21世纪高等学校数学系列教材

新编高等数学

主　编　连保胜

副主编　王文波　鄂学壮　胡　松

WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

21世纪高等学校数学系列教材

新编高等数学

■ 主 编 连保胜
■ 副主编 王文波 鄂学壮 胡 松

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学/连保胜主编.—武汉:武汉大学出版社,2019.8
21 世纪高等学校数学系列教材
ISBN 978-7-307-20714-1

Ⅰ.新…　Ⅱ.连…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 022285 号

责任编辑:杨晓露　　责任校对:汪欣怡　　版式设计:马　佳

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮箱:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)
印刷:北京虎彩文化传播有限公司
开本:787×1092　1/16　印张:15　字数:362 千字　插页:1
版次:2019 年 8 月第 1 版　2019 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-20714-1　定价:33.00 元

前　言

新编高等数学的目的，是引导学生从一个完全技术的角度重新认识和理解这门课. 一个最基本的目的是试图从最简单的角度让读者感受和接受数学最基础的内容和方法，学会用自己的方法去理解和把握高等数学的学习和应用.

本书中有大量编者对高等数学最通俗的理解和把握，从某些层面上而言是简单的，但是是有效的. 我们编写这本书的目的不是期许读者做多少题目，完成多少练习，恰恰相反，我们的愿望是希望读者在阅读的过程中，在记忆的基础上，可以充分发挥自己的能力，少做题，甚至不做题，却可以感悟高等数学的本质，这才是我们最深层的愿望.

此书大胆打破了传统高等数学教学中的板块分割，按照一种内在的联系重新编排了高等数学的一些内容，限于教学的方便，我们在某些方面依然做出了一些分割，希望读者在阅读的过程中，可以自己加以适当的连接，实现知识系统的网络化.

本书在保留传统教材优点的基础上，对教材内容布局做了适当的调整与优化，全书以极限理论为工具，研究了五大类基本函数，以及变限函数的微运算和无穷次运算架构.

本书分四大部分：第一部分介绍高等数学的初等基础，主要介绍函数相关基础以及空间向量相关知识，同时介绍高等数学的高等工具，极限以及相关问题，包括各类极限的求法规范；第二部分是微商运算与微分运算方面的知识总结，提出我们特有的公式加口诀模式；第三部分集中介绍各类积分的联系与差异，总结提高学生对积分运算的总体规则的把握，提高学生对无穷次加法的理解；第四部分简单介绍离散变量数学的代表级数相关知识，级数的学习和相关核心问题以及方法综述.

本书由连保胜任主编，王文波、鄂学壮和胡松任副主编，连保胜提出编写思路和编写提纲，并进行统稿和定稿. 其中第一部分、第二部分由鄂学壮和胡松编写，第三部分、第四部分由连保胜和王文波编写.

特别感谢武汉科技大学理学院和教务处对本书的大力支持!

由于编者的水平局限，书中存在一些不妥之处，希望专家、同行、读者批评指正，以便将来不断完善.

目　录

第一部分　高等数学基础

第三部分　积分学

第四部分　离散变量数学基础

第一部分　高等数学基础

高等数学的直接基础包括初等函数以及相关知识和函数数列极限的相关理论，其中初等函数以及非初等函数是高等数学的基本研究对象，而极限与它的相关理论是高等数学的研究工具.

第一章 初等函数基础

1.1 集合、区间、区域

1.1.1 集合

集合是现代数学的基本概念，它其实是一种分类方法，按照某个明确的(标准)条件，将考察对象严格地划分为两类，一类对象符合这个条件要求，这些对象属于这个集合；另一类对象不满足这个条件，它们不属于这个集合.

属于集合的对象称为该集合的元素，一般用小写字母表示，而集合用大写字母表示.

例如：对象是大一数学班的全体同学，集合的标准是年龄不小于18岁，这些同学中年龄不小于18岁的都在这个集合中，而年龄小于18岁的则不在这个集合中.

集合的定义是描述性的，满足某条件的所有对象简单地放在一起，就构成了一个集合. 对象称为集合中的元素.

集合常用的表示有以下两种方法：

列举法(枚举法)：将集合中的元素不重复、不论顺序地一一列出，此方法适用于只有有限个元素构成的集合或者集合中虽有无限个元素但元素之间有内在规律的集合. 例如：有限元素集合$\{a, b, c\}$；无限元素集合$\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.

描述法(解析法)：选取集合的代表元，然后使用数学方式描述代表元具备的性质. 例如：$\{y \mid y = \sqrt{x-1}, x \geqslant 1\}$.

1. 关于集合的两大核心关系

(1) 元素和集合的"属于"关系：使用数学符号$\in$，$\notin$. 元素$\in$集合，表示元素在集合内；元素$\notin$集合，表示元素不在集合内.

例如，$1 \in \{y \mid y = \sqrt{x-1}, x \geqslant 1\}$，$-1 \notin \{y \mid y = \sqrt{x-1}, x \geqslant 1\}$.

(2) 集合与集合的"包含"关系：使用数学符号$\subset$，$\supset$，$\subseteq$，$\supseteq$，$\not\subset$. 务必认清每个符号的含义.

例如，$\{x \mid y = \sqrt{x-1}\} \subset \{y \mid y = \sqrt{x-1}, x \geqslant 1\}$.

集合的包含关系构成集合的子集定义，如果一个集合的元素都属于另一个集合，则称该集合为另一集合的子集. 数学描述为：$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$，则$A \subseteq B$.

真子集：$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$，$\exists x \in B \Rightarrow x \notin A$，则$A \subset B$.

特别说明：

如果一个集合不含有任何一个元素，则这个集合称为空集.

空集是任何非空集合的真子集.

一个 n 元集合的真子集有 (2^n-1) 个.

2. 集合与集合的运算

首先应该明确集合与集合的运算结果依然是一个集合.

集合的基本运算为交、并、补三种运算.

(1) 交运算(俗称集合的乘法)：数学表达式为

$$C=AB=A\cap B\Leftrightarrow \forall x\in A,\ x\in B\Rightarrow x\in C,\ \forall x\in C\Rightarrow x\in A,\ x\in B.$$

(2) 并运算(俗称集合的加法)：数学表达式为

$$C=A+B=A\cup B\Leftrightarrow \forall x\in A \text{ 或 } x\in B\Rightarrow x\in C,\ \forall x\in C\Rightarrow x\in A \text{ 或 } x\in B.$$

(3) 补运算：数学表达式为

$$C_I^A=\bar{A}\Leftrightarrow \forall x\in \bar{A}\Rightarrow x\in I,\ x\notin A.$$

以上三种运算为集合运算的核心基础，也就是集合的其他运算均可以使用上述三种运算来表达或者刻画.

(4) 差运算：数学表达式为

$$C=A-B\Leftrightarrow \forall x\in A,\ x\notin B\Rightarrow x\in C,\ \forall x\in C\Rightarrow x\in A \text{ 且 } x\notin B.$$

(5) 对称差：数学表达式为

$$C=(A-B)\cup(B-A).$$

(6) 混合运算核心公式为狄默根律：

交的补等于补的并：$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$;

并的补等于补的交：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$.

以上结论可以使用文氏图来轻松证明.

注意：以上所论述的关于集合的两大关系，三大核心运算是集合论的基本起点. 集合内部的元素之间没有什么特殊的联系，它们只是简单地放在一起，构成一个总体而已.

如果某集合的元素之间存在某种关系，或者存在某些运算，而运算的结果依然是这集合的元素，这样的集合就构成了一些特殊的群体，例如，如果集合的元素之间可以进行加法运算、乘法运算，并且运算的结果依然在这个集合内，这样的集合就构成了一些新的数学概念，形成新的数学分支. 例如，有理数集合，它的元素之间的加法，运算结果依然是有理数，在有理数这个集合内，有理数这个集合就构成了一个特殊的群体.

需特别强调的是，如果集合的任意两个元素之间的运算结果也是这个集合的元素，那么我们就称这个集合对该运算具备封闭性，具备封闭性的集合就可以构成某个空间.

可见空间并不是一个神秘的概念，它也是一个集合，且对某运算具备封闭性.

1.1.2 区间、区域

1. 常用邻域

(1) 数轴上的邻域.

点 x_0 的 δ 邻域：$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)=\{x: |x-x_0|<\delta\}$，表示在一维数轴上以 x_0 为中心，以 δ 为半径的一个开区间.

点 x_0 的 δ 去心邻域：$\mathring{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x:0<|x-x_0|<\delta\}$，

表示在一维数轴上以 x_0 为中心，以 δ 为半径的一个区间，去掉中心 x_0.

(2) 平面上的邻域.

点 (x_0, y_0) 的 δ 邻域：$U((x_0, y_0), \delta)=\{(x, y): (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$，表示在二维平面上以 (x_0, y_0) 为中心，以 δ 为半径的一个开区域(圆面不含边界).

点 (x_0, y_0) 的 δ 去心邻域：$\mathring{U}((x_0, y_0), \delta)=\{(x, y): 0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$，表示在二维平面上以 (x_0, y_0) 为中心，以 δ 为半径的一个开区域，去掉中心 (x_0, y_0)(圆面不含边界，去掉圆心).

当然，平面邻域还可以是其他类型的邻域，比如方形邻域：$\{(x, y): |x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta\}$，等.

读者应该熟练地画出相应的图形.

2. 几种拓扑点的概念

这些拓扑点的概念刻画了点与集合的拓扑距离关系：拓扑距离为 0，以及拓扑距离不等于 0. 注意它不同于元素与集合的"属于"关系.

(1) 内点.

如果某点的一个邻域内的所有点都在这个点集合内，该点在这个集合的内部，称此点为点集合的内点. 例如，1 表示的点是点集合 $(0, 2)$ 的内点.

数学语言：

一维(数轴上)：对于点 x_0 与点集合 A，若 $\exists U(x_0, \delta)\subset A$，则 x_0 是点集合 A 的内点；

二维(平面上)：对于点 (x_0, y_0) 与点集合 A，若 $\exists U((x_0, y_0), \delta)\subset A$，则 (x_0, y_0) 是点集合 A 的内点；

可以肯定，内点一定属于集合.

(2) 外点.

如果某点的一个邻域内的所有点都不在这个点集合内，该点就在这个点集合的外部，称此点为点集合的外点. 例如，1 表示的点是点集合 $(2, 3)$ 的外点.

数学语言：

一维(数轴上)：对于点 x_0 与点集合 A，$\exists U(x_0, \delta)\subset \bar{A}$，则 x_0 是点集合 A 的外点；

二维(平面上)：对于点 (x_0, y_0) 与点集合 A，$\exists U((x_0, y_0), \delta)\subset \bar{A}$，则 (x_0, y_0) 是点集合 A 的外点.

可以肯定，外点一定不属于集合.

(3) 边界点.

如果某点的任何一个邻域内有点在这个点集合内，也有点在这个点集合外，该点就在这个点集合的边界上，称此点为点集合的边界点.

数学语言：

一维(数轴上)：对于点 x_0 与点集合 A，$\forall \delta>0$，$\exists x_1\in U(x_0, \delta)$，$x_1\in A$，且 $\exists x_2\in U(x_0, \delta)$，$x_2\in \bar{A}$，则 x_0 是点集合 A 的边界点；

二维(平面上)：对于点 (x_0, y_0) 与点集合 A，$\forall \delta>0$，$\exists (x_1, y_1)\in U(x_0, \delta)$，

$x_1 \in A$ 且 $\exists (x_2, y_2) \in U(x_0, \delta)$，$x_2 \in \bar{A}$，则$(x_0, y_0)$ 是点集合 A 的边界点.

例如，1 表示的点是点集合(1，3) 与集合[1，3] 的边界点.

注意：边界点可以在这个集合内，也可以在集合外.

例如，由离散的点构成的集合中的每个点都是集合的边界点，如点集合{1，2，3，4，5}，它的每一个点都是它的边界点.

3. 按拓扑点结构对集合的分类

(1) 开集.

一个点集合内的任何一个点都是它的内点，这个点集合称为开集.

数学表述：$\forall a \in A$，$\exists \delta > 0$，$U(a, \delta) \subset A$，则 A 是开集.

我们通常所说的开区间就是最常见的开集，上述的非去心邻域均为开集.

(2) 闭集.

一个点集合由它的全体内点与边界点组成，这个点集合称为闭集.

我们通常所说的闭区间就是最常见的闭集.

(3) 连通性.

集合可能会由几个部分构成(或者由无限个部分组合而成)，连通性刻画的就是部分与部分之间的连接关系.

如果集合内的任何两个点，存在一条连接它们的折线，且这条折线上的点全部在集合内，这样的集合称为连通集合(连通集).

连通的开集称为开域，连通的闭集称为闭域.

“域”其实就是“集”加上“连通性”.

简单开域(单连通开域)：如果集合内任意两点之间的封闭折线围成的区域内包含的所有点均在这个集合内，则这个集合为简单开域，通俗而言，就是集合内部无空洞(气泡).

1.2 二阶三阶行列式的计算

二阶和三阶行列式的计算口诀是：二阶、三阶用刀切，二阶切两刀，主对角线是正一刀，副对角线是负一刀，每刀上的元素做乘积，结果相加.

二阶行列式：$\begin{vmatrix} ab \\ cd \end{vmatrix} = ad - bc.$

三阶行列式：$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$

行列式(由行与列排列而成的代数式) 是一种算法结构，不是集合，它的运算结果是一个代数式.

行列式的核心算法要义：所有取自不同行、不同列的元素之积的代数和(参看线性代数书籍).

1.3 五大类基本初等函数

高等数学研究的对象主要是函数及其相关性质(微运算与无穷次运算)，高等数学中"高等"的含义不是指所研究的对象很难，不要理解为初等数学研究的函数是很简单的，而高等数学研究的函数是复杂的和困难的，而是指加、减、乘、除四则运算上的进化.

初等数学：初等数学的运算核心是对象的加、减、乘、除以及函数之间的复合，且这些四则和复合运算只进行有限次与看得见的运算，这就是初等运算的核心含义.

高等数学：高等数学与初等数学本质上有类似的地方，它也是函数对象的四则和复合运算，但与初等数学不同的地方是高等数学的运算是无限次与看不见的微运算. 进行无限次与看不见的微运算，需要新的工具，基础工具就是极限，这样以极限为基础的函数的四则运算就构成了所谓的高等数学.

但高等数学中函数的四则和复合运算在形式上仍然发生了一些变化，例如，无限次的加法有了新的形式：级数(离散)和积分(连续)；无限小的减法新的形式是微分；无限小的除法新的形式为求导，等等.

在这里，应该树立一个基本的概念，不论如何高深的数学，其本质依然是对研究对象进行四则和复合运算，只不过运算形式和运算对象与规则发生了一些变化.

回顾一下五大类基本函数是很有必要且必须的，这个是高等数学基础之中的基础.

1.3.1 学习初等函数的基本口诀

初等函数学习的口诀是：定义域是陷阱；参数是关键；图像是方法.

口诀明确告诉我们，只要看到函数，不管是涉及它的任何问题，定义域是读者应该首先明确的.

例 1 已知 $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$，求 y.

解：由函数的定义域知 $y=0$.

参数直接影响函数的性质，是决定函数性质的关键，也是讨论函数的核心，直接影响着两个(多个)变量之间的对应法则.

图像是函数在坐标下的直观体现，是我们对函数进行研究与认识的最有效的手段.

以上对应的问题，希望读者在回顾过去的基础上加以总结与体会.

1.3.2 五大类基本函数

在这里我们形象地将它们称为"五指山".

1. 第一类(拇指)：幂函数

其表达式为 $y=x^a$，其中 a 为常数参数，幂函数的性质，被这个参数 a 决定，对幂函数的讨论，也是对这个参数 a 的讨论. 讨论如下：

(1) $a>0$ 的典型代表：$a=1$，$a=2$，$a=3$. $y=x^2$ 是偶函数(2 是偶数)的代表；$y=x^1$，$y=x^3$ 是奇函数(1，3 是奇数)的代表，特别地，当 $a=1$ 时是线性函数的代表；

(2) $a<0$ 的典型代表：$a=-1$，$a=-2$. $y=x^{-2}$ 是偶函数(-2 是偶数)的代表；$y=x^{-1}$ 是奇函数(-1 是奇数)的代表；