普通高等教育“十三五”规划教材

国家特色专业建设点建设项目

数学分析立体化教材／刘名生　冯伟贞 主编

数学分析（三）

（第二版）

耿堤　易法槐　丁时进　刘名生　编

二维码新形态教材

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

国家特色专业建设点建设项目

数学分析立体化教材/刘名生　冯伟贞　主编

数学分析(三)

(第二版)

耿　堤　易法槐　丁时进　刘名生　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书介绍了数学分析的基本概念、基本理论和方法，包括一元（多元）函数极限理论、一元函数微积分学、级数理论和多元函数微积分学等. 全书分三册，本册内容包括多元函数及其微分学、多元函数微分法的应用、含参变量积分、重积分、曲线积分和曲面积分及各种积分之间的关系. 书中列举了大量例题来说明数学分析的定义、定理及方法，并提供了丰富的思考题和习题，便于教师教学与学生自学. 每章末都有小结，对该章的主要内容作了归纳和总结，并配有复习题，方便学生系统复习.书中还配有一些概念、定理和方法的视频讲解，内容呈现方式更加生动直观.

本书可作为高等师范院校数学系各专业学生的教材，也可供相关专业的教师和科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 三/耿堤等编. —2 版. —北京：科学出版社, 2019.4

普通高等教育“十三五”规划教材・数学分析立体化教材

ISBN 978-7-03-061051-5

I. 数… II. ①耿… III. ①数学分析-高等学校-教材 IV. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 071971 号

责任编辑：王胡权／责任校对：王晓茜
责任印制：师艳茹／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

石家庄继文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2019 年 4 月第 二 版 印张：17 3/4
2019 年 4 月第九次印刷 字数：355 000

定价：42.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《数学分析立体化教材》序言

《数学分析立体化教材》通过提供多种教学资源给出数学分析课程的整体教学解决方案. 本立体化教材包括二维码新形态主教材三册:《数学分析 (一)》(第二版)、《数学分析 (二)》(第二版)、《数学分析 (三)》(第二版), 学习辅导书三册:《数学分析学习辅导 I —— 收敛与发散》《数学分析学习辅导 II —— 微分与积分》《数学分析学习辅导 III —— 习题选解》; 另外, 本立体化教材还配有数学分析精品资源共享课一门.

三册主教材的编写考虑不同教学基础的学校和不同层次的学生在教学方面的不同需求, 在较充分顾及系统的完整性的基础上, 特别标记了选学内容. 教师对教材中的选学内容可以作灵活取舍, 以及适当调整相关内容的讲授或阅读次序. 我们希望这种编排能更好地帮助教师落实分类、分层教学, 同时使学生获得合理的阅读指引. 主教材的编写力求在可读性、系统性和逻辑性上各具特色, 并将分层教学的理念贯穿全书. 主教材的建设, 在数字化资源配套方面做了一定的工作, 内容的呈现更加丰富、饱满, 呈现方式更加生动、直观. 我们对书中的许多概念、定理和方法配有小视频, 使在书中无法写出来的一些内容通过小视频提供给读者, 从而使得教材能更好地支持学生的自主学习.

在数学分析学习过程中, 学生往往因为欠缺学习自主意识或基础能力薄弱, 难以驾驭一个较大数学知识体系的学习, 造成自我知识体系零碎、割裂, 这是数学分析教学中存在的主要问题及教学难点.《数学分析学习辅导 I —— 收敛与发散》《数学分析学习辅导 II —— 微分与积分》两册辅导书的编写均立足类比, 希望教学双方在求同存异思想的指引下, 打通知识点的关联, 在反复对比中深化对基本数学思想方法的理解及强化对问题解决技巧的掌握, 从而突破教学障碍. 我们力求在可读性和系统性上能够编出特色.《数学分析学习辅导 I —— 收敛与发散》主要解决数学分析中的收敛与发散及相关的一些问题, 包括点列的收敛与发散、函数极限的存在性、$\mathbb{R}^n$ 的完备性、反常积分的收敛与发散、数项级数的收敛与发散、函数项级数的收敛与一致收敛以及函数的展开与级数的求和.《数学分析学习辅导 II —— 微分与积分》主要研究数学分析中的微分与积分及相关的一些问题, 包括一元函数微分学、一元函数微分法的应用、一元函数积分学、多元函数及其微分学、多元函数微

分法的应用、重积分、曲线积分和曲面积分以及各种积分之间的关系.

《数学分析学习辅导III—— 习题选解》对三册主教材中的大约一半的习题和复习题提供详细解答, 并在书末附录中提供了 2013~2017 年华南师范大学的数学分析考研真题, 希望对使用本教材的教师和学生有所帮助.

数学分析精品资源共享课由课程简介、课程学习、图形与课件、测试题库、方法论、拓展阅读及学习论坛和教学录像等模块构成. 在课程简介中提供了数学分析课程的教学日历、教学大纲和学习方法指引等课程资料，在课程学习中提供了数学分析 (一)、数学分析 (二) 和数学分析 (三) 等课程的完整课件，在测试题库中提供了华南师范大学数学科学学院 2004~2014 级本科生的数学分析期末考试题，在教学录像中提供了 5 位教师多次数学分析课的教学录像，为教学双方提供了丰富的教学资源. 我们希望这门精品资源共享课能成为实施数学分析混合学习的理想平台.

本立体化教材的编写得到“数学与应用数学国家特色专业”建设项目、“数学与应用数学广东省高等学校重点专业”建设项目及“数学与应用数学国家专业综合改革建设项目”的资助, 第一版在华南师范大学数学科学学院的 2008~2016 级及本科生综合班中使用, 也被多所兄弟院校作为数学系学生的数学分析课程的教材.

借此机会衷心感谢华南师范大学数学科学学院领导和科学出版社领导对本立体化教材编写的大力支持. 对编辑们付出的辛勤劳动, 在此表示诚挚的谢意. 希望广大读者批评指正, 以使本立体化教材得到进一步完善, 为数学分析课程建设和一流人才培养作出更大的贡献.

刘名生　冯伟贞

2018 年 1 月

华南师范大学

第二版说明

承蒙兄弟院校的厚爱，数学分析立体化教材中的《数学分析（三）》自 2010 年出版以来，已经被全国近十所高等院校选为教材使用，并被全国两百余所高等院校的图书馆作为教学参考资料使用，这是对本教材的肯定，让我们倍感鼓舞. 为了帮助教师们在教学过程中提高效率和增强大学生的学习兴趣，根据 9 年来我们在华南师范大学的教学体会与学生反馈，这次再版我们对本教材在信息技术与教学融合方面做了大胆的尝试，通过二维码技术及移动互联网技术，将纸质教材与包括重难点讲解、相关知识点讲解等的数字化资源进行深度融合，极大地丰富了教材的内容，方便了师生们的教学. 关于具体内容，这次再版主要作了如下修改：

1. 配置了 20 个二维码小视频，读者通过扫描教材中相应位置的二维码，便可直接看到教材编者对书中一些主要概念、定理和重要知识点的讲解.
2. 在 13.4 节，给出了二元函数可微的一个充要条件，即推论 13.4.1.
3. 在 14.5 节，改进了辐角 θ 的表达式.
4. 在 16.5 节，将例 2 及其解题过程换为例 1 的解法 2.
5. 在 17.4 节，对第二型曲面积分的记号作了一些补充说明.
6. 作了一些文字上的修改，改正了一些印刷错误.

由于不同院校的教学计划课时数可能存在差异，教师在使用本教材时，可以根据具体情况对内容进行取舍或重组，教学时数可控制在 94~112 学时范围内，详细参见使用说明.

限于编者水平，书中不足与疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

2019 年 1 月

华南师范大学

第一版前言

数学分析是数学各专业的学科基础课, 其重要性不言而喻. 我们根据多年的教学经验, 在吸取一些现有教材优点的基础上编写了本书.

现有的各种数学分析教材都有其优点和缺点. 本书力求在可读性、系统性和逻辑性上能具有特色, 并将分层教学的理念贯穿全书.

首先, 在可读性方面, 对于重要概念只给一种定义形式，其他的等价定义一般放在思考题或习题中. 例如, 对数列极限, 本书只引入了 ε-N 定义, 目的是希望学生能吃透这个概念; 数列极限的另一个等价定义放在习题中, 方便基础较好的学生学习. 对定理的证明, 尽量采用朴素的方法进行. 对书中的例题, 表达尽量详细, 让学生容易自学. 对某些定理采取先用后证的方法讲述. 例如, 在第 7 章, 先给出区间上的连续函数必定存在原函数这个结论, 这样就可以介绍求不定积分的各种方法; 在第 8 章, 先给出闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数必定在 $[a,b]$ 上可积这个结论, 这样可以使定积分的计算提前, 然后在第 8 章后面再证明这两个存在性定理.

其次, 在系统性方面, 将关系较密切的内容放在一起. 例如, 将发散数列和子列的概念放在同一节, 将判别数列收敛的各种方法放在同一节, 将定积分的应用与反常积分放在同一章, 将各种情况下的 Fourier 级数和 Fourier 级数展开放在同一节, 将第一型曲线积分、曲面积分和第二型曲线积分、曲面积分放在同一章, 将各种积分之间的关系放在同一章等. 另外, 有理函数分解为部分分式的理论, 国内的数学分析教材几乎都将其证明归到高等代数课程中, 而高等代数教材也不写这部分内容. 为了弥补这一缺陷, 在本书的第 7 章中, 将给出有理函数分解为部分分式理论的详细证明, 方便教师教学与学生自学.

再次, 在逻辑性方面, 考虑到可读性的同时, 尽量在给出定理的同时也完成对定理的证明. 例如, 将致密性定理放在第 1 章, 这样数列的柯西收敛准则在第 1 章就可以证明, 使得第 1 章对数列有较完整的处理; 然后在第 3 章就可以完成闭区间上连续函数性质的证明; 第 6 章就只需讲区间套定理、有限覆盖定理及其应用等, 这样难点也分散了. 在导数与微分部分, 先讲微分, 后讲导数, 强调微分的作用, 这样在后面讲定积分的微元法时, 我们将给出微元法的理论依据.

考虑到不同教学基础的学校和不同层次的学生在教与学方面有不同的需求, 我

们在较充分顾及系统的完整性的基础上, 通过小 5 号字和“*”标记本书中的选学内容. 对选学内容的处理可以很灵活, 如第 1 章中致密性定理内容可以留到第 6 章处理或只作简要介绍.

本书分三册出版.《数学分析 (一)》讲述一元函数极限理论和一元函数微分学, 它的内容包括: 数列极限与确界原理、函数的概念及其性质、函数极限与连续性、函数的导数与微分、微分中值定理及其应用、函数的极值和凸性及作图、实数集的稠密性与完备性.《数学分析 (二)》讲述一元函数积分学和级数理论, 它的内容包括: 不定积分和定积分、定积分的应用与反常积分、数项级数、函数项级数、幂级数和 Fourier 级数.《数学分析 (三)》讲述多元函数极限论和多元函数微积分学, 它的内容包括: 多元函数极限与连续性、多元函数微分学、隐函数理论、多元函数积分学.

《数学分析 (一)》的初稿由刘名生教授、冯伟贞副教授和韩彦昌副教授编写,《数学分析 (二)》的初稿由徐志庭教授、刘名生教授和冯伟贞副教授编写,《数学分析 (三)》的初稿由耿堤教授、易法槐教授和丁时进教授编写. 初稿完成后, 编写组全体成员多次仔细讨论、评阅和修改. 全书由刘名生教授和冯伟贞副教授负责编写组织工作.

中山大学林伟教授和福州大学朱玉灿教授审阅了本书并提出许多宝贵意见, 陈奇斌老师绘制了本册书的所有插图, 在此对他们表示衷心感谢.

本书在编写过程中得到华南师范大学数学科学学院许多同事的支持, 并得到广东省名牌专业建设专项经费、国家特色专业建设点专项经费及 2008 年度华南师范大学校级教改项目的资助. 我们在华南师范大学数学科学学院 08 级师范班的数学分析课程中试用了本书, 08 级师范班的学生为本书的完善提供了许多宝贵意见, 在此一并致谢.

作为新教材, 书中的疏漏和不足在所难免, 敬请读者批评指正.

编　者

2009 年 6 月华南师范大学

使用说明

1. 本书应用分层教学的思想编写, 较难内容使用小字或用“*”号标注, 教师可根据不同层次的班级选讲部分小字或标“*”号的内容.

2. 讲授本册书的建议最少教学学时是 94 学时; 最多教学学时是 112 学时. 具体地说, 第 13 章: 24~26 学时; 第 14 章: 20~24 学时; 第 15 章: 12~16 学时; 第 16 章: 20~22 学时; 第 17 章: 10~12 学时; 第 18 章: 8~12 学时.

3. 习题分三级配置:

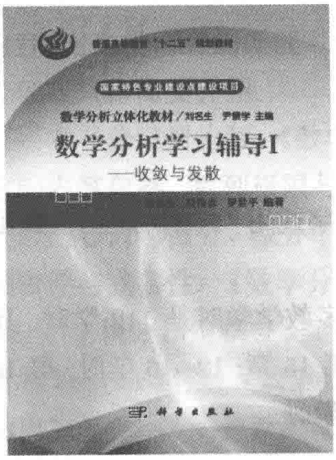
第一级为思考题, 每节都有, 目的是让学生通过自己做思考题理解所学的概念、定理及方法;

第二级为作业题, 即每节后面的习题, 供老师布置作业用, 要求学生全部完成;

第三级为扩展题, 放在每章后面的复习题中, 中间用一条横线分为两部分, 横线上的题供学生复习使用, 横线下的题较难, 供学有余力的学生进一步复习使用.

4. 每章末配有小结, 总结该章所学的知识点、概念和方法等, 方便学生复习.

配套学习辅导推荐

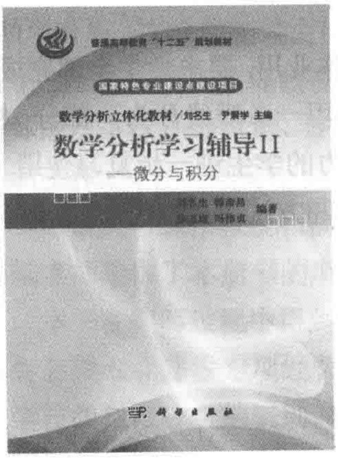


书名：数学分析学习辅导 I ——收敛与发散

作者：刘名生，冯伟贞，罗世平

书号：978-7-03-036797-6

科学出版社电子商务平台购买链接：

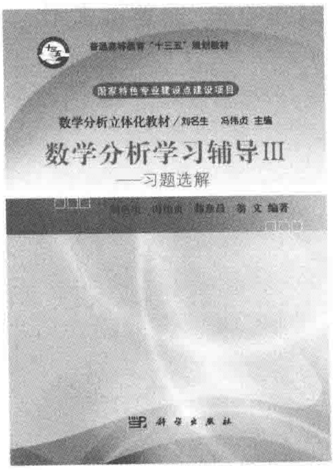


书名：数学分析学习辅导 II ——微分与积分

作者：刘名生，韩彦昌，徐志庭，冯伟贞

书号：978-7-03-038230-6

科学出版社电子商务平台购买链接：



书名：数学分析学习辅导 III——习题选解

作者：刘名生，冯伟贞，韩彦昌，翁文

书号：978-7-03-057240-0

科学出版社电子商务平台购买链接：

目　录

第 13 章　多元函数及其微分学

13.1　平面中的点集

从一维的数轴到 $n(n \geqslant 2)$ 维空间的过渡有许多本质上新的性质, 这些性质在二维与二维以上的空间之间并没有本质的不同. 因此, 以二维空间为例来讨论问题, 不仅具有典型性, 而且就形式而言, 也是最简单的.

13.1.1　二维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^2$

全体有序实数对 (x,y) 所组成的集合记为 $\mathbb{R}^2$, 即 $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}\}$. 从解析几何可以知道, 当在平面上确定了一个坐标系以后, 所有有序实数对 (x,y) 与平面上的点 $P(x,y)$ 之间可以建立起一个一一对应. 为方便起见, 以后将"有序实数对 (x,y)"与"平面上的点 $P(x,y)$"视为是等同的, 这种确定了坐标系的平面称为**坐标平面**. 坐标平面 (或简称为平面) 中的点 $P(x,y)$ 确定的向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的**向径**, 其中 $O(0,0)$ 为坐标原点, 记为 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = (x,y)$. 点 P 与其向径 $\overrightarrow{OP}$ 构成一一对应. 可以定义向量的加法和数乘: 对于 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ 和 $c \in \mathbb{R}$, 对应的向径为 $\boldsymbol{r}_1 = (x_1,y_1)$, $\boldsymbol{r}_2 = (x_2,y_2)$, 定义

$$\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad c\boldsymbol{r} = (cx, cy).$$

由高等代数的知识可以知道, 在向量的数乘和加法运算意义下, $\mathbb{R}^2$ 是一个二维的**线性空间**或**向量空间**. 在这个向量空间中, 还可以定义向量的**内积**(或称为**数量积**)如下:

$$\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := x_1x_2 + y_1y_2.$$

定义了内积的向量空间 $\mathbb{R}^2$ 也称为**二维 Euclid 空间**, 简称为**欧氏空间**. 内积具有如下性质:

(1) 对称性: $\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_1$;

(2) 线性性质: $(a\boldsymbol{r}_1 + b\boldsymbol{r}_2) \cdot \boldsymbol{r} = a\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r} + b\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r} \quad (a,b \in \mathbb{R})$;

(3) 正定性: $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} \geqslant 0$, 进而 $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} = (0,0)$.

利用向量的内积可以定义向量 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = (x,y)$ 的**长度**为 $\|\boldsymbol{r}\| := \sqrt{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}} = \sqrt{x^2 + y^2}$, 也记其为 $\|P\|$. 这样, 平面 $\mathbb{R}^2$ 中的任意两点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$ 之

间的**距离**就是向量 $\boldsymbol{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ 与向量 $\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{OP_2}$ 的差向量 $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ 的长度, 记作 $\|P_1 - P_2\|$, 即

$$\|P_1 - P_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

内积满足如下的 Cauchy-Schwarz 不等式 (Hölder 不等式 $p = q = 2$ 的情形):

$$|\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2| = |x_1x_2 + y_1y_2| \leqslant \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \|\boldsymbol{r}_1\| \cdot \|\boldsymbol{r}_2\|.$$

由此易得向量的三角不等式如下:

$$\|\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2\| \leqslant \|\boldsymbol{r}_1\| + \|\boldsymbol{r}_2\|.$$

进而可得距离的**三角不等式**, 即对于 $\mathbb{R}^2$ 上的任意三点 P_1, P_2 和 P_3, 成立

$$\|P_1 - P_2\| \leqslant \|P_1 - P_3\| + \|P_3 - P_2\|.$$

这个不等式具有明确的几何意义: 平面上以不共线的三点 P_1, P_2 和 P_3 为顶点的三角形的一边长不超过另外两边边长之和.

类似地, 可以定义**三维 Euclid 空间** $\mathbb{R}^3$ 乃至 n **维 Euclid 空间** $\mathbb{R}^n$.

13.1.2　平面中的点集

坐标平面上满足某种条件 $\mathcal{P}$ 的点的集合, 当然等价地, 也可以视为 $\mathbb{R}^2$ 的子集, 常常称为平面 $\mathbb{R}^2$ 中的点集, 可记为

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) \text{ 满足条件} \mathcal{P}\}.$$

可以从 $\mathbb{R}$ 中的两个集合 A 和 B 出发, 通过作笛卡儿积 $A \times B$ 来构造 $\mathbb{R}^2$ 中的点集

$$A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in A, y \in B\}.$$

例如, 分别以 x 轴上的闭区间 $[a, b]$ 和 y 轴上的闭区间 $[c, d]$ 为边所形成的笛卡儿积是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个闭矩形, 记为 $[a, b] \times [c, d]$, 即

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}.$$

同理, $(a, b) \times (c, d) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a < x < b, c < y < d\}$. 类似地, $\{x_0\} \times (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ 表示过点 (x_0, y_0) 且平行于 y 轴的直线上的一段开区间; 而点集 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中以整数为横坐标, 有理数为纵坐标的点的全体构成的集合.

若在 x 轴和 y 轴上用以构成笛卡儿积的两个集合完全相同, 如都是 A, 则不妨记为 $A^2 := A \times A$. 例如, $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $[0, 1]^2 := [0, 1] \times [0, 1]$ 等.

$\mathbb{R}^2$ 中的点集并非总能通过笛卡儿积来构造. 例如, 开圆盘和闭圆盘就是这类集合. 以一个固定的点 $P_0(x_0, y_0)$ 为心, 以正数 $r > 0$ 为半径的**开圆盘**、**闭圆盘**分别是以下的点集:

$$B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\},$$
$$\bar{B}_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant r^2\},$$

也可分别记为

$$B_r(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \|P - P_0\| < r\}, \quad \bar{B}_r(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^2 | \|P - P_0\| \leqslant r\}.$$

开圆盘 $B_\delta(x_0, y_0)$ 可以称为点 $P_0(x_0, y_0)$ 的 δ **圆邻域**, 由此可以称 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ 为点 $P_0(x_0, y_0)$ 的 δ **方邻域**. 当然, 这两种邻域显然是实轴上邻域 (以某点为中心的对称区间) 的自然推广.

不难看出, 以 P_0 为中心的任意一个圆邻域可以包含在以 P_0 为中心的某一个方邻域中, 反之亦然 (图 13.1). 因此, 如果不强调这两种邻域的形状, 则可以用记号 $U(P_0; \delta)$ 来泛指它们; 进而, 如果还不强调 δ, 则甚至可以将这样的邻域简记为 $U(P_0)$. 今后, 当说"点 P_0 附近的点"或"P_0 周围的点", 或"在点 P_0 的某个邻域中"时, 均是指在某个 $U(P_0)$ 中的那些点.

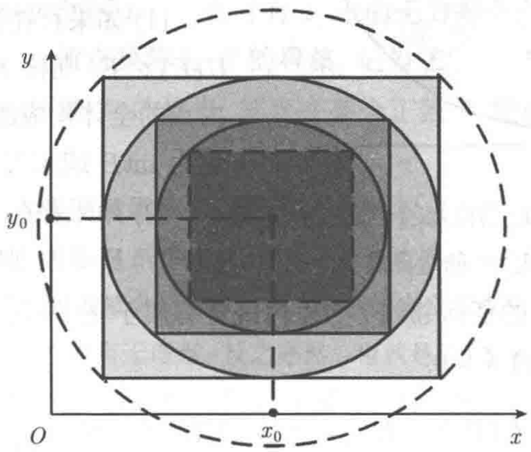


图 13.1 圆邻域和方邻域

如果讨论这样的邻域时不希望涉及邻域的中心点 P_0, 则要引入如下的**去心邻域**:

$$U^\circ(P_0; \delta) = B_\delta(P_0) \setminus \{P_0\} \quad 或 \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \setminus \{(x_0, y_0)\},$$

或简记为 $U^\circ(P_0)$.