北京高等教育精品教材
BEIJING GAODENG JIAOYU JINGPIN JIAOCAI

张量分析

第3版

TENSOR ANALYSIS (Third Edition)

黄克智 薛明德 陆明万 编著

清华大学出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com



北京高等教育精品教材

BEIJING GAODENG JIAOYU JINGPIN JIAOCAI

张量分析

第3版

TENSOR ANALYSIS (Third Edition)

黄克智 薛明德 陆明万 编著

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是一本系统阐述张量分析的专著，又是易于教学的教材。全书共分 6 章。内容包括：矢量与张量的基本概念与代数运算，二阶张量，张量函数及其导数，曲线坐标张量分析，曲面上的张量分析以及张量场函数对参数的导数。各章附有例题与习题，书后附有习题答案。

本书可作为力学及有关专业本科生、研究生的教材，以及有关专业教师、科研及工程技术人员的参考书。

本书是 2003 年版《张量分析》的修订版，内容有较多的更新与修改，反映了多年来作者教学科研积累的新成果。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售。
版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989　13701121933

图书在版编目(CIP)数据

张量分析/黄克智，薛明德，陆明万编著. —3 版. —北京：清华大学出版社，2020.1(2020.7 重印)
ISBN 978-7-302-52157-0

Ⅰ. ①张…　Ⅱ. ①黄… ②薛… ③陆…　Ⅲ. ①张量分析　Ⅳ. ①O183.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 013862 号

责任编辑：佟丽霞
封面设计：何凤霞
责任校对：刘玉霞
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市君旺印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：20.25　　**字　　数**：489 千字
版　　次：1986 年 1 月第 1 版　　2020 年 1 月第 3 版　　**印　　次**：2020 年 7 月第2次印刷
定　　价：55.00 元

产品编号：071792-01

第3版序

本书自2003年第2版发行以来，已历经十多次重印，这期间张量分析得到了更加广泛的应用，而力学与传热学、电磁学、微纳米材料科学等其他学科互相联系时，张量分析成为重要的数学工具。为了适应这些新的发展，作者对第2版做了以下的修订与补充：

(1) 对原书的理论叙述进行了修订，使之更加严谨。

(2) 全书共计68个实例，其中18个应用实例为第3版所新增加的(含3个放入习题中的例子)，其学科面不仅包含了固体力学、流体力学，还涉及了电磁学、传热学和微纳米力学。特别在第5章中增加了5.6节“曲面理论的一个应用实例”，由清华大学吴坚博士根据他由连续介质力学导出石墨烯与碳纳米管的本构关系的研究成果，撰写了这一节。

(3) 为便于读者自学，在书后增加了全部习题的解答，某些证明题还附有两种不同的证明方法，以帮助读者深入理解。

作者期望通过修订，使本书具备既有数学理论的严谨性，又有联系张量的力学、物理概念这一特色，并且还有利于各相关领域的读者自学。

第 2 版序

本书自从 1986 年第 1 版发行以来，很快告罄。有些兄弟院校只好用胶印版满足教学急需。台北亚东书局在 1992 年发行了繁体字版本。现作者集近二十年来在清华大学讲授本课程及“非线性连续介质力学”“固体本构关系”等相关课程的教学实践经验，对第 1 版做了以下改进与补充：

(1) 将原书第 1、2 两章合并为第 1 章“矢量与张量”。将原书第 3 章“二阶张量”改为第 2 章。原书第 4、5 两章合并为第 3 章“张量函数及其导数”。第 7、8 两章合并为第 4 章“曲线坐标张量分析”。这些章的部分内容进行了删节、增补与改进。新增第 5 章“曲面上的张量分析”。将原书第 9 章改为第 6 章“张量场函数对参数 t 的导数”。

(2) 全书增加了较多的应用实例与习题，原书第 5 章“力学中的常用张量”不再作为单独的一章，其内容分别列入有关章节作为例子。

(3) 在第 2 章“二阶张量”中增加了“正则与退化的二阶张量”一节，增加了关于任意二阶张量独立不变量个数的讨论。

(4) 在第 4 章“曲线坐标张量分析”中增加 Bianchi 恒等式的内容，增加正交曲线坐标系中单位矢量求导公式及其相关内容。

(5) 新增第 5 章“曲面上的张量分析”中包含了曲面微分几何的基本知识，曲面的基本方程，曲面上张量场函数的导数以及等距曲面等内容。

(6) 第 6 章“张量场函数对参数 t 的导数”补充了连续介质力学的许多基本概念，把本章内容与连续介质力学的基本概念联系起来，还新增了“张量场函数在域上积分的导数”的内容。

需要全本请访问 www.ertongbook.com

第 1 版引言

自从爱因斯坦 1915 年发表广义相对论的著名论文以来，张量分析在理论物理中占有突出重要的地位。以后，张量分析在物理学发展中起了重要作用。同时，反过来，来自物理学(相对论，场论)的概念也促进了张量分析的发展。

近二十多年来连续介质力学的发展又重复着同一个历史。今天，不熟悉张量分析的人阅读连续介质力学的文献是很困难的，有时甚至是不可能的。张量分析与微分几何学一些分支已经渗透到连续介质力学中来。正如 W. Flügge 所说，有了张量分析，连续介质力学就如鱼得水。

本书主要是为学习连续介质力学等做必要的准备，因此主要限于三维欧氏空间的讨论。在写作本书过程中主要参考书见参考书目。

本书曾用作 1981—1983 年清华大学研究生教材。虽曾数易其稿，但可能仍有错误，欢迎读者指正。姚振汉与顾璆琳同志曾参与第一稿的部分章节整理，在此对姚振汉同志表示感谢，对顾璆琳同志表示悼念。

目　录

第 1 章　矢量与张量 …… 1

1.1　矢量及其代数运算公式 …… 1

1.1.1　矢量 …… 1

1.1.2　点积 …… 2

1.1.3　叉积 …… 2

1.1.4　混合积 …… 3

1.2　斜角直线坐标系的基矢量与矢量分量 …… 5

1.2.1　平面内的斜角直线坐标系 …… 5

1.2.2　三维空间中的斜角直线坐标系 …… 7

1.2.2.1　斜角直线坐标系 …… 7

1.2.2.2　协变基矢量 …… 7

1.2.2.3　逆变基矢量 …… 8

1.2.2.4　由协变基矢量求逆变基矢量 …… 8

1.2.2.5　指标升降关系 …… 9

1.3　曲线坐标系 …… 10

1.3.1　曲线坐标系的定义 …… 10

1.3.2　空间点的局部基矢量 …… 11

1.3.3　正交曲线坐标系与 Lamé 常数 …… 12

1.4　坐标转换 …… 13

1.4.1　基矢量的转换关系 …… 13

1.4.2　协变与逆变转换系数 …… 14

1.4.3　矢量分量的坐标转换关系 …… 14

1.4.4　度量张量分量的坐标转换关系 …… 15

1.5　并矢与并矢式 …… 15

1.5.1　并矢 …… 15

1.5.2　缩并 …… 17

1.5.3　并矢的点积与双点积 …… 17

1.5.4　并矢的相等 …… 18

1.6　张量的基本概念 …… 18

1.6.1　矢量的分量表示法与实体表示法 …… 18

1.6.2　张量的定义与两种表示法 …… 20

1.6.2.1　张量的分量表示法 …… 21

1.6.2.2　张量的实体表示法(并矢表示法) …… 22

1.6.3 度量张量 …… 23
1.7 张量的代数运算 …… 24
1.7.1 张量的相等 …… 24
1.7.2 张量的相加 …… 24
1.7.3 标量与张量相乘 …… 25
1.7.4 张量与张量并乘 …… 25
1.7.5 张量的缩并 …… 25
1.7.6 张量的点积 …… 26
1.7.7 转置张量 …… 27
1.7.8 张量的对称化与反对称化 …… 27
1.7.9 张量的商法则 …… 28
1.8 张量的矢积 …… 32
1.8.1 置换符号与行列式的展开式 …… 32
1.8.2 置换张量(Eddington张量)与$\epsilon\sim\delta$等式 …… 33
1.8.3 矢积 …… 36
1.8.3.1 两个矢量的矢积 …… 36
1.8.3.2 三个矢量的混合积 …… 37
1.8.3.3 三个矢量的三重积 …… 38
1.8.3.4 张量的矢积 …… 38
习题 …… 39

第2章 二阶张量 …… 45
2.1 二阶张量的矩阵 …… 45
2.1.1 二阶张量的四种分量所对应的矩阵 …… 45
2.1.2 二阶张量的转置,对称、反对称张量及其所对应的矩阵 …… 46
2.1.3 二阶张量的行列式 …… 47
2.1.4 二阶张量的代数运算与矩阵的代数运算 …… 47
2.2 正则与退化的二阶张量 …… 49
2.2.1 关于映射的几个定理 …… 49
2.2.2 正则与退化 …… 49
2.3 二阶张量的不变量 …… 50
2.3.1 张量的标量不变量 …… 50
2.3.2 二阶张量的三个主不变量 …… 51
2.3.3 二阶张量的矩 …… 51
2.4 二阶张量的标准形 …… 52
2.4.1 实对称二阶张量的标准形 …… 52
2.4.1.1 基本概念 …… 52
2.4.1.2 对称二阶张量的特征方程 …… 53
2.4.1.3 实对称二阶张量的特征根必为实根 …… 54

2.4.1.4 实对称二阶张量主方向的正交性 …… 54
2.4.1.5 实对称二阶张量所对应的线性变换 …… 54
2.4.1.6 主分量是当坐标转换时 $\boldsymbol{N}$ 的混合分量对角元素之驻值 … 54
2.4.1.7 对称二阶张量标准形的应用 …… 55
2.4.2 非对称二阶张量的标准形 …… 56
2.4.2.1 特征方程无重根的情况 …… 56
2.4.2.2 特征方程有重根的情况 …… 58
2.5 几种特殊的二阶张量 …… 63
2.5.1 零二阶张量 $\boldsymbol{O}$ …… 63
2.5.2 度量张量 $\boldsymbol{G}$ …… 63
2.5.3 二阶张量的幂 …… 64
2.5.3.1 二阶张量的正整数次幂 …… 64
2.5.3.2 二阶张量的零次幂 …… 64
2.5.3.3 二阶张量的负整数次幂 …… 64
2.5.4 正张量、非负张量及其方根、对数 …… 64
2.5.5 二阶张量的值 …… 66
2.5.6 反对称二阶张量 …… 66
2.5.6.1 定义 …… 66
2.5.6.2 反对称二阶张量的主不变量 …… 66
2.5.6.3 反对称二阶张量的标准形 …… 66
2.5.6.4 反对称二阶张量的反偶矢量 …… 67
2.5.6.5 反对称二阶张量 $\boldsymbol{\Omega}$ 所对应的线性变换 …… 68
2.5.7 正交张量 …… 68
2.5.7.1 定义 …… 68
2.5.7.2 正交变换的“保内积”性质 …… 69
2.5.7.3 正交张量的并矢表达式 …… 69
2.5.7.4 正交张量的标准形 …… 69
2.6 二阶张量的分解 …… 71
2.6.1 二阶张量的加法分解 …… 71
2.6.1.1 球形张量与偏斜张量 …… 72
2.6.1.2 利用偏斜张量求对称二阶张量的主分量与主方向 …… 73
2.6.1.3 二阶张量标量不变量的进一步分析 …… 75
2.6.2 二阶张量的乘法分解(极分解) …… 78
2.7 正交相似张量 …… 79
习题 …… 80

第 3 章 张量函数及其导数 …… 83
3.1 张量函数、各向同性张量函数的定义和例 …… 83
3.1.1 什么是张量函数 …… 83
3.1.2 张量函数举例 …… 84

3.1.3 各向同性张量函数 …… 85
3.2 矢量的标量函数 …… 87
3.3 二阶张量的标量函数 …… 89
3.4 二阶张量的二阶张量函数 …… 91
3.4.1 二阶张量的解析函数 …… 91
3.4.2 Hamilton-Cayley 等式 …… 92
3.4.3 同时化为对角型标准形的函数 …… 94
3.4.4 对称张量的对称张量函数 …… 96
3.5 张量函数导数的定义,链规则 …… 101
3.5.1 有限微分、导数与微分 …… 101
3.5.2 张量函数导数的链规则 …… 105
3.5.3 两个张量函数乘积的导数 …… 106
3.6 矢量的函数之导数 …… 107
3.6.1 矢量的标量函数 …… 107
3.6.2 矢量的矢量函数 …… 108
3.6.3 矢量的二阶张量函数 …… 109
3.6.4 张量函数的梯度、散度和旋度 …… 109
3.6.4.1 张量函数的梯度 …… 110
3.6.4.2 张量函数的散度 …… 110
3.6.4.3 张量函数的旋度 …… 111
3.7 二阶张量的函数之导数 …… 111
3.7.1 二阶张量的标量函数之导数 …… 111
3.7.2 二阶张量的不变量的导数 …… 113
3.7.3 二阶张量的张量函数之导数 …… 114
习题 …… 116

第4章 曲线坐标张量分析 …… 120
4.1 基矢量的导数、Christoffel 符号 …… 120
4.1.1 协变基矢量的导数及第二类 Christoffel 符号 …… 121
4.1.2 第一类 Christoffel 符号 …… 122
4.1.3 逆变基矢量的导数 …… 123
4.1.4 $\sqrt{g}$对坐标的导数,Γ_{ji}^{j}的计算公式 …… 124
4.1.5 坐标转换时 Christoffel 符号的转换公式 …… 124
4.2 张量场函数对矢径的导数、梯度 …… 124
4.2.1 有限微分、导数与微分 …… 125
4.2.2 梯度 …… 126
4.3 张量分量对坐标的协变导数 …… 127
4.3.1 矢量场函数的分量对坐标的协变导数 …… 128
4.3.2 张量场函数的分量对坐标的协变导数 …… 131
4.3.3 协变导数的一些性质 …… 132
4.4 张量场函数的散度与旋度 …… 135

4.5 积分定理 …… 137
4.5.1 预备知识 …… 137
4.5.2 Green 变换公式 …… 138
4.5.3 Stokes 变换公式 …… 141
4.6 Riemann-Christoffel 张量(曲率张量) …… 144
4.6.1 Euclidean 空间与 Riemann 空间 …… 144
4.6.2 Euclidean 空间应满足的条件 …… 146
4.6.3 证明 $R^{p}_{\cdot rsq}$ 是张量分量 …… 148
4.6.4 Riemann-Christoffel 张量的性质 …… 149
4.6.5 关于张量分量二阶协变导数的 Ricci 公式、Bianchi 恒等式 …… 151
4.7 张量方程的曲线坐标分量表示方法 …… 153
4.8 非完整系与物理分量 …… 154
4.8.1 非完整系 …… 154
4.8.2 物理分量 …… 157
4.8.2.1 非完整系基矢量的选择 …… 157
4.8.2.2 矢量的物理分量 …… 157
4.8.2.3 二阶张量的物理分量 …… 158
4.9 正交曲线坐标系中的物理分量 …… 159
4.9.1 正交标准化基、度量张量与物理分量 …… 159
4.9.2 基矢量对坐标的导数 …… 160
4.9.3 正交系中张量表达式的物理分量形式 …… 161
习题 …… 163

第 5 章 曲面上的张量分析 …… 169
5.1 曲面的基本知识 …… 169
5.1.1 曲面的参数方程与 Gauss 坐标 …… 169
5.1.2 曲面的基本矢量 …… 170
5.1.3 曲面的第一基本张量 …… 171
5.1.4 曲面的第二基本张量 …… 172
5.1.5 曲面上曲线的曲率,曲面的法截面曲率、主曲率、平均曲率与 Gauss 曲率 …… 173
5.1.5.1 曲面上曲线的曲率、Frenet 公式 …… 173
5.1.5.2 曲面的法截面曲率 …… 175
5.1.5.3 曲面的主曲率、平均曲率、Gauss 曲率 …… 176
5.1.6 曲率线、主坐标、渐近线 …… 178
5.1.7 旋转张量 …… 183
5.1.8 非完整系与物理分量 …… 184
5.2 曲面上基本矢量的求导公式 …… 185
5.2.1 法向矢量对坐标的导数(Weingarten 公式) …… 185
5.2.2 基矢量对坐标的导数(Gauss 求导公式),曲面上的 Christoffel 符号 …… 186

需要全本请访问 www.ertongbook.com

5.2.3 第一基本张量分量的导数与协变导数 …… 187
5.2.4 单位矢量的求导公式 …… 188
5.3 曲面的基本方程,Riemann-Christoffel 张量 …… 189
5.3.1 Codazzi 方程与 Gauss 方程 …… 189
5.3.2 Riemann-Christoffel 张量 …… 190
5.3.3 可展曲面与不可展曲面 …… 192
5.3.4 Gauss 方程的其他形式 …… 192
5.3.5 以物理分量表达的 Codazzi 方程与 Gauss 方程 …… 193
5.4 曲面上场函数的导数 …… 194
5.4.1 曲面上的标量场函数 …… 194
5.4.2 曲面上的矢量场函数 …… 195
5.4.2.1 曲面上矢量场函数的微分与梯度 …… 195
5.4.2.2 曲面上矢量场函数的梯度之分量表达式 …… 196
5.4.2.3 曲面上矢量场函数的散度与旋度 …… 198
5.4.3 曲面上的切面张量场函数 …… 198
5.5 等距曲面(平行曲面) …… 200
5.5.1 等距曲面的基矢量 …… 200
5.5.2 等距曲面的第一基本形 …… 201
5.5.3 参考曲面的第三基本形 …… 202
5.5.4 等距曲面上面元的面积 …… 204
5.5.5 等距曲面的第二基本形 …… 204
5.5.6 主坐标系中等距曲面的几何参数 …… 205
5.6 曲面理论的一个应用实例 …… 206
5.6.1 碳纳米曲面的描述 …… 207
5.6.2 碳纳米曲面变形的描述 …… 209
5.6.3 碳纳米曲面的本构关系 …… 212
5.6.4 石墨烯片刚度 …… 212
5.6.5 石墨烯卷曲成单壁碳纳米管 …… 214
习题 …… 218

第6章 张量场函数对参数的导数 …… 220
6.1 质点运动 …… 220
6.1.1 质点的运动速度 …… 220
6.1.2 任意矢量对参数的导数 …… 221
6.1.3 举例 …… 223
6.2 Euler 坐标与 Lagrange 坐标 …… 226
6.2.1 Euler 坐标 …… 226
6.2.2 Lagrange 坐标 …… 227

6.2.3 两种坐标系的转换关系 …… 229
6.2.4 质点速度和物质导数 …… 229
6.3 基矢量的物质导数 …… 230
6.3.1 Lagrange 基矢量的物质导数 …… 230
6.3.2 度量张量的物质导数、应变率张量 …… 232
6.3.3 速度场的加法分解 …… 233
6.3.4 Euler 基矢量的物质导数 …… 235
6.4 矢量场函数的导数 …… 235
6.4.1 Lagrange 坐标系中矢量场函数的物质导数 …… 235
6.4.2 Euler 坐标系中矢量场函数的物质导数、全导数 …… 237
6.4.3 坐标转换关系 …… 240
6.4.4 矢量场函数的相对导数 …… 240
6.4.5 各种导数间的关系 …… 244
6.5 张量场函数的导数 …… 244
6.5.1 任意阶张量函数的物质导数 …… 244
6.5.2 二阶张量场函数及其相对导数 …… 249
6.6 连续介质变形与运动的初步知识 …… 253
6.6.1 变形梯度张量,线元、面元与体元的变换 …… 253
6.6.2 线元、面元与体元的物质导数 …… 255
6.6.3 变形梯度张量的极分解 …… 257
6.6.4 Green 应变张量 …… 257
6.6.5 应力张量 …… 259
6.6.6 应力率 …… 260
6.6.7 弹性本构关系 …… 261
6.6.8 举例 …… 262
6.6.9 张量场函数在域上积分的导数 …… 264
6.6.9.1 张量场函数在物质体积域上的质量积分 …… 264
6.6.9.2 张量场函数在物质体积域上的体积积分 …… 265
6.6.9.3 张量通过物质开曲面的通量 …… 267
6.6.9.4 张量沿物质封闭曲线的环量 …… 269
6.6.9.5 张量场函数在非物质域上积分的导数 …… 270
习题 …… **272**

习题答案 …… 274

参考文献 …… 306

第 1 章　矢量与张量

1.1　矢量及其代数运算公式

1.1.1　矢量

在三维 Euclidean 空间中，矢量是具有大小与方向且满足一定规则的实体，用黑体字母表示，例如 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 等。它们所对应矢量的大小（称为模、值）分别用 $|\boldsymbol{u}|$，$|\boldsymbol{v}|$，$|\boldsymbol{w}|$ 表示。称模为零的矢量为零矢量，用 $\boldsymbol{0}$ 表示。称与矢量 $\boldsymbol{u}$ 模相等而方向相反的矢量为 $\boldsymbol{u}$ 的负矢量，用 $-\boldsymbol{u}$ 表示。矢量满足以下规则：

（1）相等：两个矢量具有相同的模和方向，则称这两个矢量相等。即，一个矢量做平行于其自身的移动则这个矢量不变。

（2）矢量和：按照平行四边形法则定义矢量和，同一空间中两个矢量之和仍是该空间的矢量。如图 1.1 所示。

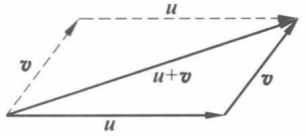

图 1.1　矢量和的平行四边形法则

矢量和满足以下规则：

交换律：
$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} \tag{1.1.1}$$

结合律：
$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+w=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+w) \tag{1.1.2}$$

由矢量和与负矢量还可以定义矢量差：
$$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{v}) \tag{1.1.3}$$

并且有
$$\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0} \tag{1.1.4}$$

（3）数乘矢量：设 a，b 等为实数，矢量 $\boldsymbol{u}$ 乘实数 a 仍是同一空间的矢量，记作 $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{u}$。其含义是：$\boldsymbol{v}$ 是与 $\boldsymbol{u}$ 共线且模为 $\boldsymbol{u}$ 的 a 倍，当 a 为正值时 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 同向，a 为负值时 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 反向，a 为零时 $\boldsymbol{v}$ 为零矢量。数乘矢量满足以下规则：

分配律：
$$(a+b)\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{u} \tag{1.1.5a}$$
$$a(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{u}+a\boldsymbol{v} \tag{1.1.5b}$$

结合律：
$$a(b\boldsymbol{u})=ab\boldsymbol{u} \tag{1.1.6}$$

由矢量关于求和与数乘两种运算的封闭性可知，属于同一空间的矢量组 $\boldsymbol{u}_i(i=1,2,\cdots,I)$ 的线性组合 $\sum_{i=1}^{I} a_i\boldsymbol{u}_i$ 仍为该空间的矢量，此处 a_i 是实数。**矢量组 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_I$ 线性相关**是指存在一组不全为零的实数 $a_1,a_2,\cdots,a_I$，使得
$$\sum_{i=1}^{I} a_i\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{0}$$

线性无关：若有矢量组 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_J$，当且仅当 $a_j=0(j=1,2,\cdots,J)$ 时，才有 $\sum_{j=1}^{J} a_j\boldsymbol{u}_j=\boldsymbol{0}$，则称这组 J 个矢量是**线性无关**的。

维数：一个矢量空间所包含的最大线性无关矢量的数目称为该矢量空间的**维数**。显然，三维空间最多有3个线性无关的矢量，平面最多有2个线性无关的矢量。在 n 维空间中，可以根据解决物理问题的需要选择 n 个线性无关的基矢量，而任一矢量可用 n 个基矢量的线性组合来表示。

在三维空间的笛卡儿坐标系 x,y,z 中，选择一组正交标准化基 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，分别为沿 x,y,z 轴的单位矢量。任一矢量 $\boldsymbol{v}$ 可以表示为这组正交标准化基的线性组合：

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1.1.7}$$

许多物理量都是矢量，满足前述定义和式(1.1.1)～(1.1.6)的规则。例如速度、加速度、力、电矩、磁感应强度等。

1.1.2 点积

定义两个矢量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的点积(也称为内积)

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{v}|\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{v}) \tag{1.1.8}$$

式中 $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{v})$ 表示 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角，如图1.2所示。

如果 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{v}$ 方向的单位矢量分别为 $\boldsymbol{e}_f$ 和 $\boldsymbol{e}_v$，则由(1.1.8)式知，$\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 上的投影是 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_v$，而 $\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{F}$ 上的投影是 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_f$，所以

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{v}|(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_v)=|\boldsymbol{F}|(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_f)$$

由(1.1.8)式与基矢量的正交性可知

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=F_xv_x+F_yv_y+F_zv_z \tag{1.1.9}$$

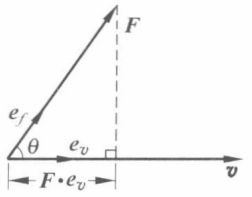

图1.2 两个矢量的点积

例如，当 $\boldsymbol{F}$ 表示力，$\boldsymbol{v}$ 表示位移(速度)时，$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$ 表示功(功率)。

两个矢量的点积服从以下规则：

交换律 $$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} \tag{1.1.10}$$

分配律 $$\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \tag{1.1.11}$$

正定性 $$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\geqslant 0 \tag{1.1.12}$$

且 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$

Schwartz 不等式 $$|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|\leqslant|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \tag{1.1.13}$$

1.1.3 叉积

两个矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的叉积(也称为矢积，外积)是垂直于 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 构成的平面的另一个矢量。定义

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}&=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\u_x&u_y&u_z\\v_x&v_y&v_z\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.1.14}$$

$\boldsymbol{w}$ 为垂直于 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 所在平面的矢量，其方向符合右手规则，如图 1.3 所示。

叉积的模为

$$|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \tag{1.1.15}$$

式中 $\sin(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\geqslant 0$。交换叉积的顺序，则叉积反号

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u} \tag{1.1.16}$$

叉积也满足分配律

$$\boldsymbol{F}\times(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{v} \tag{1.1.17}$$

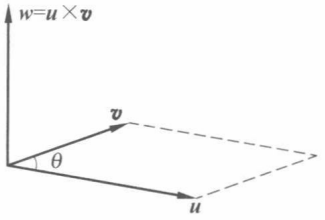

图 1.3　两个矢量的叉积

叉积的几何意义是：其模等于以两个矢量为边构成的平行四边形的面积，其方向垂直于该平行四边形所在平面（见图 1.3）。

三个矢量的二重叉积满足以下恒等式

$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times w)=(\boldsymbol{u}\cdot w)\,\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})w \tag{1.1.18}$$

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times w=(\boldsymbol{u}\cdot w)\,\boldsymbol{v}-(w\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}$$

由式(1.1.18)可证叉积不满足结合律

$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times w)\neq(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times w$$

例 1.1　电磁学中的洛伦兹力(Lorentz force)定律　叉积在物理学中的例子是：电荷量为 q（单位：库仑，C）的点电荷（正电荷）以速度 $\boldsymbol{v}$（m/s）在磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$（定义其正方向自北极指向南极，单位：斯特拉，T=1N·s/(C·m)）的磁场中运动，所受到的磁力称为洛伦兹力 $\boldsymbol{F}$（N），满足以下规律：

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

洛仑兹力的方向按右手规则垂直于速度矢量和磁感应强度矢量所构成的平面。

1.1.4　混合积

定义三个矢量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},w$ 的混合积是

$$[\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}\quad w]=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot w=\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times w)$$

$$=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_x & v_x & w_x\\ u_y & v_y & w_y\\ u_z & v_z & w_z\end{vmatrix} \tag{1.1.19}$$

若更换三个矢量在混合积中的次序，应满足

$$[\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}\quad w]=[\boldsymbol{v}\quad w\quad\boldsymbol{u}]=[w\quad\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}]$$

$$=-[\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{u}\quad w]=-[\boldsymbol{u}\quad w\quad\boldsymbol{v}]=-[w\quad\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{u}] \tag{1.1.20}$$

可以证明，混合积的几何意义是以 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},w$ 为三个棱边所围成的平行六面体的体积。(1.1.19)式与(1.1.20)式还决定了当 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},w$ 构成右手系时，该平行六面体的体积为正号。

利用(1.1.9)式与(1.1.19)式还可以证明，由三个矢量的两两点积所构成的行列式等于三个矢量所构成的体积的平方。即

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}\cdot w\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{v}\cdot w\\ w\cdot\boldsymbol{u} & w\cdot\boldsymbol{v} & w\cdot w\end{vmatrix}=[\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}\quad w]^2 \tag{1.1.21}$$

用同样方法可以证明

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}' \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}' \\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}' \end{vmatrix} = [\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w}][\boldsymbol{u}' \quad \boldsymbol{v}' \quad \boldsymbol{w}'] \tag{1.1.22}$$

式中 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}'$ 都是任意矢量。

利用(1.1.18)式和(1.1.20)式可证明:

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}) = [\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w}]^2 \tag{1.1.23}$$

证明 $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) = [(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}]\boldsymbol{v} - [(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v}]\boldsymbol{w} = [(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}]\boldsymbol{v}$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}) &= [(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}]\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}) \\ &= [\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w}][\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w} \quad \boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w}]^2\end{aligned}$$

利用(1.1.19)式第一行混合积中符号"×"与"·"可以对换的性质,还可证明

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \tag{1.1.24}$$

另一证明见 1.44 题。

例 1.2 利用矢量方法求证平面几何中的余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

证明 用矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示三角形的三条边 BC,CA,BA;A,B,C 表示三角形的三个顶角,如图 1.4 所示。则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c} &= \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \\ c^2 &= \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \\ &= a^2+b^2+2ab\cos(\pi-C) \\ &= a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}$$

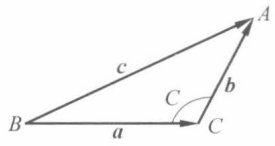

图 1.4 平面几何中的余弦定理

例 1.3 求证球面三角形中的余弦定理:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$$

式中 α,β,γ 分别为大圆弧$\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{CA},\overset{\frown}{AB}$所对应的圆心角,$A$ 为大圆弧$\overset{\frown}{BA}$与$\overset{\frown}{CA}$所在平面的夹角,如图 1.5 所示。

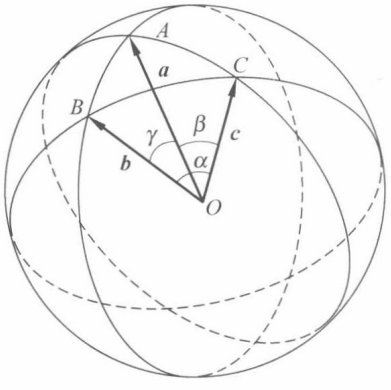

图 1.5 球面三角形中的余弦定理

证明 设球心 O 至半径为 1 的球面上 3 点 A,B,C 的矢径为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$;$\cos\alpha = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,$\cos\beta = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,$\cos\gamma = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,过 AC 大圆所在平面的法向单位矢量为$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})/\sin\beta$,过 AB 大圆所在平面的法向单位矢量为$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})/\sin\gamma$,它们之间的夹角等于 A 角。故

$$\cos A = \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin\gamma}\cdot\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}}{\sin\beta}$$

因而

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) = \sin\gamma\sin\beta\cos A$$

又

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})] = \boldsymbol{a}\cdot[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}] \\ &= (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}) = \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma\end{aligned}$$

故

$$\sin\beta\sin\gamma\cos A = \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma$$

即

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com