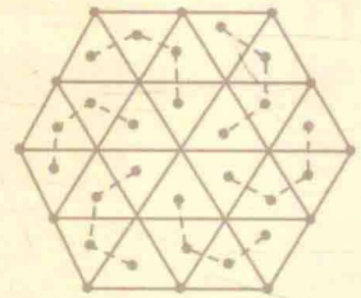
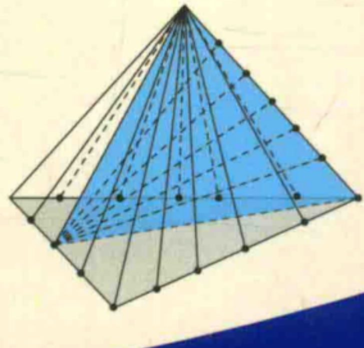
中学生数学思维方法丛书



研究特例

冯跃峰 著



中国科学技术大学出版社

中学生数学思维方法丛书

1 研究特例

冯跃峰 著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书介绍了数学思维方法的一种形式:研究特例.其中许多内容都是本书首次提出的.比如,寻找关键元素、寻找关键步骤、寻找关键子列、增设条件化归、命题分解化归、操作变换化归、状态通式、结构通式、模式通式等,这是本书的特点之一.本书首次用"研究特例"来代替"特殊化"的表述,旨在强调如何对特例进行研究、研究什么,以及研究过程对解决一般问题有何作用.书中选用了一些数学原创题,这些问题难度适中而又生动有趣,有些问题还是第一次公开发表,这是本书的另一特点.此外,书中对问题求解过程的剖析尚能给读者以思维方法的启迪:对每一个问题,并不是直接给出解答,而是详细分析如何发现其解法,这是本书的又一特点.

本书适合高等院校数学系师生、中学数学教师、中学生和数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

研究特例/冯跃峰著.—合肥:中国科学技术大学出版社,2015.11
(中学生数学思维方法丛书)
ISBN 978-7-312-03759-7

Ⅰ.研… Ⅱ.冯… Ⅲ.中学数学课—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 264897 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
http://press.ustc.edu.cn
http://shop109383220.taobao.com
印刷 安徽省瑞隆印务有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 880 mm×1230 mm 1/32
印张 14.875
字数 386 千
版次 2015 年 11 月第 1 版
印次 2015 年 11 月第 1 次印刷
定价 36.00 元

序

问题是数学的心脏，学数学离不开解题.我国著名数学家华罗庚教授曾说过：如果你读一本数学书，却不做书中的习题，那就犹如入宝山而空手归.因此，如何解题，也就成为了一个千古话题.

国外曾流传着这样一则有趣的故事，说的是当时数学在欧几里得的推动下，逐渐成为人们生活中的一个时髦话题(这与当今社会截然相反)，以至于托勒密一世也想赶这一时髦，学点数学.虽然托勒密一世见多识广，但在学数学上却很吃力.一天，他向欧几里得请教数学问题，听了半天，还是云里雾里不知所云，便忍不住向欧几里得要求道："你能不能把问题讲得简单点呢?"欧几里得笑着回答："很抱歉，数学无王者之路."欧几里得的意思是说，要想学好数学，就必须扎扎实实打好基础，没有捷径可走.后来人们常用这一故事讥讽那些凡事都想投机取巧之人.但从另一个角度想，托勒密一世的要求也未必过分，难道数学就只能是"神来之笔"，不能让其思路来得更自然一些吗?

记得我少年时期上学，每逢学期初发新书的那个时刻是最令我兴奋的，书一到手，总是迫不及待地看看书中有哪些新的内容，一方面是受好奇心的驱使，另一方面也是想测试一下自己，看能不能不用老师教也能读懂书中的内容.但每每都是失望而终：尽管书中介绍的知识都弄明白了，书中的例题也读懂了，但一做书中的练习题，却还

是不会.为此,我曾非常苦恼,却又万思不得其解.后来上了大学,更是对课堂中老师那些“神来之笔”惊叹不已,严密的逻辑推理常常令我折服.但我未能理解的是,为什么会想到这么做呢?

20世纪中叶,美国数学教育家G. Polya的数学名著《怎样解题》风靡全球,该书使我受益匪浅.这并不是说,我从书中学到了“怎样解题”,而是它引发了我对数学思维方法的思考.

实际上,数学解题是一项系统工程,有许许多多的因素影响着它的成败.本质的因素有知识、方法(指狭义的方法,即解决问题所使用的具体方法)、能力(指基本能力,即计算能力、推理能力、抽象能力、概括能力等)、经验等,由此构成解题基础;非本质的因素有兴趣、爱好、态度、习惯、情绪、意志、体质等,由此构成解题的主观状态;此外,还受时空、环境、工具的约束,这些构成了解题的客观条件.但是,具有扎实的解题基础,且有较好的客观条件,主观上也做了相应的努力,解题也不一定能获得成功.这是因为,数学中真正标准的、可以程序化的问题(像解一元二次方程)是很少的.解题中,要想把问题中的条件与结论沟通起来,光有雄厚的知识、灵活的方法和成功的解题经验是不够的.为了判断利用什么知识,选用什么方法,就必须对问题进行解剖、识别,对各种信息进行筛选、加工和组装,以创造利用知识、方法和经验的条件.这种复杂的、创造性的分析过程就是数学思维过程.这一过程能否顺利进行,取决于思维方法是否正确.因此,正确的思维方法亦是影响解题成败的重要因素之一.

经验不止一次地告诉我们:知识不足还可以补充,方法不够也可以积累,但若不善思考,即使再有知识和方法,不懂得如何运用它们解决问题,也是枉然.与此相反,掌握了正确的思维方法,知识就不再是孤立的,方法也不再是呆板的,它们都建立了有血有肉的联系,组成了生机勃勃的知识方法体系,数学思维活动也就充满了活力,得到了更完美的发挥与体现.

G. Polya 曾指出，解题的价值不是答案本身，而在于弄清"是怎样想到这个解法的"，"是什么促使你这样想、这样做的". 这实际上都属于数学思维方法的范畴. 所谓数学思维方法，就是在基本数学观念系统作用下进行思维活动的心理过程. 简单地说，数学思维方法就是找出已有的数学知识和新遇的数学问题之间联系的一种分析、探索方法. 在一般情况下，问题与知识的联系并非是显然的，即使有时能在问题中看到某些知识的"影子"，但毕竟不是知识的原形，或是披上了"外衣"，或是减少了条件，或是改变了结构，从而没有现成的知识、方法可用，这就是我在学生时代"为什么知识都明白了，例题也看懂了，还是不会做习题"的原因. 为了利用有关的知识和方法解题，就必须创造一定的"条件"，这种创造条件的认识、探索过程，就是数学思维方法作用的过程.

但是，在当前数学解题教学中，由于"高考"指挥棒的影响，教师往往只注重学生对知识方法掌握的熟练程度，不少教师片面地强调基本知识和解决问题的具体方法的重要性，忽视思维方法方面的训练，造成学生解决一般问题的困难. 为了克服这一困难，各种各样的、非本质的、庞杂零乱的具体解题技巧统统被视为规律，成为教师谆谆告诫的教学重点，学生解题也就试图通过记忆、模仿来补偿思维能力的不足，利用胡猜乱碰代替有根据、有目的的探索. 这不仅不能提高学生的解题能力，而且对于系统数学知识的学习，对于数学思维结构的健康发展都是不利的.

数学思维方法通常又表现为一种解题的思维模式. 例如，G. Polya就在《怎样解题》中列出了一张著名的解题表. 容许我们大胆断言，任何一种解题模式均不可能囊括人们在解题过程中表现出来的各种思维特征，诸如观察、识别、猜想、尝试、回忆、比较、直觉、顿悟、联想、类比、归纳、演绎、想象、反例、一般化、特殊化等. 这些思维特征充满解题过程中的各个环节，要想用一个模式来概括，那就像用

数以千计的思维元件来构造一个复杂而庞大的解题机器.这在理论上也许是可行的,但在实际应用中却很不方便,难以被人们接受.更何况数学问题形形色色,任何一个模式都未必能适用所有的数学问题.因此,究竟如何解题,其核心内容还是学会如何思考.有鉴于此,笔者想到写这样一套关于数学思维方法的丛书.

本丛书也不可能穷尽所有的数学思维方法,只是选用一些典型的思维方法为代表做些介绍.这些方法,或是作者原创发现,或是作者从一个全新的角度对其进行了较为深入的分析与阐述.

囿于水平,书中观点可能片面武断,错误难免,敬请读者不吝指正.

冯跃峰

2015 年 1 月

目　　录

1 寻找关键元素

“研究特例”，就是考察当前问题的一些特殊情形，由此发现规律，进而找到解决一般问题的途径.

一般地说，解决“特例”并不难，难的是如何将“特例”的处理方式迁移到一般问题中去.因此，对特例的处理，不仅仅是给出一个解答，而是要对“特例”进行“研究”.

如何研究？本章介绍研究特例的一种方式：寻找关键元素.

在探索解题的过程中，我们时常发现题目涉及的元素中，有些元素表现出来的特征或性质在解题中起着决定性的作用，我们把这一类元素称为关键元素.

关键元素可以是一个，也可以是多个；可以是某个确定的具体数，也可以是具有某种特征的一类元素.将关键元素迁移到一般问题中去，通过对其性质的研究，找到解题途径，是一种常用的思维方法.

1.1 寻找破坏有关性质的元素

数学解题中，我们常常要证明某些对象具有某种性质，此时，通过研究特例，发现哪些元素对相关性质具有最大的破坏力，由此找到一般问题中的关键元素，使问题迎刃而解.

例 1　给定正整数 $n(n\geqslant3)$，将若干个互异的正整数排在一个

圆周上，使任何相邻两数之积小于 n，问圆周上最多有多少个数.（原创题）

分析与解 设圆周上任何相邻两数之积小于 n 时，圆周上数的个数最大值为 $f(n)$.

先取 n 的一些特殊值来研究. 当 $n=3,4,5,6$ 时，易知

$$f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=2.$$

发现上述结论很容易，但如何证明 $f(n)=2(n\leqslant 6)$，且其证明方法能够迁移到一般情况才是关键.

由于 n 较小，最容易想到的证明方法是穷举法.

但值得指出的是："穷举法"往往难以迁移到一般情况，除非"穷举"中包含有"大类"（即包含绝大部分元素的类）. 如果"穷举"过程不包含"大类"，则须另找方法.

所以难点在于：对于简单情况不仅仅要给出一个证明，更重要的是要找到一个适应一般情况的证明.

对于本题，直接证明比较困难，可尝试反证法.

假设 $n\leqslant 6$ 时，圆周上至少有 3 个数.

这一假设含有不确定因素：圆周上数的个数究竟是多少并不确定，因而不好利用假设，为此，一般有两种处理办法：

方案 1：引入"容量"参数，设有 $t(t\geqslant 3)$ 个数；

方案 2：取极端，取出其中 3 个数 $a,b,c(a<b<c)$.

通常优先考虑方案 2，但对于本题，若采用"取出 3 个数"的方法，则其证明是不严格的：

不妨取出其中 3 个数 $a,b,c(a<b<c)$，则 $a\geqslant 1$，进而 $b\geqslant 2$，$c\geqslant 3$，于是 $bc\geqslant 2\times 3=6\geqslant n$，但 b,c 在圆周上相邻（3 个数中任何两个都相邻），矛盾.

这里，"b,c 在圆周上相邻"并非必然，因为当数的个数多于 3 时，b,c 之间还可以插入其他数，从而它们在圆周上可能不相邻！

严格的证明是引入"容量"参数，设圆周上有 t 个数（$t\geqslant 3$），按逆时针方向依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_t$，不妨设 a_1 最小，则 $a_1\geqslant 1$，于是 $a_2a_3\geqslant 2\cdot 3=6\geqslant n$，但 a_2,a_3 在圆周上相邻，矛盾.

显然，上述证明过程中的关键元素是 a_2,a_3，进一步发现，关键元素是除 a_1 外的其他所有元素：$a_2,a_3,\cdots,a_t$，因为这些元素中任何两个不能相邻.

如何将这些关键元素迁移到一般情况中去？

我们需要研究这些元素的特征，因为大多数情况下，具体数值是无法迁移的，只有"特征元素"才有可能迁移.

$a_2,a_3,\cdots,a_t$ 具有怎样的特征？

从数值特征上看，$a_2,a_3,\cdots,a_t\in A=\{x\in\mathbf{N}\mid x\geqslant 2\}$.

从位置（关系、结构）特征上看，$a_2,a_3,\cdots,a_t$ 在圆周上两两不相邻.

于是，令 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid x\geqslant 2\}$，则 A 中的元素都是"关键元素". 为叙述问题方便，我们称 A 中的数为"大数"，其他的数为"小数".

对一般情况，我们要找到相应的 A，使 A 中任何两个数在圆周上不能相邻（否则破坏题目目标所要求的性质），为此，我们要对"大数""小数"给出一个一般性的定义.

容易看出，如果一个数为大数，则比它大的数都是大数，我们只需定义谁是最小的大数即可. 假定 k 是最小的大数，则 $k,k+1$ 不能相邻，即 $k(k+1)\geqslant n$，由此可得到大数的定义.

定义　如果 $k(k+1)\geqslant n$，则称 k 为"大数"，否则称为"小数".

找到了关键元素，则容易得到相关的范围估计.

实际上，设圆周上共有 s 个小数，t 个大数，则圆周上的 t 个大数形成了 t 个"空"（相邻两个大数之间的位置），每个空中至少有一个小数，从而至少有 t 个小数，所以 $t\leqslant s$.

因此圆周上数的个数 $f=s+t\leqslant 2s$.

现在的问题是,对给定的 n,哪些数是大数? 哪些数是小数?

显然,如果一个数为小数,则比它小的数都是小数,我们只需找到谁是最大的小数即可.

假定 k 是最大的小数,则 $k(k+1)<n\leqslant(k+1)(k+2)$.

那么,对给定的正整数 n,能否找到 k,使 $k(k+1)<n\leqslant(k+1)(k+2)$? 答案是肯定的.

用数列 $a_k=k(k+1)(k\in\mathbf{N})$ 将所有自然数划分为若干组 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k,a_{k+1}]$,对题给的 n,由于 $a_k\to\infty$,所以 n 必定属于其中的一个组,即介于该数列的两个相邻数之间.

不妨设 $k(k+1)<n\leqslant(k+1)(k+2)$,则 $1,2,\cdots,k$ 都是小数,$k+1,k+2,\cdots$都是大数,于是,$s\leqslant t$,所以

$$f=s+t\leqslant 2s\leqslant 2k. \tag{①}$$

等号能否成立? 直接考虑一般情况,其构造存在困难,我们再考察一个特例.

取 $n=7$,此时小数只有 $1,2$,其余的都是大数,从而 $f(7)\leqslant 2\cdot 2=4$.

能否有 $f(7)=4$? 通过具体构造,发现圆周上排 4 个数是不行的.

实际上,假定圆周上有 4 个数,则只能是两个大数与两个小数.

设两个大数为 $a,b(a<b)$,则 $a\geqslant3,b\geqslant4$,现在要在 a,b 之间插入 2 个小数 1,2 来分隔 a,b,其中 1 可插入,但 2 无法插入,这是因为 2 与 a,b 中较大的那一个(b)的积

$$2b\geqslant 2\cdot 4=8>7=n,$$

矛盾.

所以 $f(7)\leqslant3$,又 3 个数显然是可能的,故 $f(7)=3$.

这个特例使我们发现,对一般的情形,不仅要考虑哪些数为"小数"(第 1 类关键元素),还要考虑最大的那个"小数"(第 2 类关键元

素)是否能与其相邻的数的积小于 n. 由于

$$k(k+1)<n\leqslant(k+1)(k+2),$$

可知 k 是最大的小数. 如果 $f=2k$, 则不等式①等号成立, 从而 $s=t=k$, 此时圆周上有 k 个大数、k 个小数, 且只能是"大数""小数"交替排列.

考察最大的那个"小数"k 所在的位置, 因为"小数"k 的两侧各有一个大数, 设为 a,b, 其中 $a<b$, 则

$$a\geqslant k+1,\quad b\geqslant k+2,$$

从而有

$$bk\geqslant k(k+2).$$

此时, 若 $k(k+2)\geqslant n$(一个新的分界点), 则因 b 与 k 相邻, 而

$$bk\geqslant k(k+2)\geqslant n,$$

与题意矛盾, 所以 $f\neq 2k$, 从而有

$$f\leqslant 2k-1.$$

因此, 上面的不等式①应细化为:

当 $k(k+1)<n\leqslant k(k+2)$ 时, $f\leqslant 2k-1$.

当 $k(k+2)<n\leqslant(k+1)(k+2)$ 时, $f\leqslant 2k$.

易知, 这两种情况都存在适当的排列使等式成立.

(1) 当 $k(k+1)<n\leqslant k(k+2)$ 时, 先将 $1,2,3,\cdots,k-1,k$ 按顺时针方向依次排在圆周上(图 1.1), 然后在形成的 k 个空中依次插入 $k-1$ 个数: $2k-1,2k-2,\cdots,k+1$(其中最大的大数 $2k-1$ 插入最小的小数 1,2 为边界的空, 最后一个空不插入数), 得到圆排列

$$1,2k-1,2,2k-2,3,\cdots,k-1,k+1,k.$$

此时相邻两数之积为

$$1\cdot k(<n),$$

或

$$f(i)=(2k-i)i\quad(1\leqslant i\leqslant k-1),$$

或

$$g(i)=(2k-i)(i+1)\quad(1\leqslant i\leqslant k-1).$$

因为

$$f(i)<g(i)=(2k-i)(i+1)=-i^2+(2k-1)i+2k,$$

而 $g(i)$ 的对称轴为 $i=\dfrac{2k-1}{2}$，最大的积

$$g(k)=g(k-1)=k(k+1)<n,$$

构造合乎要求，所以

$$f_{\max}=2k-1.$$

(2) 当 $k(k+2)<n\leqslant(k+1)(k+2)$ 时，先将 $1,2,3,\cdots,k-1,k$ 按顺时针方向依次排在圆周上（图 1.2），然后在形成的 k 个空中依次插入 k 个数：$2k,2k-1,2k-2,\cdots,k+1$（其中最大的大数 $2k$ 插入最小的小数 1,2 为边界的空），得到圆排列

$$1,2k,2,2k-1,3,2k-2,\cdots,k-1,k+2,k,k+1.$$

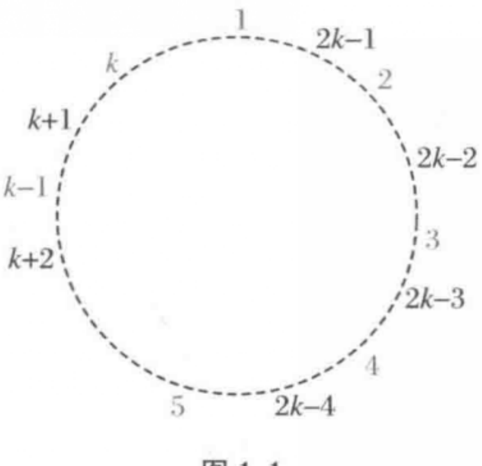


图 1.1

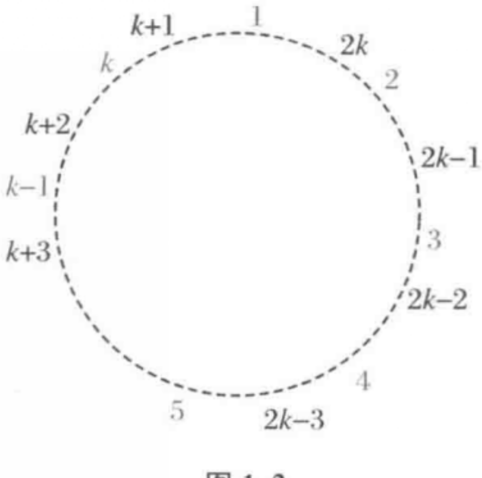


图 1.2

同上可证，此时最大的相邻两数之积为 $k(k+2)<n$，所以 $f_{\max}=2k$.

综上所述，当 $k(k+1)<n\leqslant k(k+2)$ 时，$f_{\max}=2k-1$；

当 $k(k+2)<n\leqslant(k+1)(k+2)$ 时，$f_{\max}=2k$.

例 2 将正整数 1,2,…,64 填入 8×8 的方格棋盘中，每个方格填一个数，使得对任何 $1\leqslant i\leqslant64$，i 和 $i+1$ 都填在两个相邻（具有公共边）的方格中，其中的数按模 64 理解．求棋盘对角线上 8 个方格中所填数的和的最大值．（2014 年美国哈佛-麻省理工数学竞赛试题）

分析与解 因为 8×8 的方格棋盘填数较多，我们先考虑简单情形．

考察 2×2 的棋盘，此时本质上只有唯一的填数方法．

当只有唯一合乎条件的构造时，通常需要引起我们的高度重视，因为这种构造往往都隐含着各种情形的构造的共性．

此时，棋盘对角线上的数为 1,3 或 2,4，你是否发现对角线上的数有何特点？——奇偶性相同．

这是一个简单但却非常重要的发现，因为它将给我们估计对角线上数的和的取值范围带来许多方便．

对于一般的棋盘，按题中规则填数，对角线上填数的奇偶性是否相同？回答是肯定的．

实际上，将棋盘的方格都染黑白 2 色之一，使相邻方格异色．因为 i 和 $i+1$ 的奇偶性不同，从而任何相邻格填的数奇偶性不同，同色方格中的数的奇偶性相同，所以对角线上填数的奇偶性相同．

这样，要使对角线上数的和最大，一种自然的想法是：能否将最大的那些偶（奇）数都填在对角线上．

对于 2×2 的棋盘，最大的 2 个偶数为 4,2，它们都可填在对角线上．

对于 3×3 的棋盘，不存在合乎题目规则的填数，这是因为，根据题目规则，1 与 $3^2=9$ 所在的格相邻，但 1 与 9 同奇偶，它们只能填入相同颜色的格中，矛盾．进一步发现，对任何奇数 n，都不存在合乎题目规则的 $n\times n$ 数表．

考察 4×4 的棋盘，此时最大的 4 个偶数为 16,14,12,10，但经过

实验，发现不论如何按题中规则填数，都不能将它们都填在对角线上.

现在我们要研究 4×4 棋盘中，为什么 16，14，12，10 不能都填在对角线上，由此找到关键元素，并将其迁移到 8×8 的棋盘中.

假设将 16，14，12，10 都填在 4×4 棋盘的对角线上(图 1.3)，下面依次考察 1，2，3，…的填入，不妨设 1 填在对角线下方，根据题目规则，1，2，3…要依次相邻，如果对角线上的数都比它们大，则它们都无法越过对角线(证明见后)，从而它们只能都填在对角线的同一侧.

显然，比对角线上的所有数都小的数是 1，2，…，9(关键元素)，这些数都只能填在对角线的下方，但对角线下方只有 6 个空格，所以这 9 个数不能全部填入，矛盾.

所以，最大的 4 个偶数 16，14，12，10 不能都填在 4×4 棋盘的对角线上.

考虑将对角线上填的数修改为 16，14，12，8(图 1.4)，则此时的关键元素(比对角线上的数都小的数)是 1，2，…，7，同理，它们只能都填在对角线的同一侧. 但对角线一侧只有 6 个空格，所以 1，2，…，7 这 7 个数不能全部填入，矛盾.

再将对角线上填的数修改为 16，14，12，6，则存在合乎要求的填法(图 1.5).

16			
	14		
		12	
			10

图 1.3

16			
	14		
		12	
			8

图 1.4

16	1	2	3
15	14	13	4
10	11	12	5
9	8	7	6

图 1.5

注意上述所谓“比对角线上的所有数都小”，它等价于比对角线上最小的数还小. 于是，上述过程可以简化，我们只需考察对角线上最小的数(另一种关键元素)，设为 a，则易知 $1,2,\cdots,a-1$ 都必须填