 21世纪高等学校数学系列教材

新编高等数学


■ 主 编 连保胜

■ 副主编 王文波 鄂学壮 胡 松



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

 **21**世纪高等学校数学系列教材

新编高等数学

■ 主 编 连保胜

■ 副主编 王文波 鄂学壮 胡 松



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学/连保胜主编. —武汉:武汉大学出版社, 2019.8
21世纪高等学校数学系列教材
ISBN 978-7-307-20714-1

I.新… II.连… III.高等数学—高等学校—教材 IV.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第022285号

责任编辑:杨晓露

责任校对:汪欣怡

版式设计:马佳

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮箱:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:北京虎彩文化传播有限公司

开本:787×1092 1/16 印张:15 字数:362千字 插页:1

版次:2019年8月第1版 2019年8月第1次印刷

ISBN 978-7-307-20714-1 定价:33.00元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

前 言

新编高等数学的目的,是引导学生从一个完全技术的角度重新认识和理解这门课.一个最基本的目的是试图从最简单的角度让读者感受和接受数学最基础的内容和方法,学会用自己的方法去理解和把握高等数学的学习和应用.

本书中有大量编者对高等数学最通俗的理解和把握,从某些层面上而言是简单的,但是有效的.我们编写这本书的目的不是期许读者做多少题目,完成多少练习,恰恰相反,我们的愿望是希望读者在阅读的过程中,在记忆的基础上,可以充分发挥自己的能力,少做题,甚至不做题,却可以感悟高等数学的本质,这才是我们最深层的愿望.

此书大胆打破了传统高等数学教学中的板块分割,按照一种内在的联系重新编排了高等数学的一些内容,限于教学的方便,我们在某些方面依然做出了一些分割,希望读者在阅读的过程中,可以自己加以适当的连接,实现知识系统的网络化.

本书在保留传统教材优点的基础上,对教材内容布局做了适当的调整与优化,全书以极限理论为工具,研究了五大类基本函数,以及变限函数的微运算和无穷次运算架构.

本书分四大部分:第一部分介绍高等数学的初等基础,主要介绍函数相关基础以及空间向量相关知识,同时介绍高等数学的高等工具,极限以及相关问题,包括各类极限的求法规范;第二部分是微商运算与微分运算方面的知识总结,提出我们特有的公式加口诀模式;第三部分集中介绍各类积分的联系与差异,总结提高学生对积分运算的总体规则的把握,提高学生对无穷次加法的理解;第四部分简单介绍离散变量数学的代表级数相关知识,级数的学习和相关核心问题以及方法综述.

本书由连保胜任主编,王文波、鄂学壮和胡松任副主编,连保胜提出编写思路和编写提纲,并进行统稿和定稿.其中第一部分、第二部分由鄂学壮和胡松编写,第三部分、第四部分由连保胜和王文波编写.

特别感谢武汉科技大学理学院和教务处对本书的大力支持!

由于编者的水平局限,书中存在一些不妥之处,希望专家、同行、读者批评指正,以便将来不断完善.

1.1 空间解析几何	20
1.2 曲线与曲面	20
1.3 空间直角坐标系	21
1.4 空间曲线与曲面	23
1.5 平面与直线的方程	23
1.6 空间曲线与曲面的投影	25
1.7 高等数学基础	26
1.8 高等数学基础	26

目 录

第一部分 高等数学基础

第一章 初等函数基础	3
1.1 集合、区间、区域	3
1.1.1 集合	3
1.1.2 区间、区域	4
1.2 二阶三阶行列式的计算	6
1.3 五大类基本初等函数	7
1.3.1 学习初等函数的基本口诀	7
1.3.2 五大类基本函数	7
1.4 抽象函数基本问题	11
1.4.1 函数的定义域和值域	11
1.4.2 函数的单调性	12
1.4.3 函数的周期性	12
1.4.4 函数的反函数	13
1.4.5 函数的表达式	13
1.4.6 函数图像的对称、平移和旋转	14
1.4.7 函数的有界性	16
1.5 分段函数	16
1.6 幂指函数	16
1.7 空间解析几何(图像与方程)	16
1.8 向量代数基础	17
1.8.1 向量代数的本质	17
1.8.2 向量运算	17
1.9 空间解析几何	20
1.10 曲线方程、曲面方程、体	20
1.11 空间直线方程	21
1.12 空间平面方程	22
1.13 旋转曲面方程和柱面方程	23
1.14 空间曲线在坐标平面上的投影	23
1.15 离散数列基础	26
练习一	26

第二章 高等数学的基本工具	28
2.1 极限的定义与其基本性质	28
2.1.1 数列极限	28
2.1.2 数列极限的性质与法则	29
2.1.3 一元函数的极限	29
2.1.4 二元函数的极限	30
2.1.5 多元函数的极限的三个基本问题	31
2.2 极限和连续以及间断的分类	32
2.2.1 连续的定义	32
2.2.2 间断与其分类	33
2.2.3 函数间断的核心问题	34
2.2.4 连续函数的性质	36
2.3 极限的计算方法概论	36
2.3.1 无穷大(小)的阶	37
2.3.2 未定式的极限求法	38
练习二	56
第二部分 微分学	
第三章 导数	61
3.1 导数的定义与基本性质	61
3.1.1 一元函数的导数定义	61
3.1.2 二元函数偏导数的定义	63
3.1.3 方向导数	63
3.1.4 梯度	64
3.1.5 导数的运算结构	65
3.1.6 可微、可导和连续的关系	65
3.2 导数符号的再认识	67
3.2.1 一元函数导数符号的两重特性及其应用	67
3.2.2 高阶导数的求导公式	68
3.2.3 高阶导数的具体问题	69
3.2.4 偏导数符号系统	70
3.3 基本求导步骤和口诀	71
3.4 微分中值定理	78
3.4.1 费马定理	78
3.4.2 罗尔定理	79
3.4.3 拉格朗日定理	79
3.4.4 柯西中值定理	79
3.5 泰勒展式(高阶微分中值定理)	81
练习三	87

第四章 导数的基本应用	90
4.1 曲线的切线和法平面、曲面的切平面和法线	90
4.1.1 求平面曲线的切线	90
4.1.2 空间曲线的切线、法平面方程和空间曲面的切平面、法线方程	91
4.2 通过一阶导数看原函数的单调性(简称“一阶单调”)	93
4.2.1 驻点、极值、最值、不等式的证明、零点的个数问题	93
4.2.2 导数与单调性	94
4.2.3 导数与最值、极值	95
4.2.4 导数与方程根的个数	96
4.2.5 证明不等式	97
4.3 通过二阶导数看函数的凸凹性与拐点	97
4.4 条件极值与非条件极值	98
4.4.1 多元函数的无条件极值	98
4.4.2 条件极值的拉格朗日乘数法	99
4.5 函数的渐近线	99
4.6 函数作图的基本流程	100
4.7 曲线曲率	100
练习四	101

第三部分 积分学

第五章 不定积分(微分的逆运算)	105
5.1 全微分与不定积分的定义	105
5.1.1 两种差运算符号 Δ 与 d	105
5.1.2 微分公式推导	105
5.1.3 多元函数的全微分	106
5.1.4 微分和积分互为逆运算	107
5.2 不定积分	108
5.2.1 不定积分计算基本视角	108
5.2.2 不定积分的计算思路	108
5.2.3 不定积分计算	109
练习五	120

第六章 定积分	121
6.1 定积分的符号系统与其含义	121
6.1.1 定积分的定义	121
6.1.2 $\int_a^b f(x)dx$ 的符号含义	121
6.2 微积分基本定理	123
6.3 积分中值定理	125

6.4	积分函数的性质研究	125
6.5	定积分计算的“三大绝招”	126
6.6	定积分的应用	132
6.6.1	几何应用	132
6.6.2	物理应用	134
6.7	反常积分	135
6.7.1	无穷限积分	135
6.7.2	无穷界积分(瑕积分)	135
6.8	参变微积分	136
6.9	重积分的符号意义	137
6.10	二重积分的计算方法	138
6.11	切割法与积分换序	138
6.12	外微分与坐标换元法	141
6.12.1	外微分	141
6.12.2	换元法	141
6.13	三重积分的基本算法	143
6.13.1	切割法	143
6.13.2	坐标换元法	145
6.14	重积分的相关问题	146
6.14.1	积分换次序与化重积分为累次积分	146
6.14.2	坐标变换求重积分	148
6.14.3	有关等式的证明	148
6.14.4	重积分不等式的证明	149
6.14.5	化一重积分为二重积分的反向应用	150
6.14.6	对称区间、对称函数的积分	151
6.15	关于积分(重)计算的基本方法	151
	练习六	152
第七章 曲线积分与曲面积分		154
7.1	沿曲线和曲面积分计算的基本方法	154
7.1.1	基本计算方法综述	154
7.1.2	曲线积分和曲面积分计算的核心套路	154
7.1.3	沿曲线积分和曲面积分算法的基本步骤	155
7.2	曲线积分的符号系统与其含义	155
7.3	各类曲线积分的具体算法	156
7.3.1	第一类曲线积分的算法模式	156
7.3.2	第二类曲线积分的算法模式	157
7.4	全微分与路径无关性	161
7.4.1	全微分与路径无关	161

7.4.2	路径无关性的判断	161
7.5	曲面积分的符号系统与其含义	163
7.5.1	第一类曲面积分 $\iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS$	163
7.5.2	第二类曲面积分 $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dx dy$	163
7.6	曲面积分的基本算法	163
7.6.1	第一类曲面积分(对曲面面积的积分)的算法	163
7.6.2	第二类曲面积分(对坐标平面的积分)的算法	164
7.7	外微分与边界积分和内部积分的互相转化关系	166
7.7.1	四大公式的共性	166
7.7.2	用外微分对上述公式简易证明	167
7.8	格林公式的应用	168
7.9	定积分中微元的符号问题	169
7.9.1	定积分的几类形式回顾	169
7.9.2	微元符号的确定	169
	练习七	171

第八章	常微分方程初步	173
8.1	常微分方程的基本概念和关键名词	173
8.2	一阶常微分方程的分类与对应方法	174
8.3	二阶常微分方程的方法	178
8.4	常系数微分方程的方法	179
8.5	含变限积分的微分方程	181
8.6	线性微分方程的解的结构	182
	练习八	182

第四部分 离散变量数学基础

第九章	级数	187
9.1	级数的概念与基本性质	187
9.1.1	级数的定义	187
9.1.2	三类重要级数	188
9.2	级数的收敛和发散判别法	189
9.2.1	正项级数的收敛和发散的判断准则	189
9.2.2	三种比较方法	190
9.3	另一特殊级数:交错项级数	195
9.4	绝对收敛和条件收敛	195
9.5	幂级数	196
9.6	傅里叶级数	198

9.7 级数求和与级数展开 200

9.8 无穷限非正常积分与级数的关系 203

 9.8.1 收敛性的相通性 203

 9.8.2 相互转化性 203

练习九 204

习题答案或提示 206

附录 高等数学参考公式 220

 1.1 行列式 220

 1.2 多元函数的微分法 220

 1.3 多元函数的微分法 220

 1.4 多元函数的微分法 220

 1.5 多元函数的微分法 220

 1.6 多元函数的微分法 220

 1.7 多元函数的微分法 220

 1.8 多元函数的微分法 220

 1.9 多元函数的微分法 220

 1.10 多元函数的微分法 220

 1.11 多元函数的微分法 220

 1.12 多元函数的微分法 220

 1.13 多元函数的微分法 220

 1.14 多元函数的微分法 220

 1.15 多元函数的微分法 220

 1.16 多元函数的微分法 220

 1.17 多元函数的微分法 220

 1.18 多元函数的微分法 220

 1.19 多元函数的微分法 220

 1.20 多元函数的微分法 220

 1.21 多元函数的微分法 220

 1.22 多元函数的微分法 220

 1.23 多元函数的微分法 220

 1.24 多元函数的微分法 220

 1.25 多元函数的微分法 220

 1.26 多元函数的微分法 220

 1.27 多元函数的微分法 220

 1.28 多元函数的微分法 220

 1.29 多元函数的微分法 220

 1.30 多元函数的微分法 220

 1.31 多元函数的微分法 220

 1.32 多元函数的微分法 220

 1.33 多元函数的微分法 220

 1.34 多元函数的微分法 220

 1.35 多元函数的微分法 220

 1.36 多元函数的微分法 220

 1.37 多元函数的微分法 220

 1.38 多元函数的微分法 220

 1.39 多元函数的微分法 220

 1.40 多元函数的微分法 220

 1.41 多元函数的微分法 220

 1.42 多元函数的微分法 220

 1.43 多元函数的微分法 220

 1.44 多元函数的微分法 220

 1.45 多元函数的微分法 220

 1.46 多元函数的微分法 220

 1.47 多元函数的微分法 220

 1.48 多元函数的微分法 220

 1.49 多元函数的微分法 220

 1.50 多元函数的微分法 220

 1.51 多元函数的微分法 220

 1.52 多元函数的微分法 220

 1.53 多元函数的微分法 220

 1.54 多元函数的微分法 220

 1.55 多元函数的微分法 220

 1.56 多元函数的微分法 220

 1.57 多元函数的微分法 220

 1.58 多元函数的微分法 220

 1.59 多元函数的微分法 220

 1.60 多元函数的微分法 220

 1.61 多元函数的微分法 220

 1.62 多元函数的微分法 220

 1.63 多元函数的微分法 220

 1.64 多元函数的微分法 220

 1.65 多元函数的微分法 220

 1.66 多元函数的微分法 220

 1.67 多元函数的微分法 220

 1.68 多元函数的微分法 220

 1.69 多元函数的微分法 220

 1.70 多元函数的微分法 220

 1.71 多元函数的微分法 220

 1.72 多元函数的微分法 220

 1.73 多元函数的微分法 220

 1.74 多元函数的微分法 220

 1.75 多元函数的微分法 220

 1.76 多元函数的微分法 220

 1.77 多元函数的微分法 220

 1.78 多元函数的微分法 220

 1.79 多元函数的微分法 220

 1.80 多元函数的微分法 220

 1.81 多元函数的微分法 220

 1.82 多元函数的微分法 220

 1.83 多元函数的微分法 220

 1.84 多元函数的微分法 220

 1.85 多元函数的微分法 220

 1.86 多元函数的微分法 220

 1.87 多元函数的微分法 220

 1.88 多元函数的微分法 220

 1.89 多元函数的微分法 220

 1.90 多元函数的微分法 220

 1.91 多元函数的微分法 220

 1.92 多元函数的微分法 220

 1.93 多元函数的微分法 220

 1.94 多元函数的微分法 220

 1.95 多元函数的微分法 220

 1.96 多元函数的微分法 220

 1.97 多元函数的微分法 220

 1.98 多元函数的微分法 220

 1.99 多元函数的微分法 220

 2.00 多元函数的微分法 220

第一章 初等函数基础

1.1 集合、区间、区域

1.1.1 集合

集合是初等数学的基本概念，它其实是一种分类方法，按照某个明确的（标准）条件，将考察对象“归地”到某一类别对象，这些对象属于这个集合。若一对象满足这个条件，它就属于这个集合。

第一部分 高等数学基础

属于集合的对象称为该集合的元素，通常用小写字母表示，而集合用大写字母表示。例如，对象是某一数学班的全体同学，集合则是该班全体同学组成的集合，记为集合 A 。

高等数学的直接基础包括初等函数以及相关知识和函数数列极限的相关理论，其中初等函数以及非初等函数是高等数学的基本研究对象，而极限与它的相关理论是高等数学的研究工具。

集合常用的表示有以下两种方法：

列举法（枚举法）：把集合中的元素不重复、不遗漏地一一列举，此方法适用于只有有限个元素组成的集合或者集合中只有无限个元素但元素之间存内在规律的集合。例如，有限元素集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ，无限元素集合 $B = \{2, 3, \dots, n, \dots\}$ 。

描述法（解析法）：给出集合的代表式，然后使用数学方式描述代表元具备的性质。例如， $A = \{x \mid x = \sqrt{x}, x \geq 0\}$ 。

关于集合的两大核心关系

(1) 元素和集合的“属于”关系：使用数学符号 \in 、 \notin 。元素 \in 集合，表示元素在集合内；元素 \notin 集合，表示元素不在集合内。

例如， $1 \in \{x \mid x = \sqrt{x}, x \geq 0\}$ ， $-1 \notin \{x \mid x = \sqrt{x}, x \geq 0\}$ 。

(2) 集合与集合的“包含”关系：使用数学符号 \subset 、 \supset 、 \subseteq 、 \supseteq 。务必认清每个符号的含义。

例如， $\{x \mid x = \sqrt{x}, x \geq 0\} \subseteq \{x \mid x = \sqrt{x}, x \geq 0\}$ 。

集合的包含关系构成集合的“隶属”关系。如果一个集合的元素都属于另一个集合，则称该集合为另一个集合的子集。数学符号为： $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ ，则 $A \subseteq B$ 。

若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，则 $A = B$ 。

特别说明：

若在一个集合下没有任何一个元素，则这个集合称为空集。

第一章 初等函数基础

1.1 集合、区间、区域

1.1.1 集合

集合是现代数学的基本概念，它其实是一种分类方法，按照某个明确的(标准)条件，将考察对象严格地划分为两类，一类对象符合这个条件要求，这些对象属于这个集合；另一类对象不满足这个条件，它们不属于这个集合。

属于集合的对象称为该集合的元素，一般用小写字母表示，而集合用大写字母表示。

例如：对象是高一数学班的全体同学，集合的标准是年龄不小于18岁，这些同学中年龄不小于18岁的都在这个集合中，而年龄小于18岁的则不在这个集合中。

集合的定义是描述性的，满足某条件的所有对象简单地放在一起，就构成了一个集合。对象称为集合中的元素。

集合常用的表示有以下两种方法：

列举法(枚举法)：将集合中的元素不重复、不论顺序地一一列出，此方法适用于只有有限个元素构成的集合或者集合中虽有无限个元素但元素之间有内在规律的集合。例如：有限元素集合 $\{a, b, c\}$ ；无限元素集合 $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ 。

描述法(解析法)：选取集合的代表元，然后使用数学方式描述代表元具备的性质。例如： $\{y \mid y = \sqrt{x-1}, x \geq 1\}$ 。

1. 关于集合的两大核心关系

(1) 元素和集合的“属于”关系：使用数学符号 \in ， \notin 。元素 \in 集合，表示元素在集合内；元素 \notin 集合，表示元素不在集合内。

例如， $1 \in \{y \mid y = \sqrt{x-1}, x \geq 1\}$ ， $-1 \notin \{y \mid y = \sqrt{x-1}, x \geq 1\}$ 。

(2) 集合与集合的“包含”关系：使用数学符号 \subset ， \supset ， \subseteq ， \supseteq ， $\not\subset$ 。务必认清每个符号的含义。

例如， $\{x \mid y = \sqrt{x-1}\} \subset \{y \mid y = \sqrt{x-1}, x \geq 1\}$ 。

集合的包含关系构成集合的子集定义，如果一个集合的元素都属于另一个集合，则称该集合为另一集合的子集。数学描述为： $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ ，则 $A \subseteq B$ 。

真子集： $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ ， $\exists x \in B \Rightarrow x \notin A$ ，则 $A \subset B$ 。

特别说明：

如果一个集合不含有任何一个元素，则这个集合称为空集。

空集是任何非空集合的真子集.

一个 n 元集合的真子集有 $(2^n - 1)$ 个.

2. 集合与集合的运算

首先应该明确集合与集合的运算结果依然是一个集合.

集合的基本运算为交、并、补三种运算.

(1) 交运算(俗称集合的乘法): 数学表达式为

$$C = AB = A \cap B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B \Rightarrow x \in C, \forall x \in C \Rightarrow x \in A, x \in B.$$

(2) 并运算(俗称集合的加法): 数学表达式为

$$C = A + B = A \cup B \Leftrightarrow \forall x \in A \text{ 或 } x \in B \Rightarrow x \in C, \forall x \in C \Rightarrow x \in A \text{ 或 } x \in B.$$

(3) 补运算: 数学表达式为

$$C_I^A = \bar{A} \Leftrightarrow \forall x \in \bar{A} \Rightarrow x \in I, x \notin A.$$

以上三种运算为集合运算的核心基础, 也就是集合的其他运算均可以使用上述三种运算来表达或者刻画.

(4) 差运算: 数学表达式为

$$C = A - B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \notin B \Rightarrow x \in C, \forall x \in C \Rightarrow x \in A \text{ 且 } x \notin B.$$

(5) 对称差: 数学表达式为

$$C = (A - B) \cup (B - A).$$

(6) 混合运算核心公式为狄默根律:

交的补等于补的并: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

并的补等于补的交: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

以上结论可以使用文氏图来轻松证明.

注意: 以上所论述的关于集合的两大关系, 三大核心运算是集合论的基本起点. 集合内部的元素之间没有什么特殊的联系, 它们只是简单地放在一起, 构成一个总体而已.

如果某集合的元素之间存在某种关系, 或者存在某些运算, 而运算的结果依然是这集合的元素, 这样的集合就构成了一些特殊的群体, 例如, 如果集合的元素之间可以进行加法运算、乘法运算, 并且运算的结果依然在这个集合内, 这样的集合就构成了一些新的数学概念, 形成新的数学分支. 例如, 有理数集合, 它的元素之间的加法, 运算结果依然是有理数, 在有理数这个集合内, 有理数这个集合就构成了一个特殊的群体.

需特别强调的是, 如果集合的任意两个元素之间的运算结果也是这个集合的元素, 那么我们就称这个集合对该运算具备封闭性, 具备封闭性的集合就可以构成某个空间.

可见空间并不是一个神秘的概念, 它也是一个集合, 且对某运算具备封闭性.

1.1.2 区间、区域

1. 常用邻域

(1) 数轴上的邻域.

点 x_0 的 δ 邻域: $U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x: |x - x_0| < \delta\}$, 表示在一维数轴上以 x_0 为中心, 以 δ 为半径的一个开区间.

点 x_0 的 δ 去心邻域: $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) = \{x: 0 < |x - x_0| < \delta\}$,

表示在一维数轴上以 x_0 为中心, 以 δ 为半径的一个区间, 去掉中心 x_0 .

(2) 平面上的邻域.

点 (x_0, y_0) 的 δ 邻域: $U((x_0, y_0), \delta) = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$, 表示在二维平面上以 (x_0, y_0) 为中心, 以 δ 为半径的一个开区域(圆面不含边界).

点 (x_0, y_0) 的 δ 去心邻域: $\dot{U}((x_0, y_0), \delta) = \{(x, y) : 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$, 表示在二维平面上以 (x_0, y_0) 为中心, 以 δ 为半径的一个开区域, 去掉中心 (x_0, y_0) (圆面不含边界, 去掉圆心).

当然, 平面邻域还可以是其他类型的邻域, 比如方形邻域: $\{(x, y) : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta\}$, 等.

读者应该熟练地画出相应的图形.

2. 几种拓扑点的概念

这些拓扑点的概念刻画了点与集合的拓扑距离关系: 拓扑距离为 0, 以及拓扑距离不等于 0. 注意它不同于元素与集合的“属于”关系.

(1) 内点.

如果某点的一个邻域内的所有点都在这个点集合内, 该点在这个集合的内部, 称此点为点集合的内点. 例如, 1 表示的点是点集合 $(0, 2)$ 的内点.

数学语言:

一维(数轴上): 对于点 x_0 与点集合 A , 若 $\exists U(x_0, \delta) \subset A$, 则 x_0 是点集合 A 的内点;

二维(平面上): 对于点 (x_0, y_0) 与点集合 A , 若 $\exists U((x_0, y_0), \delta) \subset A$, 则 (x_0, y_0) 是点集合 A 的内点;

可以肯定, 内点一定属于集合.

(2) 外点.

如果某点的一个邻域内的所有点都不在这个点集合内, 该点就在这个点集合的外部, 称此点为点集合的外点. 例如, 1 表示的点是点集合 $(2, 3)$ 的外点.

数学语言:

一维(数轴上): 对于点 x_0 与点集合 A , $\exists U(x_0, \delta) \subset \bar{A}$, 则 x_0 是点集合 A 的外点;

二维(平面上): 对于点 (x_0, y_0) 与点集合 A , $\exists U((x_0, y_0), \delta) \subset \bar{A}$, 则 (x_0, y_0) 是点集合 A 的外点.

可以肯定, 外点一定不属于集合.

(3) 边界点.

如果某点的任何一个邻域内有点在这个点集合内, 也有点在这个点集合外, 该点就在这个点集合的边界上, 称此点为点集合的边界点.

数学语言:

一维(数轴上): 对于点 x_0 与点集合 A , $\forall \delta > 0, \exists x_1 \in U(x_0, \delta), x_1 \in A$, 且 $\exists x_2 \in U(x_0, \delta), x_2 \in \bar{A}$, 则 x_0 是点集合 A 的边界点;

二维(平面上): 对于点 (x_0, y_0) 与点集合 A , $\forall \delta > 0, \exists (x_1, y_1) \in U(x_0, \delta)$,

$x_1 \in A$ 且 $\exists (x_2, y_2) \in U(x_0, \delta)$, $x_2 \in \bar{A}$, 则 (x_0, y_0) 是点集合 A 的边界点.

例如, 1 表示的点是点集合 $(1, 3)$ 与集合 $[1, 3]$ 的边界点.

注意: 边界点可以在这个集合内, 也可以在集合外.

例如, 由离散的点构成的集合中的每个点都是集合的边界点, 如点集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 它的每一个点都是它的边界点.

3. 按拓扑点结构对集合的分类

(1) 开集.

一个点集合内的任何一个点都是它的内点, 这个点集合称为开集.

数学表述: $\forall a \in A, \exists \delta > 0, U(a, \delta) \subset A$, 则 A 是开集.

我们通常所说的开区间就是最常见的开集, 上述的非去心邻域均为开集.

(2) 闭集.

一个点集合由它的全体内点与边界点组成, 这个点集合称为闭集.

我们通常所说的闭区间就是最常见的闭集.

(3) 连通性.

集合可能会由几个部分构成(或者由无限个部分组合而成), 连通性刻画的就是部分与部分之间的连接关系.

如果集合内的任何两个点, 存在一条连接它们的折线, 且这条折线上的点全部在集合内, 这样的集合称为连通集合(连通集).

连通的开集称为开域, 连通的闭集称为闭域.

“域”其实就是“集”加上“连通性”.

简单开域(单连通开域): 如果集合内任意两点之间的封闭折线围成的区域内包含的所有点均在这个集合内, 则这个集合为简单开域, 通俗而言, 就是集合内部无空洞(气泡).

1.2 二阶三阶行列式的计算

二阶和三阶行列式的计算口诀是: 二阶、三阶用刀切, 二阶切两刀, 主对角线是正一刀, 副对角线是负一刀, 每刀上的元素做乘积, 结果相加.

$$\text{二阶行列式: } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

$$\text{三阶行列式: } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

行列式(由行与列排列而成的代数式)是一种算法结构, 不是集合, 它的运算结果是一个代数式.

行列式的核心算法要义: 所有取自不同行、不同列的元素之积的代数和(参看线性代数书籍).

1.3 五大类基本初等函数

高等数学研究的对象主要是函数及其相关性质(微运算与无穷次运算),高等数学中“高等”的含义不是指所研究的对象很难,不要理解为初等数学研究的函数是很简单的,而高等数学研究的函数是复杂的和困难的,而是指加、减、乘、除四则运算上的进化。

初等数学:初等数学的运算核心是对象的加、减、乘、除以及函数之间的复合,且这四则和复合运算只进行有限次与看得见的运算,这就是初等运算的核心含义。

高等数学:高等数学与初等数学本质上有类似的地方,它也是函数对象的四则和复合运算,但与初等数学不同的地方是高等数学的运算是无限次与看不见的微运算.进行无限次与看不见的微运算,需要新的工具,基础工具就是极限,这样以极限为基础的函数的四则运算就构成了所谓的高等数学。

但高等数学中函数的四则和复合运算在形式上仍然发生了一些变化,例如,无限次的加法有了新的形式:级数(离散)和积分(连续);无限小的减法新的形式是微分;无限小的除法新的形式为求导,等等。

在这里,应该树立一个基本的概念,不论如何高深的数学,其本质依然是对研究对象进行四则和复合运算,只不过运算形式和运算对象与规则发生了一些变化。

回顾一下五大类基本函数是很有必要且必须的,这个是高等数学基础之中的基础。

1.3.1 学习初等函数的基本口诀

初等函数学习的口诀是:定义域是陷阱;参数是关键;图像是方法。

口诀明确告诉我们,只要看到函数,不管是涉及它的任何问题,定义域是读者应该首先明确的。

例1 已知 $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$, 求 y 。

解:由函数的定义域知 $y = 0$ 。

参数直接影响函数的性质,是决定函数性质的关键,也是讨论函数的核心,直接影响着两个(多个)变量之间的对应法则。

图像是函数在坐标下的直观体现,是我们对函数进行研究与认识的最有效的手段。

以上对应的问题,希望读者在回顾过去的基础上加以总结与体会。

1.3.2 五大类基本函数

在这里我们形象地将它们称为“五指山”。

1. 第一类(拇指):幂函数

其表达式为 $y = x^a$, 其中 a 为常数参数,幂函数的性质,被这个参数 a 决定,对幂函数的讨论,也是对这个参数 a 的讨论. 讨论如下:

(1) $a > 0$ 的典型代表: $a = 1, a = 2, a = 3$. $y = x^2$ 是偶函数(2是偶数)的代表; $y = x^1, y = x^3$ 是奇函数(1, 3是奇数)的代表,特别地,当 $a = 1$ 时是线性函数的代表;

(2) $a < 0$ 的典型代表: $a = -1, a = -2$. $y = x^{-2}$ 是偶函数(-2是偶数)的代表; $y = x^{-1}$ 是奇函数(-1是奇数)的代表;