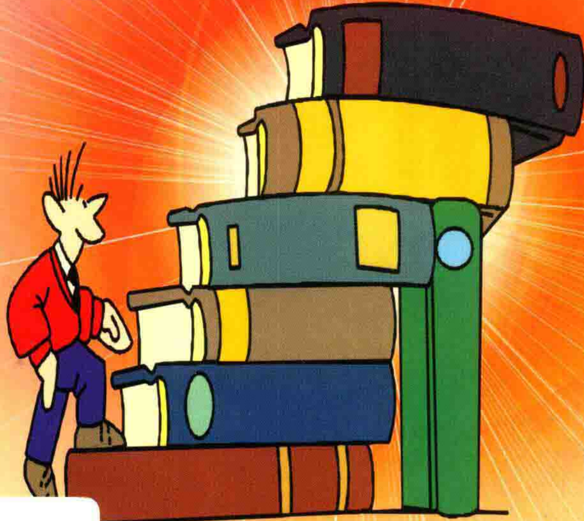
THE PRACTICAL COURSE

高中总复习优化教程

主编 吕宝兴

数学



- 集中一个个高考单项专题
- 特邀各科名师优化设计
- 紧扣最新教改要求与命题动向
- 将各考点融会贯通全面复习

上海古籍出版社

高中总复习

优化教程

THE PRACTICAL COURSE

数学

主编　吕宝兴

上海古籍出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中总复习优化教程. 数学 / 吕宝兴主编. —上海：上海古籍出版社，2004. 9

ISBN 7－5325－3914－8

Ⅰ. 高... Ⅱ. 吕... Ⅲ. 数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 094523 号

高中总复习优化教程
数　学

吕宝兴　主编

世纪出版集团
上海古籍出版社 出版

（上海瑞金二路 272 号　邮政编码 200020）

（1）网址：www. guji. com. cn

（2）E－mail：guji@guji. com. cn

易文网网址：www. ewen. cc

新华书店上海发行所发行经销　昆山市亭林印刷有限责任公司印刷

开本787×1092　1/16　印张14　字数32万字

2004年10月第1版　2004年10月第1次印刷

印数：1–20,000

ISBN 7–5325–3914–8

G · 367　定价：22.00元

主编：吕宝兴

编写：徐冬林　　王永庆　　王　宏　　郁慧英

王凤春　　冯　立　　赵桂芳　　王伟庆

徐岳灿

前 言

QIAN YAN

数学教学是一种素质教育，要有正确的指导思想，《数学教学大纲》指出，数学教学的目的是“进一步发展学生的数学实践能力”，“培养和提高思维能力”. 数学教学与复习应紧扣素质教育内核，将不同的知识点贯穿在学生学习的过程中，因材施教.

对许多高三学生来说，学好数学，考出高分，似乎是件难事，耗时费力，进步缓慢. 要改变这种状况，就需要正确引导，讲究方法，提高效率；在抓好素质教学的前提下，让学生在较短的时间内消化教材、融会贯通. 本书对高中数学教材所涉及的知识点进行系统的归纳整理，列出一个个专题，提炼概括，巧设题目，强化练习，并按照学习和考纲要求，对知识点的出现频度，进行合理的编排：第一部分以“专题”为主轴，第二部分以“应用”为主线，最后配以适量的高考模拟试题，让学生在综合的学习和训练中，巩固、深化所学内容，领会数学教学与测试的要点.

参与本书编写的除主编外，有不少数学教研员，还有重点中学的数学骨干教师.

编　者

LU MU

目录

第一部分 数学专题选讲

第二部分 数学应用选讲

第三部分 高考模拟试题

第一部分　数学专题选讲

第一章　函数及其性质

提　要

函数及其性质是高中数学的重要内容，也是其它问题（如数列、不等式、解几等）常用来结合的对象.

函数的知识要求能熟练灵活运用所学知识解决问题. 特别近两年来对函数问题的考查体现在函数性质的迁移、函数应用以及抽象函数的分析能力上.

函数的概念要注意函数的三要素；掌握判断是否是同一个函数的方法以及对函数解析式中定义域的要求等等.

求解反函数的步骤中尤其要注意反解过程中遇到开偶次方根时前面符号的取舍，以及正确写出原函数的值域（即为反函数的定义域）. 还要注意函数与反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称这一图像性质，有时可利用这一点来解题.

利用比较法处理函数单调性问题是老生常谈的事. 在此重述它的基本性及其重要性是想让广大考生知晓：许多有关问题的推理不是仅凭借判断即可，而需要进一步的论证，希望考生在代数论证能力方面有所加强.

函数周期性的判断除掌握一些基本函数周期外，尤其要学会去处理一些未见过或抽象函数的周期. 此函数往往体现命题者的匠心独具，因此试题设计构思巧妙. 有以下几点供大家作解题时分析之用.（1）取特殊值作尝试；（2）如 T 不是周期，则 $\frac{T}{2}$ 肯定不是周期，不妨试试 $2T$、$3T$ 等等；（3）要充分利用函数的其它性质（奇偶性、单调性）对解析式或由已知条件给出的等式作变形、化简；（4）类比熟悉函数的周期.

范　例

例 1　（1）求 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{|x+1|-2}+\lg(x+4)$ 的定义域；

（2）若 $y=\sqrt{ax^2-ax+1}$ 的定义域为 R，求实数 a 的取值范围.

解　（1）$\begin{cases}x^2-3x-4\geqslant 0\\ |x+1|-2\neq 0\\ x+4>0\end{cases}$，即为 $\begin{cases}x\geqslant 4 \text{ 或 } x\leqslant -1\\ x\neq 1 \text{ 且 } x\neq -3\\ x>-4\end{cases}$

所以，$-4<x<-3$ 或 $-3<x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 4$

(2) $y=\sqrt{ax^2-ax+1}$的定义域 R,即 $u=ax^2-ax+1\geqslant 0$ 对于任意 x 恒成立.

$a=0$ 时,满足.

$a\neq 0$ 时,应有:$\begin{cases}a>0\\ \Delta\leqslant 0\end{cases}$,解得 $0<a\leqslant 4$

综上,$0\leqslant a\leqslant 4$

例 2 求下列函数的值域:

(1) $y=x-\sqrt{1-2x}$ (2) $y=\dfrac{x^2}{x-1}(x\in[3,5])$ (3) $y=\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+2}$

解 (1) 函数定义域为 $x\leqslant\dfrac{1}{2}$,且知 y 是 x 的增函数.

所以,当 $x=\dfrac{1}{2}$,y 取得最大值.

所以,值域为$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$

(2) $y=\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{x-1}=(x-1)+\dfrac{1}{x-1}+2$

注意到 $x-1\in[2,4]$,而 $t+\dfrac{1}{t}$在$[2,4]$上为增函数.

所以,$y\in\left[\dfrac{9}{2},\dfrac{25}{4}\right]$

(3) 解法一:$y=\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+2}$整理得,$(y-1)x^2+(2-2y)x+2y=0$

$y=1$ 时,上式不成立.

所以,$y\neq 1$

因为,$x\in R$

所以,$\Delta=(2-2y)^2-4(y-1)2y\geqslant 0$,解得$-1\leqslant y\leqslant 1$

因此,$-1\leqslant y<1$

解法二:$y=\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+2}=\dfrac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2+1}=1-\dfrac{2}{(x-1)^2+1}\in[-1,1)$

例 3 已知函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x$ 在区间$[m,n]$ 的值域是$[3m,3n]$,求 m,n 的值.

分析 二次函数的对称轴已定,区间不定.若考虑对称轴与区间的位置关系,进行讨论,这是一般的思路.但此题处理时较麻烦.注意到此函数的最大值为$\dfrac{1}{2}$,因此可确定 n 的范围,解题时可以减少不必要的区间讨论.

解 函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x$ 的对称轴为 $x=1$,最大值为$\dfrac{1}{2}$,所以 $3n\leqslant\dfrac{1}{2}$,即 $n\leqslant\dfrac{1}{6}$

所以,区间$[m, n]$在对称轴的左边.

所以,函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x$ 在区间$[m, n]$上为单调递增.

有$\begin{cases}f(m)=3m\\ f(n)=3n\end{cases}$,即 $m=-4$ 或 $m=0$, $n=-4$ 或 $n=0$

所以，$m=-4, n=0$

例 4 函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且单调递增，满足 $f(4)=1, f(xy)=f(x)+f(y)$.

(1) 证明 $f(1)=0$；(2) 求 $f(16)$；(3) 若 $f(x)+f(x-3)\leqslant 1$，求 x 的范围；

(4) 证明 $f(x^n)=nf(x)(n\in N_+)$

解 (1) 令 $x=y=1$，则 $f(1\times 1)=f(1)+f(1)$，即 $f(1)=0$；

(2) 令 $x=y=4$，则 $f(4\times 4)=f(4)+f(4)$，得 $f(16)=2$；

(3) 由题意，$f[x(x-3)]\leqslant f(4)$，所以 $\begin{cases} x(x-3)\leqslant 4 \\ x>0 \\ x-3>0 \end{cases}$，解得 $3<x\leqslant 4$

(4) 可用数学归纳法证明.

$n=1$ 时，成立；

设 $n=k(k\in N_+)$ 时成立，即 $f(x^k)=kf(x)$，

则当 $n=k+1$ 时，

$f(x^{k+1})=f(x^k\cdot x)=f(x^k)+f(x)=kf(x)+f(x)=(k+1)f(x)$

即当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

所以，$f(x^n)=nf(x)(n\in N_+)$

例 5 已知函数 $f(x)$ 是函数 $y=\dfrac{2}{10^x+1}-1(x\in R)$ 的反函数，函数 $g(x)$ 的图像与函数 $y=\dfrac{4-3x}{x-1}$ 的图像关于直线 $y=x-1$ 成轴对称，记 $F(x)=f(x)+g(x)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式及定义域；

(2) 问在函数 $F(x)$ 的图像上是否存在这样两个不同点 A、B，使直线 AB 恰好与 y 轴垂直，若存在，求出 A、B 两点坐标；若不存在，说明理由.

解 (1) 由 $y=\dfrac{2}{10^x+1}-1$ 得，$10^x+1=\dfrac{2}{y+1}$，所以，$x=\lg\dfrac{1-y}{1+y}$

所以，$y=\dfrac{2}{10^x+1}-1(x\in R)$ 的反函数为 $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}(-1<x<1)$

即 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}(-1<x<1)$.

(2) 易求得，$g(x)=\dfrac{1}{x+2}$ 所以，$F(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{1}{x+2}=\lg\left(-1+\dfrac{2}{1+x}\right)+\dfrac{1}{x+2}$，知 $F(x)$ 是 x 的减函数.

所以，不存在这样两个不同点 A、B，使直线 AB 恰好与 y 轴垂直.

例 6 设 a 为实数，函数 $f(x)=x^2+|x-a|+1, x\in R$，(1) 讨论 $f(x)$ 的奇偶性；(2) 求 $f(x)$ 的最小值.(2002 年 21 省市高考试题)

解 (1) 解法一：此函数定义域为 $x\in R$，

若函数为奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，即有

$x^2+|-x-a|+1=-(x^2+|x-1|+1)$ 对任意 $x\in R$ 恒成立.

即 $2x^2+|x+a|+|x-a|+2=0$ 恒成立. 但不可能.

若函数为偶函数,则 $f(-x)=f(x)$,即有

$x^2+|-x-a|+1=x^2+|x-a|+1$,即 $|-x-a|=|x-a|$ 恒成立.

当且仅当 $a=0$ 时,上式恒成立.

综上,$a=0$ 时,此函数为偶函数,$a\neq0$,为非奇偶函数.

解法二:$a=0$ 时,易知,此函数为偶函数.

$a\neq0$ 时,$f(a)=a^2+1$,$f(-a)=a^2+|2a|+1$

$f(a)\neq f(-a)$, $f(-a)\neq -f(a)$

所以,$a\neq0$ 时,为非奇非偶函数.

(2) 当 $x\leqslant a$ 时,函数 $f(x)=x^2-x+a+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{3}{4}$

若 $a<\frac{1}{2}$,则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上单调递减 ,从而函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上的最小值为 $f(a)=a^2+1$

若 $a\geqslant\frac{1}{2}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上的最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+a$

当 $x\geqslant a$ 时,函数 $f(x)=x^2+x-a+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-a+\frac{3}{4}$

若 $a\leqslant-\frac{1}{2}$,则函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty]$ 上的最小值为 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-a$.

若 $a>-\frac{1}{2}$,则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty]$ 上单调递增,从而函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty]$ 上的最小值为 $f(a)=a^2+1$.

综上,当 $a\leqslant-\frac{1}{2}$ 时,函数 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{3}{4}-a$,当 $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ 时,函数 $f(x)$ 的最小值为 a^2+1. 当 $a\geqslant\frac{1}{2}$,函数 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{3}{4}+a$.

例 7 已知 $x=t+\frac{1}{t}$,$y=t^4+\frac{1}{t^4}+a\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)$(其中 $t>0,a\in R$)

(1) 将 y 表示成 x 的函数 $y=f(x)$,并求出其定义域;

(2) 若 $f(x)=0$ 有且仅有一个实数根,求实数 a 的取值范围.

解 (1) $t^2+\frac{1}{t^2}=x^2-2$,$t^4+\frac{1}{t^4}=(x^2-2)^2-2$

则 $y=(x^2-2)^2-2+a(x^2-2)=x^4+(a-4)x^2+2-2a$

而 $x=t+\frac{1}{t}\geqslant2$,即函数的定义域为 $x\geqslant2$.

(2) 由题意,$x^4+(a-4)x^2+2-2a=0$ 在 $[2,+\infty]$ 上有且仅有一个实数根,令 $u=x^2$,并记 $g(u)=u^2+(a-4)u+2-2a=\left(u+\frac{a-4}{2}\right)^2+2(1-a)-\frac{(a-4)^2}{4}$,则 $g(u)=0$ 在 $[4,+\infty]$ 内有且仅有一个实数根.

$g(4)=2a+2<0$,即 $a<-1$ 时,符合.

$g(4)=0$, 即 $a=-1$ 时,检验知,符合.

$g(4)>0$ 时，对称轴为 $u=\dfrac{4-a}{2}<\dfrac{5}{2}$，$g(u)=0$ 在 $[4,+\infty]$ 内无解.

综上，若 $f(x)=0$ 有且仅有一个实数根，实数 a 的取值范围为 $a\leqslant -1$.

说明 二次函数在给定区间上根的分布问题，有几种情形.

例 8 已知集合 M 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体：存在非零常数 T，对任意 $x\in R$，有 $f(x+T)=Tf(x)$ 成立.

(1) 函数 $f(x)=x$ 是否属于集合 M？说明理由；

(2) 设函数 $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图像与 $y=x$ 的图像有公共点，证明：$f(x)=a^x\in M$；

(3) 若函数 $f(x)=\sin kx\in M$，求实数 k 的取值范围.（2003 年上海高考试题）

解 (1) 对于非零常数 T，$f(x+T)=x+T$，$Tf(x)=Tx$，

而对于任意的 $x\in R$，$x+T=Tx$ 不能恒成立.

所以，$f(x)=x\notin M$

(2) 函数 $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图像与 $y=x$ 的图像有公共点，即

$\begin{cases}y=a^x\\ y=x\end{cases}$ 有解. 所以 $a^x=x$ 有解.

又 $x=0$ 不是 $a^x=x$ 的解，所以存在非零常数 T，使得 $a^T=T$，

则对于 $f(x)=a^x$，有 $f(x+T)=a^{x+T}=a^x\cdot a^T=T\cdot a^x=T\cdot f(x)$

因此，$f(x)=a^x\in M$.

(3) $k=0$ 时，$f(x)=0\in M$，

$k\neq 0$ 时，由题意，存在非零常数 T，使 $\sin k(x+T)=T\sin kx$ 对任意 $x\in R$ 均成立.

解法一：

$\sin(kx+kT)=T\sin kx$ 恒成立，

因为 $\sin(kx+kT)\in[-1,1]$，$\sin kx\in[-1,1]$，

要使上式恒成立，则必须 $T=\pm 1$

当 $T=1$ 时，由 $\sin(kx+k)=\sin kx$ 得，$k=2m\pi$，$m\in Z$

当 $T=-1$ 时，由 $\sin(kx-k)=-\sin kx$ 得，

$\sin(kx-k+\pi)=\sin(kx)$，所以 $-k+\pi=2m\pi$，即 $k=(1-2m)\pi$，$m\in Z$

综上，$k=m\pi$，$\mathrm{m}\in \mathrm{Z}$

解法二：

将 $\sin(kx+kT)=T\sin kx$ 化为 $\sin kx\cos kT+\cos kx\sin kT=T\sin kx$，

即 $\cos kx\sin kT=(T-\cos kT)\sin kx$ 恒成立

上式有两处变量，两边平方，化为 $\sin^2 kT=[(T-\cos kT)^2+\sin^2 kT]\sin^2 kx$

要使上式对任意 x 恒成立，当且仅当 $\begin{cases}T-\cos kT=0\\ \sin kT=0\end{cases}$

即 $T=\pm 1$，$k=m\pi$，$m\in Z$

说明 此题为上海理科考题，得分率低. 主要原因为数学符号多、字母多. 许多学生对参量、变量，任意、恒成立等问题思考不够深入，也缺乏正确的认识.

练 习

A 组

一、选择

1. 与函数 $y=\sqrt{-3x^3}$ 有相同图像的一个函数是 ( )

A. $y=x\sqrt{-3x}$ B. $y=-x\sqrt{-3x}$ C. $y=-\sqrt{3x^3}$ D. $y=x^2\sqrt{\dfrac{-3}{x}}$

2. 已知 $y=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 上是 x 的减函数，则 a 的取值范围是 ( )

A. $(0,1)$ B. $(1,2)$ C. $(0,2)$ D. $[2,+\infty)$

3. 定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 是周期函数，T 为它的一个周期，则 $f\left(\dfrac{T}{2}\right)$ 的值是 ( )

A. T B. $\dfrac{T}{2}$ C. 0 D. 无法确定

二、填空

4. 函数 $y=\dfrac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$ 的定义域是__________.

5. 若函数 $f(x+1)$ 的定义域是 $[0,1]$，则 $f(x-1)$ 的定义域是__________.

6. 函数 $f(x)=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$ 的值域为__________.

7. 函数 $y=4^x-3\cdot 2^x+3$，当 $y\in[1,7]$ 时，x 的取值范围是__________.

8. 设函数 $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+4(a,\ b\in R)$，若 $f(\lg\dfrac{1}{3})=5$，则 $f(\lg 3)=$__________.

9. 设函数 $f(x)$ 的反函数为 $h(x)$，函数 $g(x)$ 的反函数为 $h(x+1)$，已知 $f(2)=5$，$f(5)=-2$，$f(-2)=8$，那么 $g(2)$，$g(5)$，$g(8)$，$g(-2)$ 中，一定能求出具体数值的是__________.

10. 设函数 $f(x)=x^2+x+\dfrac{1}{2}$ 的定义域是 $[n,\ n+1](n\in N^*)$，那么 $f(x)$ 的值域中共有__________个整数.

三、解答

11. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ (2) $f(x)=\dfrac{x(1-x)}{x-1}$

(3) $f(x)=x\cdot\lg(\sqrt{x^2+1}+x)$ (4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$

12. 证明：函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x$ 在 R 上是减函数.

13. 是否存在实数 a、b，使函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x}$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称. 若存在，求出 a、b；若不存在，说明理由.

14. 已知 λ 是非零常数，对 $x\in R$ 成立 $f(x+\lambda)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$，问 $f(x)$ 是否是周期函数？若

是，求出它的一个周期；若不是，说明理由.

15. 已知函数 $y=f(x)=\log_2(x+\sqrt{x^2-1})(x\geqslant 1)$

(1) 求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$；

(2) 若 $f^{-1}(n)>\dfrac{a^n+a^{-n}}{2}$ 对任意正整数 n 都成立，求实数 a 的取值范围.

B组

1. 设函数 $f(x)=\log_{0.5}\dfrac{3-x}{ax+1}, a\leqslant -\dfrac{1}{3}$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域；(2) 若 $a=-1$，求当 $x\in(-\infty,0]$ 时 $f(x)$ 的值域.

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x+b}(a>b>0)$，求 $f(x)$ 的单调区间，并证明：$f(x)$ 在其单调区间上的单调性.（2000 年北京春季招生考试）

3. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的不恒为零的函数，且对于任意 a、$b\in R$ 都满足：$f(ab)=af(b)+bf(a)$.

(1) 求 $f(0)$、$f(1)$ 的值；(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性，并证明.

4. 已知 $f(x)=\dfrac{a}{a^2-2}(a^x-a^{-x})$，$(a>0$，且 $a\neq 1)$ 是 R 上的增函数，求 a 的取值范围.

5. 设函数 $y=f(x)$ 是 R 上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x^3$.

(1) 问函数 $f(x)$ 的图像是否存在对称轴？若存在，写出一条对称轴的方程；若不存在，说明理由；(2) 写出当 $x\in[1,5]$ 时 $f(x)$ 的解析式；(3) 若 $A=\{x\mid |f(x)|>a,\ x\in R\}$，是否存在这样的实数 a，使 $A\neq\varnothing$？

6. 设 $a\in R$，$f(x)=a-\dfrac{2}{2^x+1}(x\in R)$. (1) 当 a 为何值时，能使 $f(x)$ 是奇函数；(2) 当 $f(x)$ 为奇函数时，求 $f^{-1}(x)$；(3) 当 $f(x)$ 为奇函数时，对于给定的正实数 k，解不等式 $f^{-1}(x)>\log_2\dfrac{1+x}{k}$.

7. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$，其中 $a>0$.

(1) 解不等式 $f(x)\leqslant 1$；(2) 求 a 的取值范围，使函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty]$ 上是单调函数.

8. 若对任意实数 x，二次函数 $f(x)=x^2-4ax+2a+30(a\in R)$ 的值均为非负实数，求关于 x 的方程 $\dfrac{x}{a+3}=|a-1|+1$ 的根的范围.

9. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx(a, b$ 是常数，且 $a\neq 0)$，满足 $f(2)=0$，且方程 $f(x)=x$ 有等根.(1) 求 $f(x)$ 的解析式；(2) 问是否存在实数 m、$n(m<n)$，使 $f(x)$ 的定义域和值域分别为 $[m, n]$ 和 $[2m, 2n]$. 若存在，求出 m、n 的值；若不存在，说明理由.

10. 函数 $f(x)=-\log_{\frac{1}{2}}(x^2-ax-a)$ 在区间 $(-\infty,1-\sqrt{3})$ 上是减函数，

(1) 求 a 的取值范围；(2) 满足(1)的 a 取最大值时，求使方程 $f(x)=\log_2(4x-m)$ 有解的最大 m 的值.

（王永庆编写）

第二章　最大值与最小值

提　要

本讲内容为综合部分. 最值问题到处可见，常见的如函数的最值、三角中的最值、圆锥曲线的最值问题、求参数的最值、数列中的最大(小)项、二项式系数或系数的最值等等.

函数的最值处理方法要视具体的函数表达式而定. 常用配方法、基本不等式法、换元法、判别式法、利用单调性等. 尤其要熟练应用形如 $y=x+\frac{k}{x}$ 的最值.

三角函数最值通常先进行化简，再用换元法转化为函数的最值.

圆锥曲线最值注意涉及长度、距离、交角、面积等关系量. 处理时注意将这些量正确地表示出来，然后同函数的最值类似处理.

求参数的最值有不同类型. 常用分离参量法或对参数进行讨论. 详见例子.

数列中最大(小)项问题宜采用单调性这一基本方法进行比较得出. 有时可能同二项式的系数最值一样，用 $\begin{cases}a_n\geqslant a_{n+1}\\a_n\geqslant a_{n-1}\end{cases}$ 来得到第 n 项为最大项(值)，最小项类似.

范　例

例 1　求函数 $f(x)=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$ 的最小值.

分析　$f(x)=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}=\sqrt{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$，可令 $t=\sqrt{x^2+2}$，则 $f(x)=t+\frac{1}{t}$，一定要注意 t 的范围，否则会出错.

解　$f(x)=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}=\sqrt{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$，

令 $t=\sqrt{x^2+2}$，则 $f(x)=t+\frac{1}{t}$，$t\geqslant\sqrt{2}$

所以，$f(x)_{\min}=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

例 2　已知 $f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}$，若对任意 $x\in[1,+\infty)$，$f(x)>0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围. (2000 年上海高考)

解　解法一：在区间 $[1,+\infty)$ 上，$f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}>$ 恒成立，

等价于 $x^2+2x+a>0$ 恒成立.

令 $y=x^2+2x+a, x\in[1,+\infty)$

对称轴为 $x=-1\notin[1,+\infty)$

所以，函数 $y=x^2+2x+a$ 在区间$[1,+\infty)$上单调递增.

$y_{\min}=f(1)=3+a$.

所以，当且仅当 $3+a>0$ 时，$f(x)>0$ 恒立.

因此，$a>-3$

解法二：在区间$[1,+\infty)$上，$f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x}>0$ 恒成立，

等价于 $x^2+2x+a>0$ 恒成立.

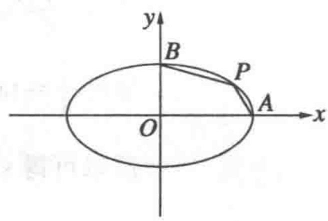
即 $a>-x^2-2x$ 在 $x\in[1,+\infty)$恒成立，

令 $g(x)=-x^2-2x$

则 $a>g(x)_{\max}=g(1)=-3$

说明 解法二用了分离参量的方法，有时能达到简化的效果. 但此法适用于能较容易地分离出参量. $a>f(x)$恒成立$\Leftrightarrow a>f_{\max}(x)$，类似地，$a<f(x)$恒成立$\Leftrightarrow a<f_{\min}(x)$

例 3 如图，已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与 x 轴的正向和 y 轴的正向分别相交于 A、B 两点，在第一象限的椭圆上求一点 P，使四边形 $OAPB$ 的面积最大.



分析 此四边形的面积直接求显然有难度，可想到将此四边形进行分割. 用参数设出 P 点坐标，将此面积转化为关于参数的函数，进而求出最值.

解 连 OP，设 $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$，$(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$

$S=\dfrac{1}{2}ab\sin\theta+\dfrac{1}{2}ab\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}ab\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}ab$，当且仅当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$时，等号成立，此时

$P\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a, \dfrac{\sqrt{2}}{2}b\right)$.

例 4 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，若 $a+c=0$，$f(x)$在$[-1,1]$上的最大值为 2，最小值为$-\dfrac{5}{2}$，求证：$a\neq0$ 且$\left|\dfrac{b}{a}\right|<2$.

解 反证法.

若 $a=0$，由 $a+c=0$，得 $c=0$，

则 $f(x)=bx$，在$[-1,1]$上最大值与最小值应互为相反数，与题意矛盾.

所以，$a\neq0$

再设$\left|\dfrac{b}{a}\right|\geqslant2$，则$-\dfrac{b}{2a}\geqslant1$ 或$-\dfrac{b}{2a}\leqslant-1$.

所以，函数 $f(x)$的对称轴不在区间$[-1,1]$内，则 $f(x)$在$[-1,1]$上为单调函数.

有$\begin{cases}f(1)=2\\ f(-1)=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}f(1)=-\dfrac{5}{2}\\ f(-1)=2\end{cases}$

即$\begin{cases}a+b+c=2\\a-b+c=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}a+b+c=-\dfrac{5}{2}\\a-b+c=2\end{cases}$

又 $a+c=0$,上述两式组均矛盾.

所以,有$\left|\dfrac{b}{a}\right|<2$.

例 5 已知外接圆半径为6 的$\triangle ABC$ 的边长为 a、b、c,角 B、C 和面积 S 满足条件:

$S=a^2-(b-c)^2$ 和 $\sin B+\sin C=\dfrac{4}{3}$.

(1) 求 $\sin A$;

(2) 求$\triangle ABC$ 面积的最大值.

分析 三角形中有关边角问题,常可结合正、余弦定理,将边与角进行互化.

解 (1) $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=a^2-(b-c)^2=a^2+2bc-(b^2+c^2)=2bc-2bc\cos A$

所以,$\dfrac{1}{2}\sin A=2-2\cos A$, 即$\dfrac{1}{4}=\dfrac{1-\cos A}{\sin A}$

也即$\dfrac{1}{4}=\tan\dfrac{A}{2}$

所以可得 $\sin A=\dfrac{8}{17}$

(2) 因为 $\sin B+\sin C=\dfrac{4}{3}$,由正弦定理,得$\dfrac{b}{2R}+\dfrac{c}{2R}=\dfrac{4}{3}$(其中 R 为$\triangle ABC$ 的外接圆半径).

即 $b+c=\dfrac{4}{3}\cdot 2R=16$

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{4}{17}bc\leqslant\dfrac{4}{17}\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2=\dfrac{256}{17}$

所以,当 $b=c=8$ 时,$S_{\max}=\dfrac{256}{17}$

例 6 已知二项式$\left(\dfrac{1}{2}+2x\right)^n$,(1) 若展开式中第五项、第六项、第七项的二项式系数成等差数列,求展开式中二项式系数最大的项的系数;(2) 若展开式中前三项的二项式系数之和等于79,求展开式中系数最大的项.

解 (1) 由题意得,$C_n^4+C_n^6=2C_n^5$,

即 $n^2-21n+98=0$

解得 $n=7$ 或 $n=14$

当 $n=7$ 时,展开式中二项式系数最大的项为第四项和第五项.

第四项的系数为 $C_7^3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\cdot 2^3=\dfrac{35}{2}$,

第五项的系数为 $C_7^4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\cdot 2^4=70$.

当 $n=14$ 时,展开式中二项式系数最大的项为第八项,

它的系数是 $C_{14}^{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{7}\cdot 2^{7}=3432$

(2) 由 $C_n^0+C_n^1+C_n^2=79$,得 $n^2+n-156=0$

解得 $n=12,n=-13$(舍去)

设第 $r+1$ 项的系数最大,则

$$\begin{cases}C_{12}^{r}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12-r}\cdot 2^{r}\geqslant C_{12}^{r+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{11-r}\cdot 2^{r+1}\\ C_{12}^{r}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12-r}\cdot 2^{r}\geqslant C_{12}^{r-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{13-r}\cdot 2^{r-1}\end{cases}$$

解得 $9.4\leqslant r\leqslant 10.4$,所以,$r=10$

因此,展开式中系数最大的项是第 11 项,为 $C_{12}^{10}\cdot(\frac{1}{2})^{2}\cdot 2^{10}x^{10}=16896x^{10}$

说明 求系数最大的项常用$\begin{cases}a_n\geqslant a_{n+1}\\ a_n\geqslant a_{n-1}\end{cases}$公式.

例 7 求关于 x 的不等式 $\lg(x-1)+\lg(3-x)<\lg(a-x)$ 的解集非空的条件.

解 原不等式等价于

$$\begin{cases}x-1>0\\ 3-x>0\\ a-x>0\\ (x-1)(3-x)<a-x\end{cases},即\begin{cases}1<x<3\\ a>x\\ a>x^2+5x-3\end{cases}$$

所以,$a>x_{\min}$(当 $1<x<3$)即 $a>1$,且 a 应大于函数 $f(x)=-x^2+5x-3(1<x<3)$ 的最小值.

易求得 $f(x)$ 在 $1<x<3$ 时的值域为 $\left(1,\frac{13}{4}\right]$.

所以,当 $a>1$ 时,原不等式的解集非空.

说明 $a>f(x)$ 有解$\Leftrightarrow a>f_{\min}(x)$;$a<f(x)$ 有解$\Leftrightarrow a<f_{max}(x)$

例 8 已知$\{a_n\}$是等比数列,且 $a_2>a_3=1$,求使不等式:$\left(a_1-\frac{1}{a_1}\right)+\left(a_2-\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(a_n-\frac{1}{a_n}\right)>0$ 成立的正整数 n 的最大值.

解 因为 $a_2q=a_3=1$(q 为此等比数列的公比)

即 $\frac{1}{q}>1$,所以 $0<q<1$

原不等式即为 $a_1+a_2+\cdots+a_n>\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$,

所以,$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}>\frac{\frac{1}{a_1}\left(1-\frac{1}{q^n}\right)}{1-\frac{1}{q}}$,可得

${a_1}^2q^{n-1}>1$

又 ${a_1}^2q^4={a_3}^2=1$,所以 ${a_1}^2=q^{-4}$

因此,$q^{n-5}>1$