



“十三五”江苏省高等学校重点教材

# 线性代数

主 编 赵志新 徐明华

副主编 刘玉清 吴春青

(第二版)

高等教育出版社

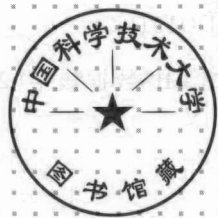


“十三五”江苏省高等学校重点教材

# 线性代数

主 编 赵志新 徐明华

副主编 刘玉清 吴春青



(第二版)

高等教育出版社·北京

## 内容提要

本书为江苏省“十三五”高等学校重点教材(编号:2016-1-139),参照最新制订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成,每章均通过具体实例提出要解决的问题、引入相关概念,同时提出解决问题的思路和方法,并尝试通过数学实验进行用计算机解决线性代数问题的训练。本次修订完善了部分内容的叙述,增加了一些例题,并增加了线性代数应用案例及试卷等网上资源。

全书共分六章,内容包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性、矩阵的对角化、二次型以及 MATLAB 在线性代数中的应用。每章后附知识点提要,并配备大量习题和模拟自测题,书后附部分习题解答。

本书可作为高等学校非数学类专业的教材使用,也可供自学者和科技工作者参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 赵志新,徐明华主编. --2 版. --北京:高等教育出版社,2019.7

ISBN 978-7-04-052051-4

I. ①线… II. ①赵… ②徐… III. ①线性代数-高等学校-教材 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 100200 号

策划编辑 张彦云  
插图绘制 李沛蓉

责任编辑 张彦云  
责任校对 刁丽丽

封面设计 于文燕  
责任印制 刁毅

版式设计 张杰

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街 4 号  
邮政编码 100120  
印 刷 中农印务有限公司  
开 本 787mm×960mm 1/16  
印 张 14  
字 数 260 千字  
购书热线 010-58581118  
咨询电话 400-810-0598

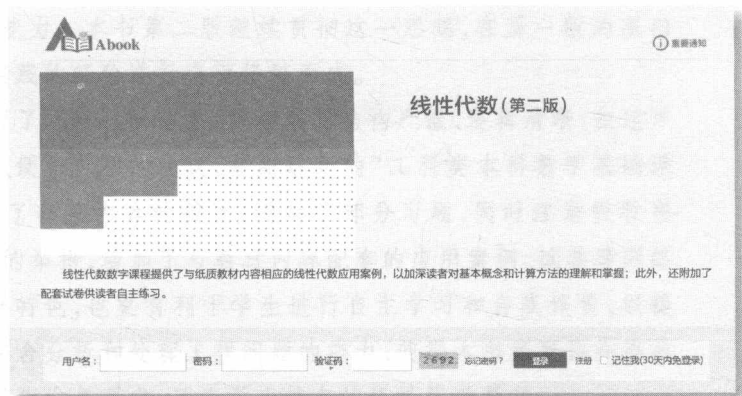
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>  
<http://www.hepmall.com>  
<http://www.hepmall.cn>  
版 次 2011 年 12 月第 1 版  
2019 年 7 月第 2 版  
印 次 2019 年 7 月第 1 次印刷  
定 价 26.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究  
物料号 52051-00

# 线性代数 (第二版)

赵志新 徐明华

- 1 计算机访问<http://abook.hep.com.cn/1242632>, 或手机扫描二维码、下载并安装 Abook 应用。
- 2 注册并登录, 进入“我的课程”。
- 3 输入封底数字课程账号(20位密码, 刮开涂层可见), 或通过 Abook 应用扫描封底数字课程账号二维码, 完成课程绑定。
- 4 单击“进入课程”按钮, 开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制, 部分内容无法在手机端显示, 请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题, 请发邮件至[abook@hep.com.cn](mailto:abook@hep.com.cn)。



<http://abook.hep.com.cn/1242632>

## 第二版前言

当前,我国高等教育理念已经发生深刻的变化,为了适应社会的需求,培养多层次的具有较强应用能力的人才成为许多高校的共识,而线性代数又是具有鲜明应用背景的学科,可以培养学生将自然科学、工程基础和专业知识运用到复杂计算机工程问题上的能力。本书第二版继续贯彻这一思想,在第一版的基础上,根据多年教学改革实践的经验进行全面修订而成。

在修订中,我们保留了原教材的体系、风格及其结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题较多、便于自学的优点,参照最新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,完善了部分内容的叙述,增加了部分习题,同时注意吸收当前教材改革中一些成功的举措,增加了与教材内容配套的应用案例、试卷等网络资源,不仅更加凸显本书特色,也更有利于学生进行自主学习和自我评价,以提高他们进行数学计算、综合分析和处理工程问题的能力,使得本书能更适当前教学的需要,成为适应时代发展要求、适应学生特点的线性代数教材。

本次修订工作主要由赵志新、徐明华承担,在修订过程中,我校相关教师提出了许多宝贵的意见和建议,在此表示诚挚的谢意。

新版中存在的问题,恳请专家及使用本书的师生给予批评指正。

编者

2018年8月于江苏常州

# 第一版前言

线性代数是大学数学课程中的一门重要基础课。它是大学理工类、经济管理类等学科各专业学生的必修课,也是全国硕士研究生入学统一考试的必考内容,更是现代化建设中的重要工具。

本书是编者根据在江苏工业学院及常州大学进行多年教学实践和改革探索的经验编写而成的,其基本内容符合最新制订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,并适当尝试了一些改革,如介绍了数学软件 MATLAB 在线性代数运算中的基本功能,进行了数学实验的初步训练。编者认为,让学生应用数学知识并利用计算机来解决实际问题是当前数学教学中值得重视的环节。

本书在编写过程中力求叙述清晰、说理详尽、通俗易懂、深入浅出,对重点内容列举了大量有代表性的例题,并结合实例总结出部分定理的条件与结论,目的是使学生易于理解和掌握这些难点。全书在致力于强调内容的科学性与系统性的同时,注重每章都通过一些具体实例提出要解决的问题,并引入相关概念便于学生理解接受,同时提出解决问题的思路及方法。

全书共分六章,第一章到第五章是线性代数的基本内容。第一章主要介绍了行列式的基本概念及其计算,并包含了行列式的一个应用——克拉默法则。第二章介绍了矩阵的代数运算、可逆矩阵、矩阵的初等变换、矩阵的秩、分块矩阵的概念以及有关性质。作为应用,在第二章的最后讨论了用消元法解线性方程组与线性方程组有解的条件。第三章讨论了  $n$  维向量的线性关系和向量组的秩的概念,并在此基础上讨论了线性方程组解的结构。第四章在介绍了矩阵的特征值和特征向量以及矩阵相似的概念后讨论了方阵的对角化问题。第五章介绍了实二次型的概念和化二次型为标准形的方法,并讨论了正定二次型的相关性质。此外,本书在第六章还介绍了数学软件 MATLAB 的基本使用~~方法~~及其用于解决最基本的线性代数问题的有关指令,并给出了若干应用实例,~~可用于~~计算机辅助教学。书后附有部分习题解答。

参加本书编写的人员有:赵志新、徐明华、刘玉清、石澄贤、吴春青、张洪波、

## II 第一版前言

周桦、李博、康慧燕、童凯郁、王峰等。本书可作为高等学校理工科(非数学类专业)与经济管理类学科的线性代数教材(32~40学时),也可供相关专业的成人教育学生 and 工程技术人员参考。在教学中,各专业可根据具体要求对本书内容予以取舍。本书在编写过程中,得到了常州大学各级领导及同事们的大力支持,特别得到了学校教材委员会的大力支持,特在此深表谢意。

由于编者水平有限,不妥甚至谬误之处在所难免,恳请读者批评指正。

编者

2011年4月于江苏常州

# 目 录

第一章 行列式	1
第一节 二阶与三阶行列式	1
第二节 $n$ 阶行列式的定义	4
第三节 行列式的性质	8
第四节 行列式按行(列)展开	11
第五节 克拉默(Cramer)法则	19
第一章知识点提要	23
习题一	24
第一章模拟自测题	27
第二章 矩阵	29
第一节 矩阵的概念	29
第二节 矩阵的运算	33
第三节 矩阵的逆	45
第四节 矩阵的分块	52
第五节 矩阵的初等变换与矩阵的秩	59
第六节 线性方程组的解	70
第二章知识点提要	78
习题二	82
第二章模拟自测题	88
第三章 向量组的线性相关性	90
第一节 $n$ 维向量及其线性运算	90
第二节 向量组的线性相关性	93
第三节 向量组的秩	98
第四节 向量空间	106
第五节 齐次线性方程组	109
第六节 非齐次线性方程组	116

第三章知识点提要 .....	119
习题三 .....	122
第三章模拟自测题 .....	127
第四章 矩阵的对角化 .....	129
第一节 矩阵的特征值与特征向量 .....	129
第二节 相似矩阵和矩阵的对角化 .....	135
第三节 向量的内积和施密特正交化方法 .....	140
第四节 实对称矩阵的相似对角矩阵 .....	145
第四章知识点提要 .....	151
习题四 .....	154
第四章模拟自测题 .....	156
第五章 二次型 .....	158
第一节 二次型及其矩阵表示 .....	158
第二节 化实二次型为标准形 .....	161
第三节 惯性定理与正定二次型 .....	172
第五章知识点提要 .....	176
习题五 .....	179
第五章模拟自测题 .....	180
第六章 MATLAB 在线性代数中的应用 .....	181
第一节 MATLAB 基础 .....	181
第二节 MATLAB 在线性代数中的应用 .....	185
第六章知识点提要 .....	193
习题六 .....	194
第六章模拟自测题 .....	195
部分习题解答 .....	196
参考文献 .....	213

# 第一章 行列式

在初等数学中,我们用代入消元法或加减消元法求解二元和三元线性方程组,可以看出,线性方程组的解完全由未知数的系数与常数项确定.为了更清楚地表达线性方程组的解和未知数的系数与常数项的关系,本章先引入二阶和三阶行列式的概念,并在二阶和三阶行列式的基础上,给出  $n$  阶行列式的定义并讨论其性质,进而把  $n$  阶行列式应用于求解  $n$  元线性方程组.事实上,行列式是一种常用的数学工具,在数学及其他学科中都有着广泛的应用.

## 第一节 二阶与三阶行列式

### 一、二元线性方程组与二阶行列式

二阶和三阶行列式是从研究二元与三元线性方程组的解引出的,故先讨论解线性方程组的问题.

设有两个未知数  $x_1, x_2$  的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

用消元法求解.

为消去未知数  $x_2$ ,以  $a_{22}$  与  $a_{12}$  分别乘上列两方程的两端,然后两个方程相减,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

同样消去  $x_1$ ,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - a_{21}b_1,$$

当  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  时,则

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (1.2)$$

引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad (1.3)$$

称其为二阶行列式,它的值定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

数  $a_{ij}$  ( $i=1,2; j=1,2$ ) 称为行列式(1.3)的元素,元素  $a_{ij}$  的第一个下标  $i$  称为行标,表明该元素位于第  $i$  行,第二个下标  $j$  称为列标,表明该元素位于第  $j$  列.

二阶行列式的值的计算,可用对角线法则来记忆.把  $a_{11}$  到  $a_{22}$  的实连线称为主对角线,  $a_{12}$  到  $a_{21}$  的虚连线称为副对角线(见图 1-1),于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上的两元素之积所得的差.

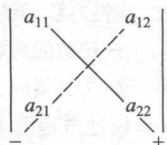


图 1-1

利用二阶行列式,(1.2)式可写为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

## 二、三阶行列式

定义 1.1 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}, \end{array} \quad (1.4)$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (1.5)$$

(1.5)式称为数表(1.4)所确定的三阶行列式.

上述定义表明三阶行列式含有6项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其规律遵循如图1-2表示的对角线法则:

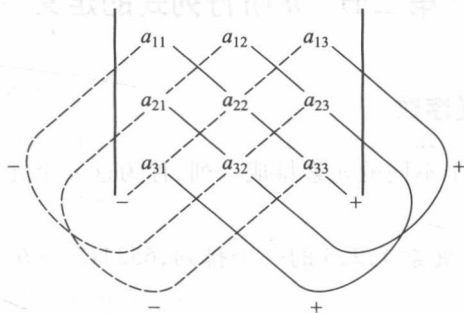


图 1-2

即实线上元素之积在其前加正号,虚线上元素之积在其前加负号.

### 例 1.1 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则,有

$$\begin{aligned} D &= (-2) \times 0 \times 1 + 2 \times 5 \times 3 + 1 \times 1 \times 2 - \\ &\quad 1 \times 0 \times 3 - 2 \times 1 \times 1 - (-2) \times 5 \times 2 \\ &= 0 + 30 + 2 - 0 - 2 + 20 = 50. \end{aligned}$$

### 例 1.2 求解方程

$$\begin{vmatrix} 1-x & -2 & 4 \\ 2 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

解 方程左端的三阶行列式

$$\begin{aligned} D &= (1-x)^2(3-x) - 2 + 8 - 4(3-x) + 4(1-x) - (1-x) \\ &= -x^3 + 5x^2 - 6x, \end{aligned}$$

由  $-x^3 + 5x^2 - 6x = 0$ , 解得

$$x = 0 \text{ 或 } x = 2 \text{ 或 } x = 3.$$

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式,为研究四阶及更高阶行列式,下面引入  $n$  阶行列式的概念.

## 第二节 $n$ 阶行列式的定义

### 一、排列及其逆序数

**定义 1.2** 把  $n$  个不同的元素排成一列,称为这  $n$  个元素的全排列(也简称排列).

例如,312 是 3 个元素 1,2,3 的一个排列,652413 是 6 个元素 1,2,3,4,5,6 的一个排列.

$n$  个不同元素的所有排列的总数,通常用  $P_n$  表示.不难知道

$$P_n = n!.$$

对于  $n$  个不同的元素,先规定各元素之间有一标准次序(例如对于  $n$  个不同的自然数,规定由小到大为标准次序).

**定义 1.3** 在一个排列中,当某两个元素的先后次序与标准次序不同时,那么它们就称为一个逆序;一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数,用字母  $t$  表示.

逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

**例 1.3** 求排列 623541 的逆序数.

**解** 在排列 623541 中,6 排在首位,逆序数为 0;2 的前面比 2 大的数有一个 6,故逆序数为 1;3 的前面比 3 大的数有一个 6,故逆序数为 1;5 的前面比 5 大的数有一个 6,故逆序数为 1;4 的前面比 4 大的数有两个:6 和 5,故逆序数为 2;1 的前面比 1 大的数有五个:6,2,3,5,4,故逆序数为 5.于是这个排列的逆序数为

$$t = 0 + 1 + 1 + 1 + 2 + 5 = 10.$$

**定义 1.4** 将一个排列中某两个元素的位置互相对调,而其余的元素不动,就得到另一个排列,这种对排列的变换方法称为对换.将相邻两个元素对换,称为相邻对换.

例如,排列 2413 经过 2 与 3 的对换就得到排列 3412.

**定理 1.1** 一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

证明略.

**推论** 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数,偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

## 二、 $n$ 阶行列式

为了给出  $n$  阶行列式的定义,先来研究三阶行列式的结构.三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (1.6)$$

分析(1.6)式可以得到如下结论.

1. 上述定义表明三阶行列式含有 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积.因此(1.6)式右端的任一项除正负号外可以写成

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

显然  $p_1p_2p_3$  是数 1,2,3 的全排列.

2. 各项的正负号由列标的排列的奇偶性决定.列标的排列  $p_1p_2p_3$  是偶排列时,该项取正;列标的排列是奇排列时,该项取负.

那么,三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中  $t$  为排列  $p_1p_2p_3$  的逆序数,  $\sum$  表示对 1,2,3 三个数的所有排列  $p_1p_2p_3$  取和.

类似地,我们可以定义  $n$  阶行列式.

**定义 1.5** 设有  $n^2$  个数,排成  $n$  行  $n$  列的数表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array},$$

作出表中位于不同行不同列的  $n$  个数的乘积,并冠以符号  $(-1)^t$ ,得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \quad (1.7)$$

的项,共  $n!$  项,其中  $t$  为排列  $p_1 p_2 \cdots p_n$  的逆序数.所有形如(1.7)式的  $n!$  项的和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为  $n$  阶行列式,记作

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记为  $\det(a_{ij})$ ,数  $a_{ij}$  称为行列式  $\det(a_{ij})$  的元素,即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}.$$

当  $n=1$  时,行列式  $|a_{11}| = a_{11}$ ,不要和绝对值记号相混淆.当  $n=2,3$  时,这就是二阶、三阶行列式.

**例 1.4** 证明对角行列式(即对角线上的元素为  $a_{ij}$ ,其余元素均为 0 的行列式)

$$\begin{vmatrix} & & & & a_{1n} \\ & & & & \\ & & & a_{2,n-1} & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

**证** 由定义知

$$\begin{vmatrix} & & & & a_{1n} \\ & & & & \\ & & & a_{2,n-1} & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = (-1)^t a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

$$\left( n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 \text{ 的逆序数 } t = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \right)$$

第二个式子显然.

**例 1.5** 证明上三角形行列式(即主对角线以下的元素都为 0 的行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

**证** 根据定义 1.5, 有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \\ &= \sum_{p_n \neq n} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} + \sum_{p_n = n} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{n-1,p_{n-1}} a_{np_n} \\ &\quad (\text{注意 } p_n \neq n \text{ 时 } a_{np_n} = 0) \\ &= [\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{n-1,p_{n-1}}] a_{nn}, \end{aligned}$$

又因为排列  $p_1 p_2 \cdots p_{n-1}$  的逆序数与排列  $p_1 p_2 \cdots p_{n-1} n$  的逆序数相同, 故

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \left[ \sum_{p_{n-1} \neq n-1} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{n-1,p_{n-1}} + \sum_{p_{n-1} = n-1} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{n-2,p_{n-2}} a_{n-1,p_{n-1}} \right] a_{nn} \\ &= [\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{n-2,p_{n-2}}] a_{n-1,n-1} a_{nn} \\ &= \cdots = (-1)^t a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

**注** 对于  $n$  阶行列式的任一项

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

由于乘法的可交换性, 可以把该项列指标组成的排列  $p_1 p_2 \cdots p_n$ , 经过  $s$  次对换变成标准排列  $12 \cdots n$ , 与此同时, 行指标组成的标准排列  $12 \cdots n$  经过  $s$  次对换变成排列  $q_1 q_2 \cdots q_n$ , 即有

$$a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}.$$

根据定理 1.1, 知  $p_1 p_2 \cdots p_n$  与  $q_1 q_2 \cdots q_n$  具有相同的奇偶性, 所以

$$(-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = (-1)^{t(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}.$$

因此,  $n$  阶行列式也可定义为

$$D_n = \sum (-1)^{t(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}.$$

### 第三节 行列式的性质

将行列式  $D$  的行与列互换后得到的行列式, 称为  $D$  的转置行列式, 记为  $D^T$ , 即如果

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**性质 1** 行列式  $D$  与它的转置行列式相等, 即  $D = D^T$ .

**证** 记  $D$  的一般项为

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

它的元素在  $D$  中位于不同的行不同的列, 因而在  $D^T$  中位于不同的列不同的行. 所以在  $D^T$  中一般项的  $n$  个元素的乘积应为

$$a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n},$$

由定理 1.1 可知其符号也是  $(-1)^t$ . 因此,  $D$  与  $D^T$  是具有相同项的行列式, 所以  $D = D^T$ .

有了这个性质, 行列式对行成立的性质都适用于列的情况, 反之亦然.