

现代数学 与计算机文化

○ 褚蕾蕾 王天军 陈绥阳 主编

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

现代数学与计算机文化

褚蕾蕾 王天军 陈绥阳 主编

内 容 简 介

本书以数学与计算机科学的著名人物和重大事件为主线,按文、史、哲、艺四大元素,介绍1900年以来的现代数学文化、计算机理论诞生以来的计算机文化与思维方式,在两种文化的融合中回答数学是什么、数学研究的基本对象是什么、数学文化是什么等本体论和认识论问题,介绍数学危机中的基础研究流派、研究方法论、成果及现存问题,更新人们的数学文化观念,介绍计算机科学、人工智能与数学的关系,它们产生的历史条件、作用和意义,以及计算机艺术与计算机发现,通过人工智能反思人类的智能与学习,最后对现代数学哲学基本派别、计算机和人工智能带来的哲学新问题给出简要的评述。

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

现代数学与计算机文化 / 褚蕾蕾, 王天军, 陈绥阳主编. —北京: 北京理工大学出版社, 2019.12

ISBN 978-7-5682-8029-7

I. ①现… II. ①褚… ②王… ③陈… III. ①数学-文化研究 ②电子计算机-文化研究 IV. ①O1-05 ②TP3-05

中国版本图书馆CIP数据核字(2020)第001749号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街5号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (总编室)

(010) 82562903 (教材售后服务热线)

(010) 68948351 (其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 三河市天利华印刷装订有限公司

开 本 / 787毫米 × 1092毫米 1/16

印 张 / 14.5

字 数 / 332千字

版 次 / 2019年12月第1版 2019年12月第1次印刷

定 价 / 56.00元

责任编辑 / 钟 博

文案编辑 / 钟 博

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 施胜娟

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

序 言

1. 西方与东方文明发育中的故事

西方有三个苹果的故事。

第一个苹果，是产生人类的苹果。在《创世纪》里，耶和华用尘土造出了亚当，又用亚当的肋骨造出了他的妻子夏娃。二人住在完美的伊甸园里，管理各种植物和动物。但他们受到蛇的诱惑吃了善恶树的禁果，被逐出伊甸园，但从此有了人类。禁果，又名蛇果，就是苹果，原产于地中海。地中海是世界上最古老的海，也是古代文明的发祥地之一，孕育了古埃及、古巴比伦王国的灿烂文化，更是欧洲文明的发源地。

创造世界万物的耶和华见到地上充满邪恶，于是用洪水消灭恶人，同时神示义人诺亚建造方舟拯救了他的一家和一些牲畜与鸟类。洪水消退后，方舟停在土耳其东部的阿勒山。诺亚离开方舟以后，用祭品献给神。耶和华决定不再用洪水毁灭世界，并在天空制造了一道彩虹，作为保证。诺亚的子孙都讲一样的语言，称为亚当语，他们向东迁移，来到古巴比伦附近的平原示拿，就定居下来。一天，有人提出：我们怎么知道会不会再有诺亚时代的洪水？于是，他们想建造一座通到天国的塔。上帝发觉自己的誓言受到了怀疑，于是悄悄来到人间，改变并区别人类的语言，使他们因为语言不通而分散，这座塔也就半途而废了。这座塔叫作“巴别塔”，巴别即“变乱”的意思。但是，现实中的巴别塔，又称巴比伦塔，是公元前 586 年建于古巴比伦王国的一座高塔。在巴比伦语中，“巴别”是“神之门”的意思。这是一种考问现实、追奉真理的理性精神。这种精神，建立起数学的巴别塔。

到了 1642 年，在英国林肯郡格兰瑟姆小镇以南 8 英里（1 英里 = 1 609.344 米），一个叫沃尔斯索普的小村子里，于 12 月 25 日在一个农场主的家庭里诞生了一个小孩，叫牛顿。年青的牛顿就读于建校 470 多年的剑桥大学三一学院。在一个炎热的中午，牛顿在农场的花园里休息，一个熟透了的苹果落下来，正好打在牛顿的头上，发生了第二个苹果的故事。牛顿想，为什么苹果总是垂直落向地面呢？为什么苹果不向外侧或向上运动，而总是向着地球中心运动呢？无疑地，这是地球向下拉着它，有一个向下的拉力作用在物体上，而且这个向下拉力的总和必须指向地球中心，而不是指向地球的其他部分。这是 1726 年 4 月 15 日，牛顿对《牛顿的生平传记》的作者斯图克莱讲的。于是，牛顿发现了万有引力，这大约是 1666 年的事情，距今已 350 多年了。他还通过对物理的研究发明了微积分，使数学进入分析时代，人们也进入了对力的崇拜时代。

在牛顿故居——沃尔斯索普庄园，据说原来的苹果树在 1820 年被一场暴风雨刮倒后，老树抽发新枝，继续生长。在这棵苹果树的前面有一个小牌，大意是在英国女王伊丽莎白二世登基 50 周年纪念的 2002 年 6 月，女王授予此树为英国的 50 棵名树之一，并将其列为国家遗产。在格兰瑟姆小镇中心广场建有牛顿的雕像。

牛顿出生后 270 年，1912 年 6 月 23 日，阿兰·图灵出生于英国伦敦的帕丁顿。图灵的祖父曾获得剑桥大学数学荣誉学位，父亲居里欧是英属殖民地印度的一名小公务员。图灵小时候读的第一本书是《每个儿童都该知道的自然奇观》，他曾把一个玩具木偶的胳膊栽到花



园里，期待长出更多的木偶。1931年，图灵考入剑桥大学国王学院。1936年5月，图灵写出了名为《论可计算数及其在判定问题中的应用》的论文，奠定了计算机科学的基础。1950年10月，图灵又发表了名为《机器能思考吗》的论文，它是人工智能诞生的标志之一。1954年6月7日，图灵去世，他的床头放着一个被咬了一口的苹果，它含有有毒的氰化物。美国计算机协会为了纪念图灵，于1966年设立了“图灵奖”，该奖被喻为计算机界的诺贝尔奖。现在，风靡世界的人工智能，究竟是鲜美的苹果，还是有毒的苹果，抑或二者兼而有之，人们争论不休。这就是第三个苹果的故事。

苹果，属蔷薇科，原产于欧洲和中亚细亚，于元朝时期从中亚地区传入中国。明朝万历年间的《群芳谱·果谱》中，有“苹柰（huà）”条记录“苹果”，中国农学史专家认为这是词语中最早使用“苹果^①”一词的记录。该词源于梵语，在佛经中称为“频婆”“苹婆果”（见佛经《采兰杂志》），后被汉语借用。苹婆，属梧桐科。清代四川诗人李调元《南海百咏抄》中有咏苹婆果诗：“虞翻宅里起秋风，翠叶玲珑剪未工，错认如花枝上艳，不知莢子缀猩红。”

东方文明的发育，自然不能借助苹果，但有三块五色石的故事。

盘古开天地，肇立乾坤，启阴感阳。往古之时，四极废，九州裂，天不兼覆，地不周载。火熾（làn）焱而不灭，水浩洋而不息。于是女娲炼五色石以补苍天，这是第一块五色石的故事^②。女娲炼石为泥，抟土成人，开世造物，建立婚姻。继而伏羲，创八卦，教渔猎，制定嫁娶制度；又有神农，尝百草，课农桑，教人医疗农耕。再有黄帝，制衣冠、建舟车、制音律、创文字。《三字经》说：“自羲农，至黄帝。号三皇，居上世。”经三皇五帝，华夏文明建立起以仁爱为核心价值、天地人和谐统一的世俗社会。

女娲炼石补天，喻示上古先人对火与石的认识。就石而言，一是玉石，一是矿石。考古人员在内蒙古红山发现大型碧玉C型龙，其身曲吻昂，毛飘发举，还发现了冶铜用的坩埚残片。目前，考古发现华夏文明最早的金属器为黄铜器，出土于陕西姜寨遗址的半圆形黄铜片和黄铜管，属公元前4700—前4000年的仰韶文化一期。甘肃东乡林家出土的马家窑文化铜刀，距今4700多年，号称“中华第一刀”。炼铜起源于烧陶，说明先民对火的利用已达到1000℃以上。距今4000年左右，中国进入青铜器时代，经历夏、商、周，至战国，约1500年。“中国”一词最早记载于西周初年第一件有纪年的青铜器何尊。青铜是红铜和锡或铅的合金，熔点为700~900℃，具有优良的铸造性、抗磨性和化学稳定性。铸造青铜器要解决一系列的工艺问题，是人类技术发展史上的飞跃。根据现有的考古资料，一般认为早期铜冶金术是从中国西北地区传至内地的。华夏文明形成多神（含圣、贤）的、世俗的、稳定的农耕社会。华夏上古先民选择了一个顺应自然、追求实用、工于技术的人文精神。

中国古代并不缺乏艺术上的浪漫主义。先说那五色石，民间有多种彩石，诸如雨花石、五彩石，随手捡来，聚石为数，摆石为棋。到了16世纪，吴承恩（约1500年—1582年）

① 中国古代与苹果相似的水果，称“柰”或“林檎”。西汉汉武帝时，上林苑中曾栽培林檎和柰。中国土生苹果于清朝在河北、山东等地广泛种植，但产量少、果实小，虽然味道甘美，但不耐存储。清朝末年引进西洋品种苹果，进行杂交改良，至20世纪70年代后中国再少有种植土生苹果。

② 三国时代吴国人徐整著《三五历纪》，为最早记载盘古开天地的一部著作。战国前期的列子（公元前450年之前—公元前375年之后）在《列子·汤问》中就有文字记载女娲炼五色石的故事。



提供了一本明代小说《西游记》^①，它取材于《大唐西域记》、宋代《大唐三藏取经诗话》和民间传说，是中国古代浪漫主义与魔幻现实主义的开创性作品。在东胜神洲傲来国的花果山顶上，有一仙石，高三丈六尺五寸，周围二丈四尺，无树木遮阴，有芝兰相衬。自开天辟地以来，受天真地气，日精月华，遂有灵通之意。一日迸裂，化作一个石猴。由此演绎出第二块五色石的故事。石猴在西牛贺洲的灵台方寸山斜月三星洞，受教于菩提祖师，得法名孙悟空，获祖师传授筋斗云和七十二般变化，后回花果山水帘洞自称美猴王，实为天下第一海归。《西游记》赞扬了向往学习、求真经的开放态度，歌颂了“踏平坎坷成大道，斗罢艰险又出发”的奋斗精神，体现了民间大众对超自然能力的崇敬和对工具神力的膜拜。其艺术特色，是奇幻、奇趣。但其建构的神话世界，隐喻着对精神和身体的双重控制，演绎出皇权意识和宗教政治相结合的极权模式，折射出先秦文化衰微后华夏哲思的递减。于是，从艺术层面上，可以理解为中国古代数学在元朝达到“四元玉览”的高峰后，进入隐身时期的社会文化环境。《西游记》问世后不久，徐光启和意大利传教士利玛窦翻译并在北京刊行了《几何原本》。

第三块五色石是众人皆知的青埂峰下女娲补天剩下的一块顽石，由此幻化成“大如雀卵，灿若明霞，莹润如酥，五色花纹缠护”的“通灵宝玉”。记叙通灵宝玉故事的是曹雪芹写的《石头记》。作者不仅有“四海变秋气，一室难为春”的家国之思，而且通过塑造一大批高度个性化的艺术典型，体现了中华民族一个绵长的人文传统，反映出丰富复杂的社会生活。通灵宝玉只是艺术手法，它构筑了一条由天到人、由神话到现实的路径。

2. 古代希腊文明与华夏文明对数学的选择

存在决定选择，选择决定路线。在世界文明发育的路线中，古希腊文明是一种罕见的人类文化现象，既起源于社会实践，又源于对自由人性和绝对真理的追求、对求知的无比好奇和思辨乐趣。这是一种内在的、确定性的、非功利的知识，它具有三个基本的要素：古希腊哲学体系、形式逻辑和演绎数学。

柏拉图（Plato，公元前427—前347年）是古希腊伟大的哲学家，与他的老师苏格拉底和他的学生亚里士多德并称为“希腊三贤”，他们共同建立了古希腊的哲学体系。大约在公元前387年，他40岁返回雅典后，在雅典西北郊外的陶器区建立了一个学园，门口竖着一块牌子“不懂几何学者勿入此门”，世称“柏拉图学院”。当时，欧几里得的《几何原本》还没有问世。人们要问，为什么？2380多年前，柏拉图有一个名为“善的概念”的著名演讲，听众包括亚里士多德等。这个演讲并不成功，因为人们通常认为善是美好的东西，如财富、健康或力量，但是柏拉图把对善的讨论变成了对数、几何和天文学的讨论，完全出乎听众们的意料。柏拉图将数学内容和善等同起来，认为数学不仅是认识善的一种手段，而且本身就是一种善。柏拉图在讲述宇宙生成论的《蒂迈欧》篇中，把宇宙看作一个生物——人，它不仅具有灵魂，还拥有形体。宇宙的善既在于其灵魂的善，也在于其形体的美。是连续的几何比例、和谐的音乐节律和完美的几何图形构成了最好的可见宇宙。所以，《蒂迈欧》篇大量使用了数学语言。晚期的《斐勒布》篇则揭示了宇宙的善在于美、比例和真理。正义和健康的善在于它们具有次序和数的结构，这也是灵魂和理想城邦的结构。柏拉图对宇宙万物进行了一种数学化的解释，形成了一种毕达哥拉斯式的宇宙论述，即“万物皆数”。

^① 《西游记》最早的版本为金陵世德堂本（明万历二十年，1592年）。



几何学在很早的时候发端于古埃及和美索不达米亚。大约在公元前 300 年，欧几里得依据实质公理方法和亚里士多德（Aristotle，公元前 384 年—前 322 年）奠基的形式逻辑学，撰写了著名的《几何原本》，总结了从公元前 7 世纪的古埃及到欧几里得生活时期前后 400 多年的数学发展史，奠定了演绎数学及其在数学发展史上的中心地位，尽管许多结论不是他的原创。据传，是古埃及的一位土地测量员发明了几何，他被追授神话为“托特”，这是演绎数学的源头。

华夏上古先民选择了一个顺应自然、追求实用、工于技术的人文精神，以仁爱精神作为人性的最高追求，这是不同于古希腊科学的另一种文明，其长处在于计算技术，“欲要工其事，必先利其器”，重视解决问题的方法，而不在演绎推理。这种仁爱处世精神，就是要善于为人处世，如《红楼梦》宁府的一副对联所云：“世事洞明皆学问，人情练达即文章”，而刘姥姥就是一个会为人处世的典型人物，林黛玉有性情而不懂人情世故。中国传统文化的优长之处在技术、自然志和人类文化学。吴国盛在《什么是科学》一书中，提出：“技术、博物学（自然志）、理性科学构成了一个科学谱系。”

在中国古代的数学专著《算经十书》中最重要的一部是《九章算术》，其成书于公元 1 世纪左右^①，现今流传的是在三国时期魏元帝景元四年（263 年）刘徽所注版本。该书收有 246 个数学问题，分为九章，分别是方田、粟米、衰（cui）分、少广、商功、均输、盈不足、方程及勾股。其特点是密切联系实际，面向生产、生活中的数学问题，以计算方法为中心，利用算筹进行计算。其不容忽视的缺点是没有形成抽象的数学概念及推导演绎的思维方式。其叙述方式是归纳，先给出例题，再给出解法，不同于西方以演绎为主的叙述方式，没有上升到理论层面，但它是当时简练而有效的应用数学。

欧几里得的《几何原本》，在经过 2 000 多年后，到 19 世纪 20 年代，俄国喀山大学罗巴切夫斯基在对欧氏几何第 5 公设（平行线公理）的争议中，提出一个与第 5 公设对立的命题来代替第 5 公设，创立了非欧几何。继而，1899 年希尔伯特出版形式公理系统的《几何基础》，推动了 20 世纪形式主义学派的建立，催生了布尔巴基学派结构主义数学的诞生，形成了现代基于公理演绎的数学研究模式，以及依据这种模式建立起来的“纯数学”。

于是，有人认为，只有“纯数学”才是数学，它是基于公理的演绎数学，是追求真理的数学，而计算只是基于归纳的、经验的、支离破碎的方法，是一种技术而不是“科学”。2001 年 3 月，俄罗斯数学家、2001 年沃尔夫奖获得者阿诺尔德与布尔巴基学派的塞尔在庞加莱学院进行了一场辩论^②。塞尔是最年轻的菲尔兹奖获得者，获奖时才 28 岁。阿诺尔德讲，他看过巴黎 Orsay 大学一年级的“学生须知”，上面给出了数学的定义：

数学是一门论证科学，论证是一系列蕴含：从 A 推导出 B，从 B 推导出 C；结论：从 A 推导出 C。最主要的是，理解一个蕴含是什么，也就是它的定义。如 A 和 B 是两个任意的短语，如果两个都正确，就可以说 A 推导出 B。

阿诺尔德说：“这种定义可以理解为，从二乘二等于四能得出地球是围绕太阳旋转的结论。”所以，作为演绎基础的命题逻辑是有缺陷的。辩论中，塞尔曾经声明“数学和物理没有任何共同点”。但希尔伯特于 1930 年在《数学与自然科学》中断言几何是物理的一部分。有的数

① 1984 年，湖北省出土《算数书》书简。据考证，它比《九章算术》成书早一个半世纪，内容与后者相似。

② 丘成桐，等. 数学的艺术 [M]. 北京：高等教育出版社，2015.



学家就把几何从中学教材方案中删除了，但很快又恢复了，因为遭到国防部门的抗议：“没有几何就没有炸弹”。阿诺尔德进一步说：“数学是物理的一部分，而并非是从空内涵到空内涵的推演的科学。数学和物理都是实验性科学，区别只在于物理实验价值上亿美元，而数学，几卢布而已。”

微积分是 17 世纪 70 年代前后，由牛顿和莱布尼兹发明的，他们分别从运动学和几何学来考虑求速度、极值、面积等问题，是一种算法而不是从公理出发的演绎。最初，微积分的概念和描述都是模糊不清的，没有系统的理论。第一本微积分教材是洛必达提供的。直到 150 年后，19 世纪分析严格化的先驱、法国数学家柯西于 1821 年出版《分析教程》，才给出了数学分析的一系列基本概念和精确定义。其后，经历 $\varepsilon - \delta$ 语言和实数系的建立，直到 1960 年前后鲁滨逊建立非标准实数系，证明无穷小量的存在性，才为数学分析奠定了完整的理论。这说明数学理论的建立往往是从实际问题的计算引导开始的，反映出从实践到感性认识（经验）再到理性认识（理论）的提升过程，再由理论指导实践，这一完整的过程只会不断上升而不会终结。演绎只是数学研究的一种模式，而不是唯一的、全部的模式。

由于 19 世纪末几何形式化公理系统的成功，许多数学家希望将整个数学建立在公理系统的基础上，从一些确切的、不受怀疑的公理出发，经过演绎，建立整个数学的大厦。但是，20 世纪 30 年代，哥德尔的工作表明，这种想法是行不通的，数学的绝对真理性受到了挑战。

3. 计算数学地位的恢复与发扬

怀特海于 1939 年 12 月在哈佛大学的演讲“数学与善”中说：“模式为有限的识别能力所知道，它又部分地揭示了与宇宙背景的本质联系。”数学是研究模式的科学，计算数学就是它的一种研究模式，这种模式同演绎一样能揭示世界的本质联系。从现在的观点来看，《九章算术》正是一种面向问题，模型化、算法化、机械化的一种数学模式，与现代不同的是当时的计算工具只有算筹。正是用算筹和一种加速逼近的算法，祖冲之算出了当时高精度的圆周率。人们认识到，演绎数学、计算数学、应用数学同为数学研究的重要模式。

揭示计算本质的是 1936 年图灵的工作，他在《论可计算数及其在判定问题中的应用》一文中澄清了什么是计算，提出了图灵机，与哥德尔、丘奇等共同奠定了计算机科学的计算理论。1945 年，冯·诺依曼提出了计算机体系结构，后人称之为“冯·诺依曼体系结构”。1946 年 2 月 14 日，美国宾夕法尼亚大学研制出第一台数字电子计算机，开启了计算机时代，也迎来了信息时代。

1953 年 1 月 3 日，中国成立了第一个计算机研究小组。1956 年，我国十二年科技发展规划纲要出台，将计算机列为“四项紧急措施”之一，当时，这还是国家核心机密。1958 年 8 月 1 日，我国第一台数字电子计算机经苏联的帮助在中国科学院计算技术研究所诞生。经过 55 年的努力，我国“天河二号”计算机系统以每秒 5.49 亿亿次的计算峰值，首次位列全球超级计算机 500 强榜单第一名。

在全球的工业化进程中，有蒸汽机但没有蒸汽机学，有电机学但没有电机科学，那么能否以计算机冠名“计算机科学”呢？20 世纪 80 年代，针对“计算机科学”这一名称，产生了激烈的争论。当时，大多数科学家认为计算机的使用不需要作任何科学的思考，不能称为“计算机科学”，计算机只是一门技术，或者一个商品。1985 年春，美国计算机协会组织了一个委员会，开始了“计算机作为一门学科”的存在性证明，经过近 4 年的工作，他们提交



了《计算机作为一门学科》的报告，按定义一个学科的要求入手，从抽象、理论、设计、应用等方面详细地阐述了计算机作为一门学科的事实，并对计算机学科作出了以下定义：计算机学科是对描述和变换信息的算法过程，包括对其理论、分析、设计、效率、实现和应用等进行的系统研究。从此，有了“计算机科学”这门学科。数学中，有了“信息与计算科学”这一专业。

从此，数学思维、物理思维、计算思维、实验思维成为人们基本的科学思维方式。同时，这也促进了人工智能的飞速发展，使其成为当前的热门显学。人们用科学思维来看待宇宙，产生了一些新的思潮：

其一是在计算主义的兴起中，出现了“实在的本质是计算”的观点。它正像笛卡儿复活柏拉图的数理宇宙观一样，认为宇宙万物的本质是数学性的，世界就是几何的化身，自然之书是用数学的语言写的，遵循完美而不变的数学规律。2002年，沃尔弗拉姆出版了《一类新科学》，他运用元胞自动机说明宇宙中的一切都可以看作计算，需要以更一般的计算规则来创建科学的新类型。计算主义允诺实在的本质是计算。理论物理学家斯莫林说道：“这个世界不是由实体组成的，而是由发生事情的过程所组成的。基本粒子不是仅仅停在那里的静态物体，而是在它们相互作用的事件之间携带少量信息，并引发新过程的过程。这更像是一个基本的计算机操作，而不是传统的永恒原子的图像。”这就像牛顿力学的成功让人们把宇宙看作一个巨大的钟表，形成了机械决定论的世界观一样，现在是否要形成计算决定论的世界观呢？

其二是在人工智能的发展中，强人工智能观点的出现。强人工智能是指具有自我意识，自主学习、自主决策能力的人工智能。其中，一种极端的观点是奇点大学校长雷·库兹韦尔所说的：“2045年严格生物学意义上的人类将不复存在。”这时，将出现“超人类”——在机能与智能上远超现代人类的新人类，“后人类”——基因改造与机器融合的新物种，他们将具有和人完全不一样的知觉、意识、认知和推理方式。这个时刻称为“奇点”。奇点到来时，智能机器将摆脱人类的控制并超越人类的智能，人类社会将进入超级智能控制一切的时代并被其控制。斯蒂芬·霍金对这样的人工智能表示了极大的担忧，认为人工智能可能是人类最大的灾难，如果管理不当，会思考的机器可能终结人类文明。《智能简史》的作者加里斯在书的结尾处提出：“我们是在制造上帝，还是在制造我们潜在的毁灭者？”

对这些新的问题，单凭科学自身是难以回答的，必须提升到人类文化学的层面，在更广阔的视野中才能审视回答。所以，要讲现代数学与计算机文化。

4. 现代数学与计算机文化

对现代数学的分野，有多种说法，本书为了叙事的继承性、阶段的完整性把时间节点的划分定在1900年。尽管计算机科学已经独立门户，但与数学有千丝万缕、剪不断理还乱的联系，所以本书将数学与计算机放在一起叙述。现代数学与计算机文化的基础还是数学文化，故先厘清本书对这一概念的使用。

通常认为文化是“人类物质文明和精神文明的总和”。“文明”是人类脱离新石器时代而发展到高级阶段的一种社会状态。梁漱溟在《东西文化及其哲学》一书中区别了文化和文明，他说：文化是那个时代人们生活的样子，文明是那个时代人们创造的东西。文化学是探讨文化的产生、发展规律和文化本质的科学，它不同于自然科学，也不同于具体的各门社会科学，其研究偏重于人类文化的创造活动与成果。因此，文化具有时代的特征，其活动的主



体是人，活动的行为是生活（不是单一的某种活动，如生产），生活表现出行为的特征、形态、标志与成果。

数学文化的缘起，大致在 20 世纪 80 年代，一些数学哲学家开始从数学的社会、文化因素（外史）等对数学的发展作出解释，提出“数学文化”的观点。较早系统地、完整地论述这一概念的是美国数学家、人类学家怀尔德，他在 1981 年的代表作《作为一种文化体系的数学》一书中，从数学自身、文化环境、数学与文化共同作用三个方面，概括出影响数学发展的 23 条规律，描述了数学发展的多元互动机制。从怀尔德数学文化的简约表述上，可以从三个层面，即科学层面、哲学层面和文化层面了解什么是“数学文化”。我国早就有关于数学史、数学哲学、数学思想和数学方法的讨论与研究，国内也有学者秉承怀尔德文化系统论的观点。还有一种观点是将数学文化作为数学与人文学的交叉融合。在人文学、社会科学与自然科学三大类中，人文学是关于人类自身与处境的描述，是“处世之学”，其实质是“美”，只能自圆其说，主要包括文、史、哲、艺四大门类。本书正是从文、史、哲、艺四大元素出发来剪裁、梳理、组织数学文化。

无独有偶，源于数学而与其分野的计算机科学，由于人类社会在生存方式上使用计算机而产生一种崭新的文化形态。1981 年在瑞士洛桑召开的第三届世界计算机教育应用大会上提出了计算机文化的概念，对此，《后现代主义辞典》的定义是：“以计算技术、多媒体技术和网络技术的普及发展为基础，以信息处理为核心的崭新的社会物质文明和精神文明现象。”

近 30 年来，在提高学生文化素质的大环境中，掀起了数学文化研究的热潮。在描写数学历史人物与数学活动的著作中，有国家科技进步二等奖 2010 年度的获得者吴文俊等及 2017 年度的蔡天新，在教学中，有第一届高等学校教学名师奖获得者顾沛。2006 年，教育部数学教指委颁布的《本科数学基础课程教学基本要求》指出：“数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素养；不仅是一种科学，而且是一种文化。”数学文化课以深浅适当的数学知识为载体，传授数学的思想、精神和方法，培养学生的数学思维，提高学生的思维品质、文化素质和思想素质。

本书主要依据 20 世纪 100 年来的数学史，尤其是 20 世纪 30 年代计算机理论诞生以来的重大历史事件，采用以事件为中心的纪事本末体，通过记叙数学杰出人物及其活动来反映数学史事件，在现代数学文化与计算机文化相融合的语境中，介绍现代数学文化与计算机文化，具有叙事的现代性、科学性、文化性和思想性，并以人物故事增强阅读历史文化的趣味。本书既可作为相关课程的教材、教学参考书，又可作为科普读物和青年的励志读物。

年青的朋友们，你们想知道现代的数学与计算机科学是什么吗？也许离开高深而枯燥的教科书，离开满板的公式和刺眼的投影灯光，你们会看到思想深邃的学者、发明家和五彩斑斓的历史故事，惊叹原来数学与计算机的世界是那样丰富多彩，原创的思想、方法也是那样简单，就像“不知细叶谁裁出”时，就会看到“袅袅古堤边，青青一树烟”，你们既像古堤春柳图中的游客，又像跃跃欲试的植树人。

5. 能探风雅无穷意，始是乾坤绝妙词

举世皆宗李杜诗，不知李杜更宗谁。能探风雅无穷意，始是乾坤绝妙词。

这是明朝方孝孺《谈诗五首》之一。学数学，有如做学问，也应从文化上探源索微，研精覃思，才能得到诗一般的乾坤绝妙词。



数学研究的对象在数学的世界里存在，那么它是否实在呢？柏拉图认为，理念是客观实在的，但不是一般物理性方式的存在。因此，数学的根本任务是发现，发现已经存在的数学真理。但是，亚里士多德又认为，数学对象不可能分离独立存在于可感事物之外。培根也认为知识是存在的反映。因此，数学的根本任务是发明，用发明的方式去表现数学的知识。数学的发现与发明，都是一种创新。遇到问题，首先要问“讲什么”（这件事讲的是什么），“是什么”（数学表达是什么），“为什么”，“行得通吗”，这是关于“什么”的问题，而不是首先问“怎么做”“怎么证明”“怎么计算”这种关于“做”的问题。理性是追问“为什么”，经验是追问“怎么做”。用数学奥林匹克竞赛知识来训练中学生，就是训练第一步怎么做，然后第二步、第三步，等等。把数学作为考大学、考研的敲门砖，只会扼杀年轻人对数学的兴趣。学数学是需要兴趣的，就像2002年解决代数拓扑中庞加莱猜想的俄国数学家格里戈里·佩雷尔曼。数学家格罗莫夫说他理解佩雷尔曼，“你要做伟大的工作就必须有一颗纯洁的心。你只能想数学。其他一切都属于人类的弱点”。

中国科学院杨乐院士不认为数学奥林匹克竞赛知识有利于数学思维^①，他还说：“数学最本质、最核心的部分是纯数学，只有纯数学才可以感受到数学的真与美。应用数学不一样，一般不是用真和美来衡量，而是以应用的广度和效用来衡量。真正对数学有兴趣、有才华的孩子，应该去研究纯数学，才能做出较好的贡献。一些颇有天赋学数学的孩子，因受到家长的影响而转向应用甚至转行，其实是颇可惜的。”

关于纯数学的真与美，英国数学家哈代曾说：“数学家跟画家或诗人一样，也是形式的创造者。”他在《一个数学家的辩白》一书中，讲到高斯的言论“数论是数学的皇后”时，认为数论和皇后的相像之处在于二者完全的“无益性”，也就是没有实用性。做纯数学研究不用去问它有什么用处。就像布尔巴基学派的格罗登迪克一样，他反对将数学用于战争。有人评价他说：“对于这些‘纯粹’数学家来说，物质世界仅仅是幻象，只有精神世界才是永恒的。他们只需要一支铅笔、几张白纸，就可以凭着自己聪明的头脑，在纯粹数学的象牙塔中雕镂出一个辉煌的天地。”更有甚者，德国数学家马宁认为数学对物理有益是错误的，他说：“数学真正的意义在于解决现代人类后工业化的主要问题。这个问题不在于，像某些人所认为的，加速人类发展，正好相反，将发展全方位减速。数学将聪明人从真正对人类有危害的事情上引开。如果卖弄聪明的人不去研究费马问题而去完善汽车或飞机，对人类的害处就会更大。”^②

这种将纯数学与应用数学、计算数学割裂开来的观点是不妥当的。对于中国这样一个发展中国家来说，数学、计算机、电子、人工智能等行业的人才缺口有上百万人，能不讲数学与应用实践相结合吗？我国数学家吴文俊、冯康就是纯数学与计算机、计算数学跨界融合的著名学者。

不少青年在仰望那些难以企及的数学高峰时，总怕自己出不了成果。清代诗人张问陶在描述长江巫峡最著名的景点巫山十二峰^③时说：“可怜十二奇峰外，更有零星百万峰。”还有

① 《越禁越火 杨乐院士：奥数有利于数学思维吗》，https://www.guancha.cn/society/2018_10_15_475477.shtml?s=sygdikx

② 见序言第4页脚注④。

③ 张问陶《巫峡同亥白兄作》：云点巫山洞壑重，参天乱插碧芙蓉。可怜十二奇峰外，更有零星百万峰。船头风色近南蛮，元日看山想故山。安得倒流三峡水，扁舟一夜便西还。



一句话：“成功不必在我，而功力必不唐捐。”^①要深信，天下没有白费的努力。

有人说，学数学要有天才。天才，其实是对成功人士的恭维，但成功人士的成功很可能只是来源于一个偶然的想法。人们常说两句话，一是机遇给予有准备的头脑，一是天才出于勤奋。因此，不要扔掉简单的想法，问题在于判断它的价值，就是最前沿的最小问题。

李天岩^②在《回首来时路》^③中，讲了一个他读博士研究生时的故事。20世纪70年代初，李天岩在凯洛格（B. Kellogg）教授讲授“非线性数值分析”的课堂上，听到他讲赫希（M. Hirsch）用微分拓扑的反证法证明“布劳威尔不动点定理”^④的存在性时，觉得只要稍稍改动赫希证明，就可以得到一个找出这些不动点的实际算法。1974年元月，摆在李天岩面前的研究课题有好几个，尤其是他心仪的单调算子，但他的导师约克教授却坚持要他去实践这个算法的构想。最初，他并不想做这个问题，因为他认为他根本不懂计算。写程序、打卡（那时程序是打在卡片上）都是边学边做。他经常在每天清晨6点半到计算中心送卡片，然后等结果、改程序、等结果、改程序，直到半夜12点多，而拿到手的基本上是一大沓废纸。直到3月15日早上，他拿到的结果却只有薄薄的几页，打开一看，没想到居然算出“不动点”来了，而且是个100维的问题。这一算法，于1974年6月在美国南卡罗来纳州克莱姆森大学（Clemson University）举行的“不动点计算及应用国际会议”上一鸣惊人。因为，许多经济学里的模式均衡点可用布劳威尔不动点来表达，而找出这些不动点的算法就成了实际应用的一个重要工具。后来，斯卡夫^⑤教授在会议论文集的简介里说：“在克莱姆森会议中给我们极大惊喜的是凯洛格、李和约克的一篇文章，文中他们给出了第一个通过使用微分拓扑里的连续映射来计算不动点的方法，而不是使用我们传统的组合方法。”李天岩算法中所引用的微分拓扑概念，在非线性问题数值计算的“同伦算法”中起了革命性的作用。

在前言结束并即将进入本书各章节之际，引杜甫的绝句与朋友们共勉：

未及前贤更勿疑，递相祖述复先谁。别裁伪体亲风雅，转益多师是汝师。^⑥

① 胡适：致毕业生，载于《独立评论》，第7号，1932年。

② 李天岩，1945年6月出生于福建省沙县，1968年毕业于中国台湾新竹清华大学数学系，1974年在美国马里兰大学获博士学位，现执教于密歇根州立大学。他与约克（James Yorke）第一次引入“混沌”的概念。

③ 丘成桐，刘克峰，杨乐，季理真：数学的艺术[M]。北京：高等教育出版社，2015。

④ 布劳威尔不动点定理，形象地讲，即一个有限维闭球体上的连续映射必定存在不动点。

⑤ 斯卡夫（H.Scarf），耶鲁大学经济系讲座教授，1967年第一个提出布劳威尔不动点算法。

⑥ 递相祖述：互相学习，继承前人的优秀传统。别裁伪体：区别、裁剪和淘汰那些形式和内容都不好的诗。

前 言

80年前，怀特海在哈佛大学演讲“数学与善”，阐明数学是研究模式的科学，从而将演绎与计算两种模式统一到现代数学中。古希腊文明与华夏文明，由于文明初始选择的不同和发展路径的差异，分别产生了《几何原本》与《九章算术》所代表的两种不同的数学模式。其中，演绎模式从《几何原本》的实质公理系统，发展到希尔伯特的形式化公理系统，为纯数学建立了一个统一的框架，然而集合论的建立却带来了第三次数学危机。在数学危机的解决中，产生了公理集合论，却又带来分球奇论的困难，似乎纯数学并不完善。然而，其时厘清了计算的本质，建立了计算理论，既奠定了计算机科学，又为中国古代的计算模式带来重新认识。20—21世纪，纯数学、应用数学与计算数学产生了亘古未有的繁荣，爆发了许多耀眼的科学新星，以及由他们带领的数学流派，也出现了数字电子计算机，使人类进入信息时代，开启了人工智能的新纪元。计算机作为新的计算工具，不仅带来了计算机证明、计算机发现与计算机艺术，还催生了计算机科学。人们的科学思维也具有了物理思维、数学思维、计算思维和实验思维的特征，产生了许多新的思想观点。其中，尤为引人注目的是数学文化与计算机文化的兴起。然而，计算主义的一种观点认为实在的本质是计算，宇宙是一台计算机，有人认为其重现了牛顿将世界视为钟表的机械决定论；强人工智能的奇点幻想，也带来某种人类终结的恐惧。这些问题，数学自身已不能解决，只有从社会文化学、人类人文学的高度来重新审视。这种审视已不单是纯粹的学术之争，它对人类文化与社会建设具有方向性的启示和极大的现实意义。

希望本书以数学与计算机为背景，融入文、史、哲、艺四大元素所组成的叙述，对青年朋友的阅读兴趣、发展志向和学习方法能有所帮助，也可为开设相关课程的教师提供一点参考资料。

本书所引文献已在所引用页脚处注明，谨向原作者表示敬意与诚挚的谢意。同时，向北京理工大学出版社表示真诚的谢意，感谢出版社对本书的厚爱与精心编辑出版的工作。

本书作者虽执教多年，但囿于学识，难免挂一漏万，对书中疏忽纰缪之处，敬请读者斧正，不胜感激。

作 者

2019年于西安交通大学、河南科技大学

目 录

| | |
|----------------------|----|
| 第一章 现代数学与文化 | 1 |
| 1.0 青青一树烟 | 1 |
| 1.1 数学史分期 | 1 |
| 1.1.1 关于数学史分期的讨论 | 1 |
| 1.1.2 跨世纪的两位数学大师 | 3 |
| 1.2 现代数学的主要研究活动与特征 | 7 |
| 1.2.1 现代数学的主要研究活动 | 7 |
| 1.2.2 现代数学研究活动的主要特征 | 8 |
| 1.3 计算机与数学机械化 | 10 |
| 1.3.1 数学证明的机械化 | 10 |
| 1.3.2 数学计算的机械化 | 11 |
| 1.3.3 数学教学的机械化 | 12 |
| 1.4 现代数学的文化学特征 | 12 |
| 1.4.1 什么是数学文化 | 12 |
| 1.4.2 现代数学文化的主要特征与教育 | 18 |
| 第二章 数学的建筑 | 23 |
| 2.0 欲穷千里目，更上一层楼 | 23 |
| 2.1 数学研究的基本对象及其源泉 | 23 |
| 2.1.1 数学研究的基本对象 | 23 |
| 2.1.2 数学研究的基本对象的抽象 | 27 |
| 2.2 研究对象的基本结构 | 31 |
| 2.2.1 数学基本结构 | 31 |
| 2.2.2 描述时间与空间的多重结构 | 34 |
| 2.2.3 计算机程序设计的结构 | 36 |
| 2.2.4 结构的艺术 | 40 |
| 2.3 语言、模型与模式 | 44 |
| 2.3.1 语言的形式化与形式系统 | 44 |
| 2.3.2 模型与模型论 | 45 |
| 2.3.3 范畴与范畴论结构主义 | 48 |
| 2.3.4 非标准实数模型 | 52 |
| 2.3.5 数学的模式论观点 | 55 |
| 2.4 数学的思维与本质 | 57 |
| 2.4.1 数学思维的基本能力 | 57 |
| 2.4.2 数学是什么 | 58 |



| | |
|-----------------------------|-----|
| 第三章 数学的星空 | 63 |
| 3.0 江山代有才人出，各领风骚数百年 | 63 |
| 3.1 数学精神 | 64 |
| 3.1.1 哥廷根学派 | 64 |
| 3.1.2 布尔巴基学派 | 68 |
| 3.1.3 莫斯科学派 | 70 |
| 3.2 灿烂的星空 | 74 |
| 3.2.1 他山之石——赫尔曼德尔 | 74 |
| 3.2.2 完美的证明——佩雷尔曼 | 75 |
| 3.2.3 美丽的心灵——纳什 | 79 |
| 3.2.4 形状的迷恋——格罗登迪克 | 82 |
| 第四章 数学危机与基础研究 | 86 |
| 4.0 接天莲叶无穷碧，映日荷花别样红 | 86 |
| 4.1 第三次数学危机 | 86 |
| 4.1.1 数学危机 | 86 |
| 4.1.2 数学基础研究 | 88 |
| 4.1.3 数理逻辑的发展与应用 | 90 |
| 4.2 数学基础研究的三大学派 | 92 |
| 4.2.1 弗雷格与逻辑主义学派 | 92 |
| 4.2.2 布劳威尔与直觉主义学派 | 94 |
| 4.2.3 希尔伯特与形式主义学派 | 97 |
| 4.3 哥德尔与不完全性定理 | 104 |
| 4.3.1 哥德尔 | 104 |
| 4.3.2 不完全性定理 | 107 |
| 第五章 计算机文化 | 109 |
| 5.0 春风大雅能容物，秋水文章不染尘 | 109 |
| 5.1 计算机的诞生与发展 | 109 |
| 5.1.1 数字电子计算机诞生的历史条件 | 109 |
| 5.1.2 中国电子计算机的发展 | 111 |
| 5.2 计算机文化 | 115 |
| 5.2.1 计算机文化概念的提出 | 115 |
| 5.2.2 计算是一门学科 | 115 |
| 5.2.3 创新思维是计算机文化的基本特点 | 118 |
| 5.2.4 计算机文化与新的文明现象 | 120 |
| 5.3 计算思维与计算文化 | 121 |
| 5.3.1 计算思维 | 121 |
| 5.3.2 计算文化 | 125 |
| 5.3.3 构建计算思维的能力 | 126 |



| | |
|------------------------|-----|
| 第六章 计算机让人更智慧 | 128 |
| 6.0 百炼功纯始自然 | 128 |
| 6.1 对人工智能的初步认识 | 129 |
| 6.1.1 人工智能概念的提出 | 129 |
| 6.1.2 什么是人工智能 | 133 |
| 6.1.3 人工智能与人类智能的比较 | 136 |
| 6.2 人工智能的发展 | 139 |
| 6.2.1 人工智能的基本问题 | 139 |
| 6.2.2 人工智能的三个学派 | 140 |
| 6.2.3 人工智能发展的三个阶段 | 142 |
| 6.3 计算智能 | 145 |
| 6.3.1 计算智能概述与发展 | 145 |
| 6.3.2 计算智能的主要分支 | 146 |
| 第七章 知识获取与知识表示 | 154 |
| 7.0 金针度 | 154 |
| 7.1 知识获取的机械化 | 155 |
| 7.1.1 知识获取 | 155 |
| 7.1.2 学习 | 157 |
| 7.1.3 搜索 | 160 |
| 7.1.4 推理 | 161 |
| 7.2 计算智能的机器学习 | 163 |
| 7.2.1 监督学习与无监督学习 | 163 |
| 7.2.2 深度学习 | 164 |
| 7.2.3 强化学习 | 166 |
| 7.3 知识表示 | 167 |
| 7.3.1 什么是知识表示 | 167 |
| 7.3.2 基于非经典模型论的知识表示 | 170 |
| 7.3.3 基于知识图谱的知识表示 | 171 |
| 7.3.4 表示学习 | 174 |
| 第八章 让骄子不再孤独 | 176 |
| 8.0 草木百年新雨露 | 176 |
| 8.1 数学哲学的基本问题及其演变和主要流派 | 176 |
| 8.1.1 数学哲学的基本问题 | 176 |
| 8.1.2 数学哲学基本问题的演变 | 178 |
| 8.1.3 现代数学哲学的主要流派 | 179 |
| 8.2 朴素的实在论与反实在论 | 181 |
| 8.2.1 数学实在论与弗雷格 | 181 |
| 8.2.2 数学反实在论与达米特 | 183 |
| 8.3 现代数学哲学的当代视野 | 187 |



| | |
|--------------------------|-----|
| 8.3.1 哥德尔的概念实在论 | 187 |
| 8.3.2 结构主义 | 190 |
| 8.3.3 自然主义数学哲学 | 192 |
| 8.3.4 现代数学哲学与自然辩证法 | 196 |
| 8.4 信息与计算科学产生的哲学问题 | 198 |
| 8.4.1 关于什么是信息的争论 | 198 |
| 8.4.2 计算主义的兴起 | 201 |
| 8.4.3 人工智能引起的哲学争论 | 205 |
| 后记..... | 212 |