=0,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $y^2-8y-4=0$，则 $y_1+y_2=8$，$y_1y_2=-4$.

又 $x_1=2y_1+1$，$x_2=2y_2+1$，所以

$$x_1+x_2=2(y_1+y_2)+2=18,$$
$$x_1x_2=4y_1y_2+2(y_1+y_2)+1=1.$$

因为 $\angle ACB=90^\circ$，所以 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，即有

$$(t^2-x_1)(t^2-x_2)+(2t-y_1)(2t-y_2)=0,$$

即

$$t^4-(x_1+x_2)t^2+x_1x_2+4t^2-2(y_1+y_2)t+y_1y_2=0,$$

即

$$t^4-14t^2-16t-3=0,$$

即

$$(t^2+4t+3)(t^2-4t-1)=0.$$

显然 $t^2-4t-1\neq 0$，否则 $t^2-2\cdot 2t-1=0$，则点 C 在直线 $x-2y-1=0$ 上，从而点 C 与点 A 或点 B 重合. 所以 $t^2+4t+3=$

0,解得 $t_1=-1$, $t_2=-3$.

故所求点 C 的坐标为$(1, -2)$或$(9, -6)$.

8 已知 $a_n=C_{200}^{n}\cdot(\sqrt[3]{6})^{200-n}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}(n=1, 2, \cdots, 95)$,则数列$\{a_n\}$中整数项的个数为________.

解 $a_n=C_{200}^{n}\cdot 3^{\frac{200-n}{3}}\cdot 2^{\frac{400-5n}{6}}$.

要使 $a_n(1\leqslant n\leqslant 95)$ 为整数,必有$\frac{200-n}{3}$、$\frac{400-5n}{6}$均为整数,从而 $6\mid n+4$.

当 $n=2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, 56, 62, 68, 74, 80$ 时,$\frac{200-n}{3}$和$\frac{400-5n}{6}$均为非负整数,所以 a_n 为整数,共有 14 个.

当 $n=86$ 时,$a_{86}=C_{200}^{86}\cdot 3^{38}\cdot 2^{-5}$,在 $C_{200}^{86}=\frac{200!}{86!\cdot 114!}$ 中,200!中因数 2 的个数为

$$\left[\frac{200}{2}\right]+\left[\frac{200}{2^2}\right]+\left[\frac{200}{2^3}\right]+\left[\frac{200}{2^4}\right]+\left[\frac{200}{2^5}\right]+\left[\frac{200}{2^6}\right]+\left[\frac{200}{2^7}\right]=197,$$

同理可计算得 86!中因数 2 的个数为 82,114!中因数 2 的个数为 110,所以 C_{200}^{86} 中因数2的个数为 $197-82-110=5$,故 a_{86} 是整数.

当 $n=92$ 时,$a_{92}=C_{200}^{92}\cdot 3^{36}\cdot 2^{-10}$,在 $C_{200}^{92}=\frac{200!}{92!\cdot 108!}$ 中,同样可求得 92!中因数 2 的个数为 88,108!中因数 2 的个数为 105,故 C_{200}^{86} 中因数2的个数为 $197-88-105=4$,故 a_{92} 不是整数.

因此,整数项的个数为 $14+1=15$.

二、解答题(本大题共 3 小题,共 56 分)

9 (16 分) 设函数 $f(x)=|\lg(x+1)|$,实数 a、b $(a<b)$ 满足 $f(a)=f\left(-\frac{b+1}{b+2}\right)$, $f(10a+6b+21)=4\lg 2$,求 a、b 的值.

解 因为 $f(a)=f\left(-\frac{b+1}{b+2}\right)$,所以

$$
\begin{aligned}
|\lg(a+1)| &= \left|\lg\left(-\frac{b+1}{b+2}+1\right)\right| \\
&= \left|\lg\left(\frac{1}{b+2}\right)\right| = |\lg(b+2)|,
\end{aligned}
$$

所以 $a+1=b+2$ 或 $(a+1)(b+2)=1$,又因为 $a<b$,所以 $a+1\neq b+2$,所以 $(a+1)(b+2)=1$.

又由 $f(a)=|\lg(a+1)|$ 有意义知 $0<a+1$,从而

$$0<a+1<b+1<b+2,$$

于是

$$0<a+1<1<b+2.$$

所以

$$
\begin{aligned}
(10a+6b+21)+1 &= 10(a+1)+6(b+2) \\
&= 6(b+2)+\frac{10}{b+2}>1.
\end{aligned}
$$

从而

$$f(10a+6b+21)=\left|\lg\left[6(b+2)+\frac{10}{b+2}\right]\right|$$
$$=\lg\left[6(b+2)+\frac{10}{b+2}\right].$$

又

$$f(10a+6b+21)=4\lg 2,$$

所以

$$\lg\left[6(b+2)+\frac{10}{b+2}\right]=4\lg 2,$$

故 $6(b+2)+\frac{10}{b+2}=16$. 解得 $b=-\frac{1}{3}$ 或 $b=-1$(舍去).

把 $b=-\frac{1}{3}$ 代入 $(a+1)(b+2)=1$ 解得 $a=-\frac{2}{5}$.

所以 $a=-\frac{2}{5}$, $b=-\frac{1}{3}$.

10 (20 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=2t-3$ ($t\in\mathbf{R}$ 且 $t\neq\pm1$),

$$a_{n+1}=\frac{(2t^{n+1}-3)a_n+2(t-1)t^n-1}{a_n+2t^n-1}\ (n\in\mathbf{N}^*).$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $t>0$,试比较 a_{n+1} 与 a_n 的大小.

解 (1) 由原式变形得

$$a_{n+1}=\frac{2(t^{n+1}-1)(a_n+1)}{a_n+2t^n-1}-1,$$

则

$$\frac{a_{n+1}+1}{t^{n+1}-1}=\frac{2(a_n+1)}{a_n+2t^n-1}=\frac{\dfrac{2(a_n+1)}{t^n-1}}{\dfrac{a_n+1}{t^n-1}+2}.$$

记$\frac{a_n+1}{t^n-1}=b_n$，则 $b_{n+1}=\frac{2b_n}{b_n+2}$，

$$b_1=\frac{a_1+1}{t-1}=\frac{2t-2}{t-1}=2.$$

又$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_n}+\frac{1}{2}$，$\frac{1}{b_1}=\frac{1}{2}$，从而有

$$\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b_1}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2},$$

故$\frac{a_n+1}{t^n-1}=\frac{2}{n}$，于是有 $a_n=\frac{2(t^n-1)}{n}-1$.

$$\begin{aligned}(2)\ a_{n+1}-a_n&=\frac{2(t^{n+1}-1)}{n+1}-\frac{2(t^n-1)}{n}\\&=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}[n(1+t+\cdots+t^{n-1}+t^n)-\\&\quad(n+1)(1+t+\cdots+t^{n-1})]\\&=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}[nt^n-(1+t+\cdots+t^{n-1})]\\&=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}[(t^n-1)+(t^n-t)+\cdots+\\&\quad(t^n-t^{n-1})]\\&=\frac{2(t-1)^2}{n(n+1)}[(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+1)+\\&\quad t(t^{n-2}+t^{n-3}+\cdots+1)+\cdots+t^{n-1}],\end{aligned}$$