高等院校“十三五”规划教材

高等数学

同步辅导与练习(上)

杨德志 等 编

南開大學出版社
NANKAI UNIVERSITY PRESS

高等院校“十三五”规划教材

高等数学

同步辅导与练习(上)

主　编：杨德志　高俊勇
副主编：刘　念　车　畅　李雪峰　李　娜
刘萌萌　谭　畅　陈震霆

南開大學出版社
NANKAI UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导与练习(上) / 杨德志等编. -- 天津：南开大学出版社，2017.8
ISBN 978-7-310-05464-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 218720 号

南开大学出版社出版发行
出版人:刘立松
地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮编编码:300071
营销部电话:(022)23508339 23500755
营销部传真:(022)23508542 邮购部电话:(022)23502200
*
三河市海新印务有限公司印销
全国各地新华书店经销
*
2017 年 8 月第 1 版 2017 年 8 月第 1 次印刷
710×1000 毫米 16 开本 15 印张 324 千字
定价:38.80 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换。电话:(022)23507125

前　言

高等数学是一门重要的基础课. 鉴于这门课程逻辑性及解题技巧较强,特编写了本书. 本书是在结合由同济大学出版社出版、王帅主编的高等数学(上)的基础上编写而成的. 全书内容包括函数、极限与连续,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,共6章内容. 每章按节编排,每节分为知识要点、例题分析、习题、习题解答与提示4个部分,每章配备综合练习题基础篇和提高篇. 本书每部分内容构成特点如下:

1. 知识要点——此部分按知识要点集中归纳本节的重要概念、性质、结论、公式,阐述扼要,条理清晰.

2. 例题分析——此部分按照每节的内容知识点归纳出一些小专题,通过对典型例题的解题分析,归纳出高等数学中的一些问题的解题方法和解题技巧. 同时注重选题的广度与梯度,力求达到从一题到一类,从一类到一个系列的效果.

3. 习题——给出的练习题,既有掌握基础知识的训练,也有注重知识灵活性、综合性,力图在深度和广度上拓展读者知识面的训练. 每章还有两套基础题和提高题,可供读者自测.

4. 习题解答与提示——习题都具备详细的解答过程或提示,解答详细,提示精炼.

本书可作为理工科和经管类本科各专业学生的高等数学课程的辅导书、习题课参考书,同时也可用作参加硕士研究生入学考试的复习用书.

限于编者的学识及水平,疏漏与不足之处在所难免,恳请读者与同仁批评指正.

编者

2017年4月

目录

第1章 函数、极限与连续

1.1 集合与函数

1.1.1 知识要点

1. 集合

我们把具有某种特定性质的事物或对象的总体称为集合，组成集合的事物或对象称为该集合的元素.

2. 区间与邻域

区间分为有限区间和无限区间.

设 δ 为某个正数，称开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域，简称为点 x_0 的邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径，点 x_0 的邻域去掉中心 x_0 后，称为点 x_0 的去心邻域.

3. 函数

设 x,y 是两个变量，D 是给定的数集，如果对于每个 $x\in D$，通过对应法则 f，有唯一确定的 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$.

4. 反函数

在初等数学的函数定义中，若函数 $f: D\to f(D)$ 为单射，若存在逆映射 $f^{-1}: f(D)\to D$，则称此对应法则 f^{-1} 为 f 的反函数. 习惯上，$y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$， $x\in f(D)$.

5. 复合函数

设函数 $y=f(u)$，$u\in D_f$，函数 $u=g(x)$，$x\in D_g$，值域 $R_g\subseteq D_f$，则 $y=f[g(x)]$ 或 $y=(f\circ g)(x)$，$x\in D_g$ 称为由 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 复合而成的复合函数，其中 u 为中间变量.

6. 初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

1.1.2 例题分析

例 1.1.1 (1)求 $y=\sqrt{16-x^2}+\lg(\sin x)$ 的定义域.

(2)已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解 (1)由$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ \sin x>0,\end{cases}$得$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\ 2k\pi<x<(2k+1)\pi,(k=0,\pm 1,\cdots).\end{cases}$解得函数的定义域(图 1.1.1)为 $D=[-4,-\pi]\cup(0,\pi)$.

(2)由题设及复合函数的定义可得

$$f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x, 且\ \varphi(x)\geqslant 0,$$

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},$$

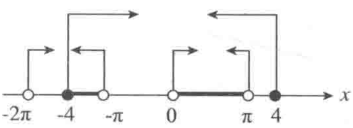

图 1.1.1

由表达式得

$$\begin{cases}\ln(1-x)\geqslant 0,\\ 1-x>0,\end{cases}$$

解得定义域为$(-\infty,0]$.

例 1.1.2 判断下列函数的奇偶性:

(1)$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; (2)$f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$;

(3)$F(x)=\varphi(x)\left(\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$,其中 $\varphi(x)$为奇函数,常数 $a>0,a\neq 1$.

解 (1)讨论 $f(-x)$与 $f(x)$的关系,

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x).$$

故 $f(x)$为奇函数.

此题也可用 $f(x)+f(-x)=0$ 判定.

(2)$f(-x)=\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=-f(x)$,故 $f(x)$为奇函数.

(3)因$\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$,由(2)知为奇函数,而 $\varphi(x)$也是奇函数,从而 $F(x)$为偶函数.

例 1.1.3 已知定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数 $f(x)$满足 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$,试证 $f(x)$为周期函数,且它的(最小正)周期为 2π.

证 $f(x+2\pi)=f(x+\pi)+\sin(x+\pi)=[f(x)+\sin x]+\sin(x+\pi)=f(x)$,故 $f(x)$为周期函数.下证 2π 为最小正周期,设有 $a\in(0,2\pi)$,使 $f(x+a)=f(x)$,则

$$f(\pi+a)=f(\pi)=f(\pi+0)=f(0)+\sin 0=f(0)=f(a).$$

再由原式得 $f(a+\pi)=f(a)+\sin a$,于是 $\sin a=0,a=\pi$,即 π 也是周期,$f(x+\pi)=f(x)$,再由原式 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$,得 $\sin x\equiv 0$,矛盾,故 $f(x)$以 2π 为最小正周期.

例 1.1.4 设 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$,求 $f(\cos x)$.

分析 先求函数 $f(u)$,再求 $f(\cos x)$.

解法 1 将 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)$的表达式用 $\sin\dfrac{x}{2}$表达.

$$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}=2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right).$$

令 $\sin\dfrac{x}{2}=u$，则

$$f(u)=2(1-u^2),$$

故

$$f(\cos x)=2(1-\cos^2 x)=2\sin^2 x.$$

解法 2 利用三角函数的性质，将 $\cos x$ 化为正弦函数的半角形式.

$$f(\cos x)=f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=f\left(\sin\frac{\pi-2x}{2}\right),$$

利用 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$，得

$$f(\cos x)=1+\cos(\pi-2x)=1-\cos 2x=2\sin^2 x.$$

例 1.1.5 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ $g(x)=\ln x$，求 $f[g(x)]$.

解
$$\begin{aligned}f[g(x)]=f[\ln x]&=\begin{cases}2\ln x, & 0\leqslant \ln x\leqslant 1,\\ \ln^2 x, & 1<\ln x\leqslant 2\end{cases}\\ &=\begin{cases}2\ln x, & x\in[1,\mathrm{e}]\cap(0,+\infty),\\ \ln^2 x, & x\in[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]\cap(0,+\infty)\end{cases}\\ &=\begin{cases}2\ln x, & x\in[1,\mathrm{e}],\\ \ln^2 x, & x\in[\mathrm{e},\mathrm{e}^2].\end{cases}\end{aligned}$$

例 1.1.6 求函数 $y=f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$ 的反函数.

分析 求反函数的步骤为

(1)由式 $y=f(x)$ 中解出 $x=\varphi(y)$；

(2)对换自变量与因变量的记号，即可得反函数 $y=\varphi(x)$.

解 由 $y=f(x)$，解得 $x=\begin{cases}y, & -\infty<y<1,\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 16.\\ \log_2 y, & 16<y<+\infty.\end{cases}$ 将式中的 x 与 y 对换，得 $y=f(x)$的反函数

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, & 16<x<+\infty.\end{cases}$$

例 1.1.7 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi=40°$（图 1.1.2）. 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 L $(L=AB+BC+CD)$与水深 h 之间的函数关系式，并说明定义域.

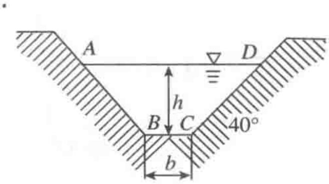

图 1.1.2

解 由题设知

$AB=CD=\frac{h}{\sin 40^\circ}$，$S_0=\frac{h}{2}(2BC+2h\cot 40^\circ)$，

解得

$$BC=\frac{S_0}{h}-h\cot 40^\circ,$$

故

$$L=AB+BC+CD=\frac{S_0}{h}+\frac{2h-h\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}.$$

由实际问题知，此函数的定义域由下列不等式组确定：

$$\begin{cases}AB>0,\\BC>0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}h>0,\\\frac{S_0}{h}-\cot 40^\circ\cdot h>0,\end{cases}$$

即为

$$0<h<\sqrt{S_0\tan 40^\circ}.$$

1.1.3 习题

1. 填空题

(1)用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合.

①$2<x\leqslant 6$ ________； ②$|x-5|\leqslant 1$ ________；

③$x<-4$ ________； ④$|x+2|\geqslant 3$ ________.

(2)设 $A=\{x|3<x<5\}$，$B=\{x|x>4\}$，则

$A\cup B=$ ________； $A\cap B=$ ________.

(3)用区间表示下列函数的定义域.

①$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$________； ②$y=\frac{1}{\ln(x-1)}$________；

③$y=\arcsin(2x-1)$________； ④$y=\arccos(3-2x)$________.

(4)设函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & -2\leqslant x<0,\\x^2, & 0\leqslant x<1,\\1 & x>1,\end{cases}$ 则①定义域为________；②$f\left(\frac{1}{2}\right)=$________；

③$f(-1)=$________；④$f(0)=$________；⑤$f(2)=$________.

(5)设 $f(x)=\frac{1}{\lg(4-x)}+\sqrt{36-x^2}$，则①$f(x)$的定义域为________，②$f[f(-6)]=$ ________.

(6)对于函数 $f(x)=x^2$，能使邻域 $U(0,\delta)$ 中任一 x 所对应的函数值 $f(x)$ 都在邻域 $U(0,2)$ 内的 δ 所满足的关系式为________.

(7)函数 $y=\tan x+\cos(5x+1)$ 的周期为________.

2. 选择题

(1)区间 $[a,+\infty)$ 表示的不等式是(   ).

A. $x>a$ B. $x\geqslant a$ C. $x<a$ D. $x\leqslant a$

(2)下列各组函数中,表示的不是同一函数的是(   ).

A. $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$, $g(x)=x$ B. $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt[3]{x^3}$

C. $f(x)=|x|$, $g(x)=\sqrt{x^2}$ D. $f(x)=\ln x^3$, $g(x)=3\ln x$

(3)设函数 $f(x)$ 是奇函数,当 $x>0$ 时,$f(x)$ 是增函数;则当 $x<0$ 时,$f(x)$(   ).

A. 是增函数 B. 可能是增函数,也可能是减函数

C. 是减函数 D. 既不是增函数,也不是减函数

(4)函数 $y=xe^{\cos x}$ 是(   )

A. 奇函数 B. 偶函数

C. 单调函数 D. 有界函数

(5)在下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相同的为(   ).

A. $f(x)=\ln x^2$, $g(x)=2\ln x$

B. $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$

C. $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$

D. $f(x)=\ln[x(x-1)]$, $g(x)=\ln x+\ln(x-1)$

3. 分析下列函数的结构.

(1) $y=e^{x^2}$; (2) $y=\sin\dfrac{2x}{1+x^2}$;

(3) $y=\tan\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; (4) $y=\ln(\cos e^x)$;

(5) $y=\arctan\left[\ln(2\sqrt{x}+1)\right]$；　　(6) $y=\sqrt{x^2+\sin^2 x}$.

4. 证明 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ 在 $(-\infty,-1)$ 及 $(-1,+\infty)$ 是单调增加函数.

5. 下列函数能否复合为函数 $y=f[g(x)]$？若能，试写出复合函数的表示式、定义域、值域.

(1) $y=f(u)=\sqrt{u}, u=g(x)=2x-x^2$；

(2) $y=f(u)=\ln u, u=g(x)=\cos x-2$；

(3) $y=f(u)=u^2+u^3, u=g(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ -1, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$

6. 设 $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}, \varphi(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

7. 已知一物体与地面的摩擦系数是 μ，重量是 P. 设有一与水平方向成 α 角的拉力 F，使物体从静止开始移动(图 1.1.3)，求物体开始移动时拉力 F 与角 α 之间的函数关系.

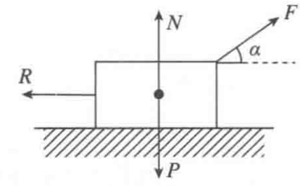

图 1.1.3

8. 判定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}$.

9. 设函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形与 $x=a$，$x=b$ 均对称($a<b$)，求证 $y=f(x)$ 是周期函数，并求其周期.

10. 当 a,b,c,d 满足什么条件时，函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq0)$ 与其反函数相同.

1.1.4 习题解答与提示

1. (1)①$(2,6]$；②$[4,6]$；③$(-\infty,-4)$；④$(-\infty,-5]\cup[1,+\infty)$.

(2)$(3,+\infty)$；$(4,5)$.

(3)①$(-1,1)$；②$(1,2)\cup(2,+\infty)$；③$[0,1]$；④$[1,2]$.

(4)①$[-2,1)\cup(1,+\infty)$;②$\frac{1}{4}$;③1;④0;⑤1.

(5)$[-6,3)\cup(3,4)$,$f[f(-6)]=f(1)=\frac{1}{\lg 3}+\sqrt{35}$.

(6)$\delta\leqslant\sqrt{2}$.

(7)2π.

2.(1)B; (2)A; (3)A; (4)A; (5)C.

3.(1)函数 $y=e^{x^2}$ 由基本初等函数 $y=e^u$ 与 $u=x^2$ 复合而成；

(2)函数 $y=\sin\frac{2x}{1+x^2}$ 由基本初等函数 $y=\sin u$ 与初等函数 $u=\frac{2x}{1+x^2}$ 复合而成；

(3)函数 $y=\tan\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 由基本初等函数 $y=\tan u$,$u=\frac{1}{\sqrt{t}}$ 与初等函数 $t=1+x^2$ 复合而成；

(4)函数 $y=\ln(\cos e^x)$ 由基本初等函数 $y=\ln u$,$u=\cos t$ 和 $t=e^x$ 复合而成；

(5)函数 $y=\arctan[\ln(2\sqrt{x}+1)]$ 由基本初等函数 $y=\arctan u$,$u=\ln t$ 与初等函数 $t=2\sqrt{x}+1$ 复合而成；

(6)函数 $y=\sqrt{x^2+\sin^2 x}$ 由基本初等函数 $y=\sqrt{u}$ 与初等函数 $u=x^2+\sin^2 x$ 复合而成.

4.略

5.(1)能,$f[g(x)]=\sqrt{2x-x^2}$,定义域为$[0,2]$,值域为$[0,1]$.

(2)不能.

(3)能,$f[g(x)]=\begin{cases}2, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\{0,2\}$.

6.$f[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

7.$F=\frac{\mu P}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$.

8.(1)偶函数； (2)奇函数.提示:验证 $f(x)+f(-x)=0$.

9.$T=2(b-a)$. 提示:由题设有 $f(a+x)=f(a-x)$,$f(b+x)=f(b-x)$,于是

$$\begin{aligned}f(x)&=f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)]=f[2a-x]=f[b+(2a-x-b)]\\&=f[b-(2a-x-b)]=f[x+2(b-a)],\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 以 $T=2(b-a)$ 为周期.

10.$a=-d$ 或 $\begin{cases}b=c=0,\\ a=d\neq 0.\end{cases}$ 提示:$y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数为 $y=\frac{b-dx}{cx-a}$.

由$\frac{b-dx}{cx-a}\equiv\frac{ax+b}{cx+d}$,得

$$(a+d)[cx^3+(d-a)x-b]\equiv 0,$$

故 $a=-d$ 或 $\begin{cases}b=c=0,\\ a=d\neq 0.\end{cases}$

1.2 极　限

1.2.1 知识要点

1. 数列的极限

设$\{a_n\}$是一数列，a 是一常数. 如果对任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

都成立，则称 a 是数列$\{a_n\}$的极限，或称数列$\{a_n\}$收敛于 a. 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a.$$

2. 数列极限的性质

(1)极限的唯一性；

(2)收敛数列的有界性；

(3)收敛数列的保号性；

(4)夹逼准则；

(5)单调有界准则；

(6)若一数列收敛于 a，则它的任一子列也收敛于 a.

3. 函数的极限

(1)函数在无穷远处的极限

设 $f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义，如果存在常数 A，对任意给定的正数 ε，总存在正数 X，使得当$|x|>X$ 时，不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

都成立，则称 A 是函数 $f(x)$在 $x\to\infty$时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A.$$

(2)函数在有限点处的极限

函数 $f(x)$在 x_0 的某个去心邻域内有定义. 对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，汉 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，函数 $f(x)$满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

称 A 为函数 $f(x)$在 $x\to x_0$ 时的极限. 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

4. 函数极限的性质

(1)唯一性；

(2)局部有界性；

(3)保号性；

(4)夹逼准则；

(5)归根原则.

5. 无穷大与无穷小

(1)无穷小

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小.

(2)无穷大

函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义. 对于任意给定的正数 M，总存在正数 δ，当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，函数值 $f(x)$ 满足不等式

$$|f(x)|>M,$$

则称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷大.

(3)无穷小的性质

①有限个无穷小的和(或积)仍为无穷小；

②有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小；

③无穷小(不取零值)的倒数为无穷大，无穷大的倒数为无穷小；

④若无穷小 $\alpha_1\sim\alpha_2$，$\beta_1\sim\beta_2$，且 $\lim\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}=\lim\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}$.

1.2.2 例题分析

例 1.2.1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{1}{2^n}$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，取 $x_n=\dfrac{1}{2^n}$，则 $n\to\infty$ 时 $x_n\to 0$，

$$\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=1.$$

例 1.2.2 证明极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在.

证 取 $x_n^{(1)}=2n\pi$，$x_n^{(2)}=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，则 $n\to\infty$ 时 $x_n^{(1)}\to+\infty$，$x_n^{(2)}\to+\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\sin x_n^{(1)}=\lim_{n\to\infty}\sin 2n\pi=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin x_n^{(2)}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin x_n^{(1)}\neq\lim_{n\to\infty}\sin x_n^{(2)},$$

故极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin x$ 不存在.

例 1.2.3 证明当 $x\to+\infty$ 时，$y=x\cos x$ 不是无穷大量.

证 取 $x_n^*=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，则 $n\to\infty$ 时 $x_n^*\to+\infty$，

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n^*)=\lim_{n\to\infty}x_n^*\cos x_n^*=\lim_{n\to\infty}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq\infty$.

例 1.2.4 证明函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

证 取 $x_n^*=2n\pi$，则 $n\to\infty$ 时 $x_n^*\to+\infty$，

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n^*)=\lim_{n\to\infty}x_n^*\cos x_n^*=\lim_{n\to\infty}2n\pi\cos 2n\pi=\lim_{n\to\infty}2n\pi=+\infty,$$

故 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 无界.

例 1.2.5 根据极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$； (2) $\lim\limits_{x\to3}x^2=9$.

(1)**证** 任意给定正数 ε，由于

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}\leqslant\frac{a^2}{2n^2},$$

欲使 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{a^2}{2n^2}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{a}{\sqrt{2\varepsilon}}$，

取 $N=\left[\dfrac{a}{\sqrt{2\varepsilon}}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1.$$

(2)**分析** 由于 $|x^2-9|=|x-3||x+3|$，当 $x\in(2,4)$ 时，即 $|x-3|<1$ 时，有 $|x+3|<7$，于是

$$|x^2-9|=|x-3||x+3|<7|x-3|.$$

证 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，欲使 $|x^2-9|<\varepsilon$，只要 $7|x-3|<\varepsilon$，即 $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{7}$.

可取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{7}\right\}$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，有 $|x^2-9|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to3}x^2=9$.

例 1.2.6 利用单调有界准则证明下列极限存在，并求极限值：

(1) $x_1=\sqrt{2},x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$；

(2) $x_1=\dfrac{1}{2},x_{n+1}=\dfrac{1+x_n^2}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$.

解 (1)先证 x_n 有上界.

$x_1=\sqrt{2}\leqslant2$，设 $x_n\leqslant2$，则

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\leqslant\sqrt{2+2}=2,$$

故数列 x_n 有上界.

再证 x_n 单调增加.

$$x_1=\sqrt{2}\leqslant x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

设 $x_k\leqslant x_{k+1}$，则 $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}\leqslant\sqrt{2+x_{k+1}}=x_{k+2}$，即数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

由单调有界数列必有极限的准则知 $\{x_n\}$ 的极限存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由 $x_n^2=2+x_{n-1}$，有

$$\lim_{n\to\infty}x_n^2=\lim_{n\to\infty}(2+x_{n-1}),$$

即 $A^2=2+A$. 解之得 $A=-1,A=2$. 由于 $x_n\geqslant x_1=\sqrt{2}$，从而 $A=2$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

(2)因 $1+x_n^2\geqslant2x_n$，所以，$x_{n+1}=\dfrac{1+x_n^2}{2}\geqslant x_n$，即 x_n 单调增加. 再证 x_n 有界. 易知