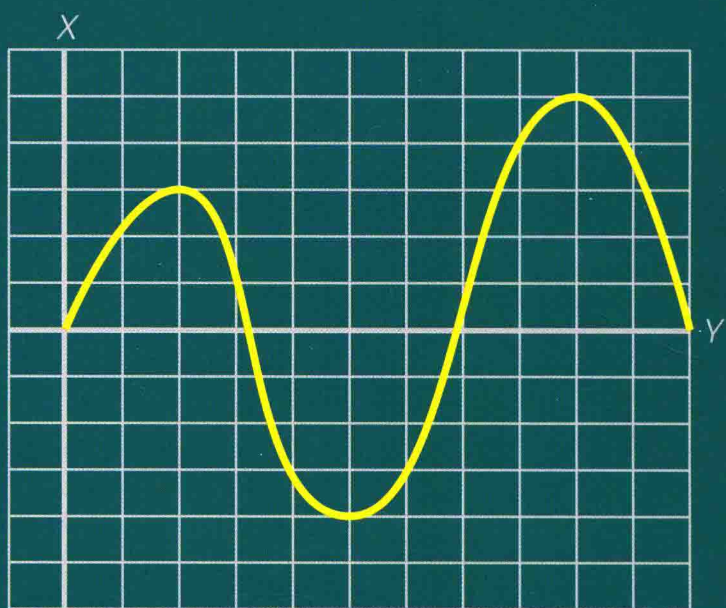
财政部规划教材
“十三五”普通高等教育规划教材

经济管理类

SHU XUE FEN XI

数学分析（上册）

主编 陈利国 邢华 赵洁



中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

财政部规划教材
“十三五”普通高等教育规划教材

经济管理类

数学分析

（上册）

主　编　陈利国　邢　华　赵　洁
副主编　王金凤　杨　芳　王婧哲

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学分析．上册/陈利国，邢华，赵洁主编．—北京：中国财政经济出版社，2017.8
财政部规划教材　“十三五”普通高等教育规划教材
ISBN 978-7-5095-7638-0

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①陈…　②邢…　③赵…　Ⅲ.①数学分析—高等学校—教材　Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 185760 号

责任编辑：康　苗　　　责任校对：李　静
封面设计：骏图工作室　　　版式设计：王志强

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社 出版

URL：http：//www.cfeph.cn
E-mail：jiaoyu@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100142
营销中心电话：010-82333010　编辑部门电话：010-88190670
北京时捷印刷有限公司印刷　各地新华书店经销
787×1 092 毫米　16 开　11.5 张　284 000 字
2017 年 8 月第 1 版　2017 年 8 月北京第 1 次印刷
定价：29.00 元
ISBN 978-7-5095-7638-0
（图书出现印装问题，本社负责调换）
本社质量投诉电话：010-88190744
打击盗版举报热线：010-88190414、QQ：447268889

前　言

数学是一门重要的基础性学科，又是一门得到广泛应用的工具性学科. 随着当今经济科学和管理科学的不断发展和深化，数学科学对经济科学和管理科学的发展起着越来越重要的促进作用. 因此，近些年在经济管理类、统计学等专业的本科教学中都加大了基础数学的深度，数学分析这门基础课程替代了以往的高等数学和微积分.

本书是在教学团队多年给经济学、统计学等专业讲授数学分析课程基础上编写的. 一方面，本书与经济类传统的高等数学教材相比，加强了基础理论的阐述，大致相当于理科数学分析的深度，在内容上注重对学生抽象思维和逻辑上严谨论证的训练，以期为学生打下比较坚实的数学理论基础；另一方面，与传统数学分析教材相比，本书对理论性较强的内容有所删减，同时增强了对学生数学运算能力以及运用能力的培养，增加更多在经济上的应用，更注重应用性和实用性. 每章配有相应的习题且分为两类：一类是注重基础知识的理解和应用；另一类是提高部分，适用于考研和数学竞赛.

全书分上、中、下三册，用于三个学期上完全部内容. 其中，上册内容包括：实数集和函数、数列极限、函数极限、函数的连续性、导数和微分、微分中值定理及其应用；中册内容包括：不定积分、定积分、定积分应用、反常积分、常微分方程、数项级数、函数项级数；下册内容包括：多元函数的极限与连续、多元函数微分学、隐函数定理及其应用、含参变量积分、曲线积分、重积分及曲面积分. 对于加"*"的和小字部分的内容，在教学中可灵活选用，也可作为读者进一步阅读的内容，以使本书适合多种层次的需求. 本书可作为对数学有较高要求的经济管理类专业本科生的教材，也可作为理科数学的参考教材.

参与本书编写的人员都是多年给数学专业、经济管理类专业和统计学专业讲授数学分析课程的教师，具有丰富的教学经验. 本书由陈利国、邢华、赵洁、王金凤、杨芳、王婧哲、高菲菲、李琳琳、杨文华和吴大勇老师共同编写. 另外，王君和曹京平两位老师也参与部分内容的编写工作. 全书章节由乔节增教授和魏运教授主审统稿.

本书的编写得到了内蒙古财经大学统计与数学学院领导和老师们的大力支持，得到了中国财政经济出版社工作人员的帮助，我们在这里表示衷心的感谢.

由于我们水平有限，缺点和不足在所难免，诚望读者批评指正.

编　者
2017 年 6 月

目　　录

第一章 实数集与函数

函数是数学分析的研究对象，是数学分析的基本概念之一. 本章介绍函数的一般定义与基本性质.

第一节 实　　数

一、实数及其性质

数学分析研究的是实数集上定义的函数，因此首先要掌握实数的基本概念与性质. 实数是由有理数和无理数两部分组成. 其中，可以写成$\frac{p}{q}$(p,q为整数，且$q\neq 0$)形式的数称为有理数，它可以是整数、有限小数或无限循环小数. 而无限不循环小数则表示一个无理数.

为方便起见，通常将全体实数构成的集合记为$\mathbf{R}$，即

$$\mathbf{R}=\{x \mid x\text{ 为实数}\}.$$

规定了原点、正方向、单位长度的一条直线称为数轴. 实数与数轴上的点是一一对应的. 因此，以后常将实数a和数轴上与它对应的点a看作是有相同的含义而不加区别. 数轴上表示有理数的点称为有理点，表示无理数的点称为无理点.

实数的一些主要性质如下：

1. 实数集对四则运算的封闭性

任意两个实数的和、差、积、商(除数不为0)仍然是实数.

2. 实数集的有序性

对于任意两个实数x,y，以下三个关系式中有且仅有一个成立：

$$x<y,\quad x=y,\quad x>y.$$

3. 实数大小关系具有传递性

对于任意实数x,y,z，若$x>y,y>z$，则$x>z$.

4. 实数具有阿基米德(Archimedes) 性

对于任何实数 x,y,若 $x>y>0$,则存在正整数 n,使得 $ny>x$.

5. 实数集具有稠密性

任意两个不相等的实数之间必有第三个实数.

6. 实数具有连续性

全体实数充满整个数轴,没有缝隙.

数学分析是在实数范围内研究函数,以后如果没有特别说明,所给的数均指实数.

二、实数的绝对值与不等式

定义 1.1 一个实数 x 的绝对值,记为 $|x|$,定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义表示数轴上点 x 与原点之间的距离.

若 x、y 为实数,则由定义 1.1 可知

$$|x-y|=\begin{cases}x-y, & x\geqslant y,\\ y-x, & x<y.\end{cases}$$

$|x-y|$ 的几何意义表示数轴上点 x 与点 y 之间的距离.

绝对值及其运算有下列性质:

(1) $|x|\geqslant 0$,当且仅当 $x=0$ 时有 $|x|=0$;

(2) $|-x|=|x|$;

(3) $|x|=\sqrt{x^2}$;

(4) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$;

(5) 不等式 $|x|>a(a>0)$ 与不等式 $x>a$ 或 $x<-a$ 等价;

(6) 不等式 $|x|<b(b>0)$ 与不等式 $-b<x<b$ 等价;

以上性质由绝对值的定义直接证得.

(7) 对于任何实数 x,y 有三角形不等式 $|x|-|y|\leqslant |x\pm y|\leqslant |x|+|y|$;

由上面的性质(4) 得

$$-|x|\leqslant x\leqslant |x|,-|y|\leqslant y\leqslant |y|,$$

两式相加,得

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant |x|+|y|,$$

再由性质(6),得

$$|x+y|\leqslant |x|+|y|.$$

又 $|x|=|x+y-y|\leqslant |x+y|+|-y|=|x+y|+|y|$,即 $|x|-|y|\leqslant |x+y|$. 至此得到

$$|x|-|y|\leqslant |x+y|\leqslant |x|+|y|.$$

由于 $|x-y|=|x+(-y)|\leqslant |x|+|-y|=|x|+|y|$,$|x|=|x-y+y|\leqslant |x-y|+|y|$,

又得到

$$|x|-|y| \leqslant |x-y| \leqslant |x|+|y|.$$

一般地,有

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n| \leqslant |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|.$$

(8) $||x|-|y|| \leqslant |x-y|$;

由性质(4)有

$$|x| = |(x-y)+y| \leqslant |x-y|+|y|,$$
$$|x|-|y| \leqslant |x-y|.$$

类似地,有

$$|y|-|x| \leqslant |y-x| = |x-y|.$$

于是有

$$||x|-|y|| \leqslant |x-y|.$$

(9) $|xy| = |x|\cdot|y|$;

一般地,有

$$|x_1x_2\cdots x_n| = |x_1||x_2|\cdots|x_n|.$$

(10) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$.

根据绝对值的定义,(9)与(10)显然成立.

例 1 解不等式 $|x-3| > |x+1|$.

解 由绝对值的几何意义知,待解不等式表示点 x 到点 3 的距离大于点 x 到点 -1 的距离. 所以,从数轴上直接观察(见图 1-1),可得不等式的解集为

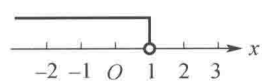


图 1-1

$$\{x \mid x < 1\}.$$

习题 1-1

1. 在数轴上表示出下列不等式的解:
(1) $x(x^2-1)=0$; (2) $|x-1| < |x-3|$.
2. 证明:在实数集 **R** 上有
(1) $|x-1|+|x-2| \geqslant 1$; (2) $|x-1|+|x-2|+|x-3| \geqslant 2$.

第二节 数集·确界原理

一、区间与邻域

全体实数的集合记作 **R**,全体自然数的集合记作 **N**,此外,常用的实数集合还有区间与

邻域.

定义 1.2 设 $a、b \in \mathbf{R}$，且 $a < b$.

(1) 闭区间 $[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$；

(2) 开区间 $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$；

(3) 半开区间 $(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$，$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$.

以上三类区间统称为有限区间，数 $b-a$ 称为这些区间的区间长度.

(4) 无限区间：

$$(-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b\},\quad (-\infty,b) = \{x \mid x < b\},$$

$$(a,+\infty) = \{x \mid x > a\},\quad [a,+\infty) = \{x \mid x \geqslant a\},$$

$$\mathbf{R} = (-\infty,+\infty) = \{x \mid x \text{ 为任意实数}\}.$$

通常，将上述四类区间统称为区间，区间在数轴上的表示法如图 1-2 和图 1-3 所示.

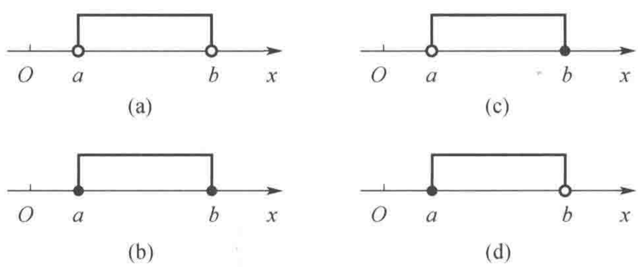


图 1-2

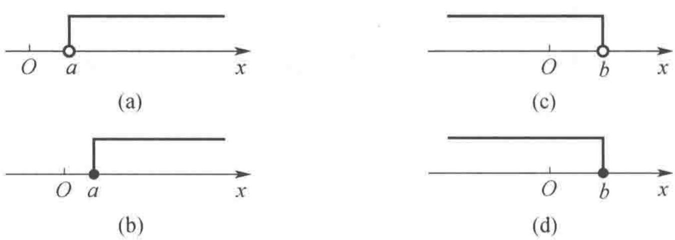


图 1-3

在以后的讨论中，有时需要考虑由某点 x_0 附近的所有点构成的集合，为此需要引入邻域的概念.

定义 1.3 设 $\delta > 0$，则称开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0;\delta)$ 或 $U(x_0)$，即

$$U(x_0;\delta) = \{x \mid x_0-\delta < x < x_0+\delta\} = \{x \mid |x-x_0| < \delta\},$$

点 x_0 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径.

去掉 $U(x_0,\delta)$ 的中心点 x_0，称集合 $(x_0-\delta,x_0) \cup (x_0,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的空心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(x_0;\delta)$ 或 $\mathring{U}(x_0)$.

例如，不等式 $0 < |x-2| < 1$ 所表示的数集，就是以点 $x_0 = 2$ 为中心，半径为 1 的空心邻域 $\mathring{U}(2;1) = (1,2) \cup (2,3)$.

称半开区间 $(x_0-\delta, x_0]$ 为点 x_0 的左邻域，$[x_0,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的右邻域，分别记作

$U_-(x_0)$ 和 $U_+(x_0)$. 称开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 为点 x_0 的空心左邻域,$(x_0,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的空心右邻域,分别记作 $\mathring{U}_-(x_0)$ 和 $\mathring{U}_+(x_0)$.

∞ 邻域 $U(\infty)=\{x \mid |x|>M\}$, $+\infty$ 邻域 $U(+\infty)=\{x \mid x>M\}$, $-\infty$ 邻域 $U(-\infty)=\{x \mid x<-M\}$,其中 M 为充分大正数(下同).

二、有界集·确界原理

定义 1.4 设 S 是一个实数集,若存在实数 M,使得对任意 $x\in S$,有 $x\leqslant M$,则称 S 有上界,并称 M 为 S 的一个上界. 若存在实数 M',使得对任意 $x\in S$,有 $x\geqslant M'$,则称 S 有下界,并称 M' 为 S 的一个下界.

显然,若 M 是 S 的上界,则所有大于 M 的数都是 S 的上界;若 M' 是 S 的下界,则所有小于 M' 的数都是 S 的下界. 若集合 S 既有上界也有下界,则称 S 为有界集. 否则就称 S 为无界集.

例如

$$S=\left\{\sin\frac{1}{x}\,\middle|\,x>0\right\}$$

是有界集,其上界为 1,下界为 -1.

$$S=\left\{\frac{x^2}{x+1}\mid x>-1\right\}$$

有下界为 0,但 S 无上界,故 S 是一个无界集.

设 S 是一个有上界的数集,若 S 所有上界组成的集有一个最小值 β,则称 β 为集 S 的上确界. 同理,设 S 是一个有下界的数集,若 S 所有下界组成的集有一个最大值 α,则称 α 为集 S 的下确界. 下面给出上(下)确界的精确定义.

定义 1.5 设 S 是一个有序实数集,若存在实数 β,满足

(1) 对一切 $x\in S$,都有 $x\leqslant\beta$;

(2) 对任意 $\varepsilon>0$,存在 $x\in S$,使得 $x>\beta-\varepsilon$,

则 β 称为 S 的上确界,记为 $\beta=\sup S$.

定义 1.6 设 S 是一个有序实数集,若存在实数 α,满足

(1) 对一切 $x\in S$,都有 $x\geqslant\alpha$;

(2) 对任意 $\varepsilon>0$,存在 $x\in S$,使得 $x<\alpha+\varepsilon$,

则 α 称为 S 的下确界,记为 $\alpha=\inf S$.

例 1 设 $\mathbf{Q}$ 表示全体有理数,令 $S=\{x\mid x^2<2,x\in\mathbf{Q}\}$,试证明 $\sup S=\sqrt{2}$.

证 (1) 对任意实数 $x\in S$,由题设知 $x<\sqrt{2}$;

(2) 对任意 $\varepsilon>0$,由 $(\sqrt{2}-\varepsilon)^2<\left(\sqrt{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2<2$ 知

$$\sqrt{2}-\varepsilon\in S,\quad \sqrt{2}-\frac{\varepsilon}{2}\in S,$$

且由实数连续性知,存在有理数 $x_0\left(\sqrt{2}-\varepsilon<x_0<\sqrt{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 使得 $x_0\in S$. 这就证明了

$$\sup S=\sqrt{2}.$$

为方便应用给出:

公理 1.1(确界原理) 非空实数集 S,若 S 有上界,则 S 有上确界;若 S 有下界,则 S 有下确界.

若非空集 S 无上界,则定义 $+\infty$ 为 S 的非正常上确界,记作 $\sup S=+\infty$;若非空集 S 无下界,则定义 $-\infty$ 为 S 的非正常下确界,记作 $\inf S=-\infty$. 此时将确界原理推广为:

公理 1.2(推广的确界原理) 任一非空实数集 S 必有上、下确界(正常的或非正常的).

习题 1-2

1. 用区间表示下列不等式的解,并且在数轴上表示出来:

(1) $0<(x-2)^2\leqslant 4$; (2) $1<|x-2|<3$;

(3) $x^2-2x>3$; (4) $|x+1|<|x-2|$;

(5) $|ax-x_0|<\delta$ (a,x_0,δ 都为常数,且 $a>0,\delta>0$).

2. 设 S 为非空数集,试对下列概念给出定义:

(1) S 无上界; (2) S 无界.

3. 求下列数集的上、下确界:

(1) $S=\{x\mid x=n!\}$ (n 为正整数); (2) $S=\{x\mid x$ 为 $(0,1)$ 上的无理数$\}$

第三节 函数概念

一、常量与变量

初等数学研究的对象基本上是不变的量,即常量,一般用字母 a,b,c 等表示;而数学分析的研究对象则是可以取不同数值的量,即变量,一般用字母 x,y,z 等表示. 例如,一架旅客班机在飞行过程中,乘客的数量、行李的件数等都是常量,而飞机飞行的高度、汽油的储存量等都是变量. 再如,当圆的半径变化时,圆的周长和面积都是变量,而周长与直径的比(即圆周率 π)却是不变的,因此是常量.

如果将变量看作是可以在某一非空数集内任意取值的量,则常量可以看作是在单元素集合中取值的量,因而常量可以看作是特殊的变量.

常量在数轴上表示为一个定点,而变量在数轴上则表示为一个动点.

二、函数的定义

在研究实际问题时,所涉及的几个变量之间常会具有某种确定的关系. 下面就两个变量相互联系着的情形,考察几个例子.

例 1 圆的面积与它的半径 R 之间的相依关系,由公式

$$S=\pi R^2$$

给定. 当半径 R 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式就可以确定圆面积 S 的相应数值.

例 2 图 1-4 是某地用温度自动记录仪记录的该地某天 24 小时的气温变化曲线. 该曲线描述了当天气温 T 随时间 t 变化的情形. 对任意时刻 $t_0\in[0,24]$，按曲线所示的对应规则可唯一确定 t_0 时刻的气温值 T_0.

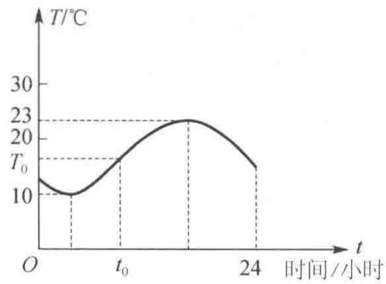


图 1-4

例 3 某商店销售某种商品，销售量 Q 与销售单价 p 的数量关系如表 1-1 所示.

表 1-1

p/ 元	4	3.95	3.90	3.85	3.80	3.75	3.70
Q/ 件	400	420	450	460	475	486	500

由表 1-1 所示的对应规则可唯一确定与销售单价 p 所对应的销售量 Q 的值.

上面三个例子的实际意义虽然不同，但它们都是通过一定的对应规则(公式、图、表) 来反映两个变量之间的相依关系. 从数学角度进行抽象概括，便可得到函数的概念.

定义 1.7 设 D 为一非空数集，如果存在一个对应规则 f，使得对于每一个 $x\in D$，都能由 f 唯一地确定一个数 y 与之对应，则称 f 为定义在数集 D 上的一个函数，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 $f(x)$ 的定义域.

函数 $f(x)$ 的定义域 D 通常记作 $D(f)$. 当定义域为区间时，则称为定义区间.

如果 $x_0\in D$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义；如果 $x_0\notin D$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 无定义.

对于每一个 $x_0\in D(f)$，因变量 y 的相应取值，称为函数 $f(x)$ 当 $x=x_0$ 时的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 全体函数值的集合称为函数的值域，通常记作 $Z(f)$，即

$$Z(f)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D(f)\}.$$

在前面例 1 中函数的对应规则 f 是由一个公式 $S=\pi R^2$ 给出，定义域 $D(f)=(0,+\infty)$，值域 $Z(f)=(0,+\infty)$；例 2 中对应规则 f 是由图 1-4 所示的曲线表示，定义域 $D(f)=[0,24]$，值域 $Z(f)=[10,23]$；例 3 中 f 是由表格给定，定义域

$$D(f)=\{4,3.95,3.90,3.85,3.80,3.75,3.70\},$$

值域

$$Z(f)=\{400,420,450,460,475,486,500\}.$$

按定义,确定一个函数需要两个要素,即对应规则 f 和定义域 $D(f)$. 而与自变量、因变量和函数符号用什么字母表示无关. 例如,函数 $y=x^2+1$ 与 $z=t^2+1$ 是同一个函数,而函数 $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 是两个不同的函数,这是由于它们的定义域不同.

三、函数的表示法

常用的函数表示法有三种:公式法(或称解析法)、图示法和表格法,从例 1 至例 3 可以看出. 公式法简明准确,便于运算和理论分析;图示法使得函数的变化直观、清晰;表格法(如各种函数表、经济统计报表等)便于查函数值. 这三种函数表示法各有优点,故常把它们结合起来表示一个函数.

在实际应用中经常遇到这样的函数,在其定义域的各个不相交的子集上,函数的解析式也不相同,这类函数通常称为分段函数.

例 4 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

取整函数 $y=[x]$,$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 即

$$[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1,\quad n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

如$[-3.6]=-4$,$[2]=2$,$[3.8]=3$,可以证明

$$[x]\leqslant x<[x]+1.$$

上述三个函数都是分段函数,它们的图形如图 1-5 所示.

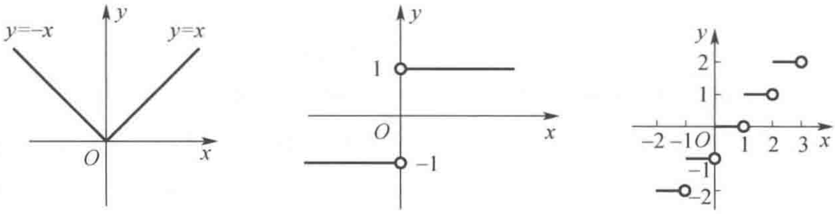


图 1-5

分段函数的定义域是各分段定义域的并集,另外,分段函数在其整个定义域上是一个函数,而不是几个函数.

有些函数只能用语言来描述,如定义在 $\mathbf{R}$ 上的狄利克雷(Dirichlet) 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

和定义在$[0,1]$ 区间上的黎曼(Riemann) 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & 当\ x=\dfrac{p}{q}\left(p,q\in \mathbf{N}_+,\dfrac{p}{q}\ 为既约真分数\right),\\ 0, & 当\ x=0,1\ 和(0,1)内的无理数.\end{cases}$$

它们的图形如图 1-6 所示.

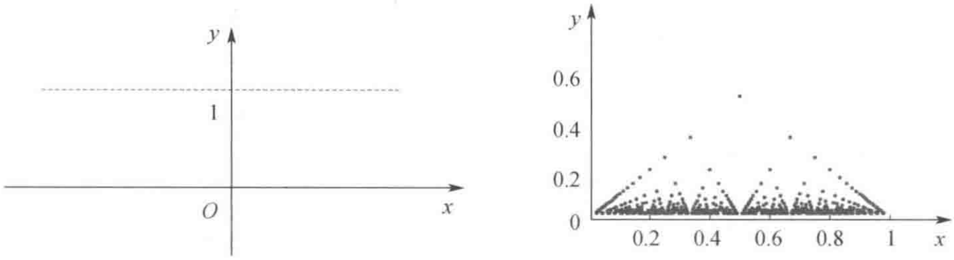


图 1-6

四、函数的定义域

如果函数是用公式法表示的，且未赋予实际意义，则其定义域就是使函数表达式 $y=f(x)$ 有意义的实数 x 的集合，在这种情况下，函数的定义域也可以省略不写. 对于实际应用问题中的函数，其定义域应该由问题的实际意义确定. 如例 1 中的函数 $S=\pi R^2$，定义域为 $(0,+\infty)$，而不是实数集 $\mathbf{R}$.

例 5 求函数 $f(x)=\dfrac{\lg(3+x)}{\sqrt{x^2-4}}$ 的定义域.

解 要使函数表达式有意义，须满足

$$\begin{cases}3+x>0,\\ x^2-4>0,\end{cases}$$

即 $x>2$ 或 $-3<x<-2$. 所以函数的定义域为

$$D(f)=(-3,-2)\cup(2,+\infty).$$

例 6 已知分段函数

$$g(x)=\begin{cases}x, & -2\leqslant x<0,\\ 1, & x=0,\\ x^2+2, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

(1) 求 $g(x)$ 的定义域；

(2) 求函数值 $g(-1)$，$g(0)$，$g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

解 (1) 由 $g(x)$ 的表达式可知，该函数的定义域为三个子集 $[-2,0)$，$\{0\}$，$(0,1]$ 的并集，即

$$D(g)=[-2,1].$$

(2) 因为 $-1\in[-2,0)$，所以 $g(-1)=-1$. 因为 $0\in\{0\}$，所以 $g(0)=0$. 因为 $\dfrac{1}{2}\in(0,1]$，所以 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9}{4}$.

习题 1-3

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{e^x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$； (2) $y=\dfrac{\ln(3+2x)}{\sqrt{|x|-1}}$；

(3) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$； (4) $y=\dfrac{\arcsin\dfrac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$；

(5) $y=\arctan\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$； (6) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$；

(7) $y=\ln\sin x+\sqrt{16-x^2}$； (8) $y=\arccos(\cos x)$.

2. 确定下列函数的定义域与值域，并做出函数图形：

(1) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ x^2-1, & 1<|x|\leqslant 2;\end{cases}$ (2) $f(x)=-\sin|x|$；

(3) $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0,\\ 2, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$

第四节 函数的基本性质

一、单调性

定义 1.8 设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，对于任意的 x_1、$x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，

(1) 若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ ($f(x_1)<f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加(严格单调增加)；

(2) 若 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调减少(严格单调减少).

(严格)单调增加函数与(严格)单调减少函数统称为(严格)单调函数，使函数单调的区间称为单调区间.

例如函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调增加，在区间 $(-\infty,0]$ 上单调减少，在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的，如图 1-7(a) 所示.

又如函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格单调增加的，如图 1-7(b) 所示.