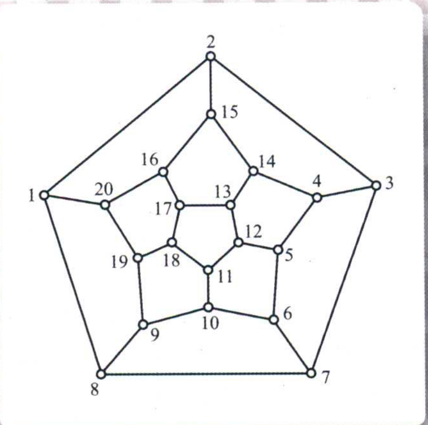
普通高等院校计算机类专业规划教材

离散数学

LISAN SHUXUE

任长安 罗丹霞 主编



中国铁道出版社有限公司
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE CO., LTD.

普通高等院校计算机类专业规划教材

离散数学

任长安　罗丹霞　主　编
陈　敏　陈　政　罗庆云　副主编

中国铁道出版社有限公司
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE CO., LTD.

内 容 简 介

本书介绍了离散数学基础知识和应用方法，全书共分为4篇，第1篇为数理逻辑，内容包括命题逻辑和一阶逻辑；第2篇为集合论，内容包括集合、二元关系和函数；第3篇为代数系统，内容包括代数结构和格与布尔代数；第4篇为图论，内容包括图的基本概念及表示、几类重要的图和树。

本书在内容安排上，突出由浅入深、循序渐进、通俗易懂的特点，各章配备了大量的例题，其内容与计算机科学的理论与实践密切结合，便于自学。本书适合作为普通高等院校计算机类专业本科生的教材，也可供计算机专业的科技人员使用或参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/任长安，罗丹霞主编．—北京：中国铁道出版社有限公司，2019．8

普通高等院校计算机类专业规划教材

ISBN 978－7－113－25800－9

Ⅰ．①离…　Ⅱ．①任…　②罗　Ⅲ．①离散数学-高等学校-教材　Ⅳ．①O158

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第131481号

书　　名：离散数学
作　　者：任长安　罗丹霞

策　　划：韩从付　　　　**编辑部电话：**010-63589185 转 2006
责任编辑：贾　星　陆慧萍　徐盼欣
封面设计：付　巍
封面制作：刘　颖
责任校对：张玉华
责任印制：郭向伟

出版发行：中国铁道出版社有限公司（100054，北京市西城区右安门西街8号）
网　　址：http://www.tdpress.com/51eds/
印　　刷：北京铭成印刷有限公司
版　　次：2019年8月第1版　2019年8月第1次印刷
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16　**印张：**13　**字数：**282千
书　　号：ISBN 978－7－113－25800－9
定　　价：38.00元

前言
PREFACE

离散数学是现代数学的一个重要分支,是计算机科学中基础理论的核心课程。离散数学研究的对象是各种离散量的结构及其关系,并且一般是有限个或者可数个元素,因此它充分描述了计算机科学离散性的特点。计算机科学中的程序设计语言、数字电路、数据结构、操作系统、数据库技术、编译原理、算法的分析与设计、计算机网络、可计算性与计算复杂性理论、逻辑设计、系统结构、人工智能等理论课程都是以离散数学为基础的。同时,通过学习离散数学,能够培养和提高学生的抽象思维能力、逻辑推理能力和归纳构造能力,也有益于培养学生严谨、完整、规范的科学态度,为学生今后继续学习和工作,参加科学研究,攀登科技高峰,打下坚实的数学基础。

离散数学包括4部分,各部分内容都十分丰富,自成体系。本书将这4大体系中最基本、最重要的内容选入,并努力做到简明扼要、深入浅出,既保持各体系的独立性,又展现出它们的密切联系。本教材的主要特色是:

(1)通过大量的实例从不同的角度对一些抽象的概念进行诠释,使其易于被学生接受和理解;

(2)强化基本概念的描述,注重基本理论的证明方法,淡化大量烦琐的、含有特殊技巧的、不带普遍意义的理论证明方法;

(3)精心安排各部分内容的先后顺序,使教材的结构更合理、内容更充实、语言更通俗易懂;

(4)内容涉猎面广,可满足不同层面学生的需求。

总之,本书在内容的组织上,力求培养学生抽象思维、缜密概括和严密的逻辑推理能力,同时注重展现离散数学在计算机科学及信息科学中的应用,以增强学生使用离散数学知识分析问题和解决问题的能力,为今后处理离散信息、从事计算机软件的开发与设计以及计算机科学和信息科学中的其他实际应用打好数学基础。

本书的主要内容包括命题逻辑、一阶逻辑、集合、二元关系、函数、代数结构、格与布

尔代数、图的基本概念及表示、几类重要的图、树，适合作为普通高等院校计算机类专业本科生的教材，也可供计算机专业的科技人员使用或参考。

本书由任长安、罗丹霞任主编，由陈敏、陈政、罗庆云任副主编。具体编写分工如下：任长安负责第1篇数理逻辑和第4篇图论的编写及全书统稿工作；罗丹霞负责第2篇集合论和第3篇代数系统的编写工作；陈敏和陈政对第1章、第8章和第9章做了部分修改和扩充，罗庆云对第4章和第6章做了部分修改和扩充。在本书编写过程中，编者参阅了许多国内外离散数学教材及专著，在此对这些作者表示衷心的感谢。本书的出版得到了中国铁道出版社有限公司领导和编辑的大力支持，在此表示深深的谢意。

由于编者的水平和经验有限，难免会有不足与疏漏之处，恳请同行专家与广大读者批评指正。

编　者

2019年5月

目录

CONTENTS

第1篇 数理逻辑

第2篇 集合论

第3篇 代数系统

第1篇

数理逻辑

逻辑学(logic)是研究人类推理过程的科学，而数理逻辑(mathematical logic)则是用数学的方法来进行这一研究的数学学科，其显著特征是符号化和形式化，即把逻辑所涉及的“概念、判断、推理”用符号来表示，用公理体系来刻画，并基于符号串形式的演算来描述推理过程的一般规律。因此数理逻辑又称符号逻辑、现代逻辑。

莱布尼茨(Leibniz)在17世纪提出了逻辑数学化的思想。1930年，哥德尔(Gödel)完全性定理的证明完善了数理逻辑基础，建立了逻辑演算，并在此基础上发展出公理集合论、证明论、模型论和递归论四个分支，成为现代科学特别是计算机科学不可缺少的基础理论之一。本篇讲述数理逻辑中最基本的命题逻辑和一阶逻辑。首先讨论命题，对推理规律进行学习，也就是以命题演算入手；在此基础上引入概念的形式表示——谓词，讨论概念、关系的理论——谓词演算，把推理的研究引向更加深刻的层次。

第1章 命题逻辑

教学内容

(1)命题的概念、命题联结词的概念。

(2)命题公式的解释。

(3)范式(合取范式、析取范式、主合取范式、主析取范式)的概念与求法。

(4)命题公式的等值式与蕴涵式。

(5)命题逻辑的推理理论。

教学要求

了解:命题逻辑的基本概念、基本理论与方法。

理解:命题公式的概念,命题联结词的概念;范式的概念;命题逻辑的等值式与蕴涵式的概念。

掌握:命题符号化、求命题公式的真值表;合取范式、析取范式、主合取范式及主析取范式的求解;等值式与蕴涵式的基本证明方法;命题逻辑的推理理论。

数理逻辑研究的中心是推理,而推理的基本要素是命题,所以也称命题逻辑。要研究命题逻辑的符号化体系,需要从命题开始。

1.1 命题逻辑的基本概念

1.1.1 命题

逻辑学中把"对确定的对象做出判断的陈述句"称为**命题**(propositions)。直观地讲,能判断真假的陈述句称为命题。当判断正确或符合客观实际时,称该命题真(true),否则称该命题假(false)。"真""假"常被称为命题的真值,分别记为T(或者"1")和F(或者"0")。

显然,判断一个语句是否为命题,有两个要点:

(1)命题是一个陈述句,不能是疑问句、祈使句、感叹句,更不能是一个不完整的句子。

(2)这个陈述句所表达的内容可决定是真还是假,而且不是真的就是假的,不能不真又不假,也不能又真又假。

例1.1 判断下列语句是否为命题。

(1)雪是白的。

(2)3 是偶数。

(3)陈胜吴广起义那天杭州下雨。

(4)大于 2 的偶数均可分解为两个素数的和(哥德巴赫猜想)。

(5)真舒服啊!

(6)别的星球上有生物存在。

(7)您去学校吗?

(8)$x+y<0$。

(9)我正在说谎。

(10)$1+101=110$。

解 (1)是命题,其真值为真。

(2)是命题,其真值为假。因为 3 并不是偶数。

(3)是命题,其真值未必在现在或将来可以得知,但它所作判断是否符合客观实际这一点是确定的。

(4)是命题,其真值未必在现在或将来可以得知,但它所作判断是否符合客观实际这一点是确定的。

(5)不是陈述句,因此它不是命题。

(6)是命题,其真值未必在现在或将来可以得知,但它所作判断是否符合客观实际这一点是确定的。

(7)不是陈述句,因此它不是命题。

(8)是一个不能确定其真假的句子,它可能为真,也可能为假,从而不是命题。只有当 x、y 取得确定的值时,(8)才成为命题,才有相应的真值。

(9)不是命题,因为它是一个悖论,当判定(9)真时,(9)对本身的判断成立,即(9)假;当判定(9)假时,(9)对本身的判断不成立,即(9)真。

(10)是一个数学表达式,相当于一个陈述句,可以叙述为“1 加 101 等于 110”,这个句子所表达的内容在十进制范围中真值为假,而在二进制范围中真值为真。可见这个命题的真值还与所讨论问题的范围有关。

由以上分析知道,判断一个陈述句是否为命题,关键在于判断其是否具有唯一真值,而与我们是否知道其真假无关。

上述的所有命题都是简单陈述句,不能再被分解为更简单的语句,这种由简单陈述句构成的命题称为简单命题,也称原子命题或本原命题。简单命题是构成命题逻辑的最基本的部分。

1.1.2 联结词

为了描述与推理的方便,常用符号来表示命题,称为命题的符号化。对于简单命题,一般用小写字母(或者大写字母)$p,q,r,s,t,\cdots$表示,并将符号放在其表示的命题前面。例如:

p:北京是中国的首都。

q:地球是圆的。

一个特定含义的命题符号表示称为**命题常量**(proposition constant)或**命题常元**。例如,用 p 表示命题"北京是中国的首都",p 就是一个命题常元。一个没有赋予具体内容的命题符号表示称为**命题变量**(proposition variable)或**命题变元**。

在自然语言中,用联结词可以将若干简单陈述句组合成复合陈述句。如"张三和李四都考了 90 分",实际上是由联结词"和"将两个简单命题"张三考了 90 分"和"李四考了 90 分"复合而成的。像这样的联结词称为**逻辑联结词**(logical connectives),而把由简单命题和联结词共同组成的命题称为**复合命题**(compositive propositions)。

逻辑联结词可将命题联结起来构成复杂的命题,命题逻辑联结词的引入是十分重要的,其作用相当于初等数学里的实数集上定义的 +、-、×、÷ 等运算符。通过联结词便可定义新的命题,从而使命题逻辑的内容变得丰富起来。我们要讨论的仅是复合命题的真值,可由组成它的相应命题的真值所确定。值得注意的是逻辑联结词与日常自然用语中的有关联结词的共同点和不同点。

下面对几种常用的逻辑联结词及与之密切相关的复合命题做出明确定义并将其符号化。

定义 1.1　命题 p 的非或否定,称为 p 的**否定式**(negation),用符号$\neg$表示。

设 p 表示一命题,那么$\neg p$ 表示命题 p 的否定。p 真时$\neg p$ 假,而 p 假时$\neg p$ 真。$\neg p$ 读作"并非 p"或"非 p"。用类似表 1.1 的真值表来规定联结值的意义,描述复合命题的真值状况。表 1.1 规定了否定词$\neg$的意义,表示$\neg p$ 的真值状况。

表 1.1　否定联结词"$\neg$"的定义

p	$\neg p$
T	F
F	T

例 1.2　符号化表示如下命题,并给出其真值。

(1)雪不是白的。

(2)火星上没有生命。

(3)3 不是偶数。

解　(1)p:雪是白的,p 的真值为 T,那么雪不是白的,可以符号化为$\neg p$,其真值为 F。

(2)q:火星上有生命,那么火星上没有生命,可以符号化为$\neg q$,q 的真值目前还难以给出,所以$\neg q$ 的真值现在也难以给出。

(3)r:3 是偶数,r 的真值为 F,那么 3 不是偶数,可以符号化为$\neg r$,其真值为 T。

当用否定词"并非"代替自然语言中的"不"时(或者反过来),应注意保持原语句的意义。例如:p 表示"我们都是好学生"时,$\neg p$ 表示"并非我们都是好学生"或"我们不都是好学生",而不是"我们都不是好学生"。

定义 1.2 p 且 p 称为 p 和 q 的**合取式**(conjunction),用符号 $\wedge$ 表示。

设 p、q 表示两命题,那么 $p \wedge q$ 表示合取 p 和 q 所得的命题,即 p 和 q 同时为真时 $p \wedge q$ 为真,否则 $p \wedge q$ 为假。$p \wedge q$ 读作"p 并且 q"或"p 且 q"。

合取词 $\wedge$ 的意义和命题 $p \wedge q$ 的真值状况可由表 1.2 来刻画。

例如,p:张三努力学习;q:李四工作积极;$p \wedge q$:张三努力学习并且李四工作积极。

如果 p 表示命题"张三努力学习",q 表示命题"李四工作积极",那么 $p \wedge q$ 表示命题"张三努力学习并且李四工作积极"。$p \wedge q$ 为真,当且仅当张三努力学习和李四工作积极同时成立。

定义 1.3 p 或者 q 称为 p 和 q 的**析取式**(disjunction),用符号 $\vee$ 表示。

设 p、q 表示两命题,那么 $p \vee q$ 表示 p 和 q 的析取,即当 p 和 q 有一为真时,$p \vee q$ 为真,只有当 p 和 q 均假时 $p \vee q$ 为假。$p \vee q$ 读作"p 或者 q""p 或 q"。

析取词 $\vee$ 的意义及复合命题 $p \vee q$ 的真值状况由表 1.3 描述。

表 1.2 合取联结词"$\wedge$"的定义

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

表 1.3 析取联结词"$\vee$"的定义

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

例如,p:今天下雨;q:明天下雨;$p \vee q$:今天或明天下雨。

如果 p、q 分别表示"今天下雨"和"明天下雨",那么 $p \vee q$ 表示"今天或明天下雨"。当今天下雨,或者明天下雨,或者今天明天都下雨,$p \vee q$ 为真,只是在今天不下雨明天也不下雨时 $p \vee q$为假。

值得注意的是,这里的"或"是可兼的,是对于两个日常生活中相互无关的命题的"或",是"**相容或**"(inclusive or)。而对于"选张三和李四中的一人当班长"这样的命题,二者不能同时发生,即不可能二者同时为真,是"**相斥或**"(exclusive or),其中的"或"是不可兼的,即张三和李四中都当选为班长时,上述论断被认为假。这里的"或"用 $\vee$ 表示不合适,故引入下面的定义。

定义 1.4 p 或者 q 中只可能有一个为真称为 p 和 q 的**异或式**(exclusive or),用符号 $p \forall q$ 表示。

异或式$\forall$的意义及复合命题 $p \forall q$ 的真值状况由表 1.4 描述。

例如,p:明天我坐 T5 去北京;q:我坐 K186 去北京;$p \forall q$:明天我坐 T5 或 K186 去北京。

定义 1.5 如果 p 则 q 为 p 和 q 的**条件式或蕴涵式**(conditional statement, implication),用符号$\rightarrow$ 表示。

设 p、q 表示两命题,那么 $p \rightarrow q$ 表示命题"如果 p,那么 q"。当 p 真而 q 假时,命题 $p \rightarrow q$ 为假,否则均认为 $p \rightarrow q$ 为真。$p \rightarrow q$ 中的 p 称为蕴涵前件,q 称为蕴涵后件。$p \rightarrow q$ 的读法较多,可读作"如果 p 则 q""p 蕴涵 q""p 是 q 的充分条件""q 是 p 的必要条件""q 当 p""p

仅当q”等。数学中还常把$q \to p$、$\neg p \to \neg q$，$\neg q \to \neg p$分别叫做$p \to q$的逆命题、否命题、逆否命题。

蕴涵式→的意义及复合命题$p \to q$的真值状况由表1.5给出。

表1.4 异或联结词“$\forall$”的定义

p	q	$p \forall q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

表1.5 表蕴涵联结词“→”的定义

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

例1.3 一位父亲对儿子说：“如果星期天天气好，就一定带你去动物园。”问：在什么情况下父亲食言？

解 父亲的可能情况有如下四种：

(1)星期天天气好，带儿子去了动物园；

(2)星期天天气好，却没带儿子去动物园；

(3)星期天天气不好，却带儿子去了动物园；

(4)星期天天气不好，也没带儿子去动物园。

显然，(1)，(4)两种情况父亲都没有食言；(3)这种情况和父亲原来的话没有相抵触的地方，当然也不算食言；只有(2)这种情况，答应的事却没有做，应该算是食言了。(2)对应着“前件真后件假”的情况，使得蕴涵式为假，而其他三种情况都使得蕴涵式为真。

上述规定的蕴涵词称为**实质蕴涵**(substantive implication)，因为它不要求$p \to q$中的p、q有什么关系，只要p、q为命题，$p \to q$就有意义。例如，“如果$2+2=5$，那么雪是黑的”，就是一个有意义的命题，且据定义其真值为“真”。蕴涵词的这种规定形式，在讨论数学问题和逻辑问题时是正确的、充分的，但在某些情况下显得有些不足，为此不少人对其他规定形式的蕴涵词有兴趣，对此本书不予介绍。

蕴涵式$p \to q$可以用多种方式陈述：

(1)p是q的充分条件；

(2)q是p的必要条件；

(3)若p，则q；

(4)除非q，才p；

(5)只要p，就q；

(6)只有q，才p；

(7)q每当p；

(8)p仅当q；

(9)除非q，否则非p。

定义 1.6　p 当且仅当 q 称为 p、q 的**等价式**或**双条件式**(equivalence,biconditional),用符号$\leftrightarrow$表示。

设 p、q 为两命题,那么$p\leftrightarrow q$表示命题"p 当且仅当 q""p 与 q 等价",即当 p 与 q 同真值时 $p\leftrightarrow q$为真,否则为假。

双条件式的意义及$p\leftrightarrow q$的真值状况由表 1.6 给出。

表 1.6　等价联结词"$\leftrightarrow$"的定义

p	q	$p\leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

以上介绍了六种常用的逻辑联结词以及与之相关的复合命题。这些联结词反映了复合命题及其支命题之间抽象的逻辑关系。复合命题的符号化一般可以根据上述定义进行,基本步骤如下:

(1)找出各个支命题,并逐个符号化;

(2)找出各个连接词,符号成相应联结词;

(3)用联结词将各支命题逐个联结起来。

例 1.4　将下列命题符号化:

(1)李明是计算机系的学生,他住在 312 室或 313 室;

(2)辱骂和恐吓决不是战斗;

(3)李瑞和李珊是姐妹。

(4)除非天气好,否则我是不会去公园的。

解　(1)p:李明是计算机系的学生;

q:李明住在 312 室;

r:李明住在 313 室。

因为李明不可能既住在 312 室又住在 313 室,所以这里应该用$\forall$,而不用$\vee$,符号化为 $p\wedge(q\forall r)$。

(2)p:辱骂是战斗;

q:恐吓是战斗。

符号化为$\neg p\wedge\neg q$。

(3)p:李瑞和李珊是姐妹。

符号化为 p。

(4)p:今天天气好;

q:我去公园。

符号化为 $q\rightarrow p$。