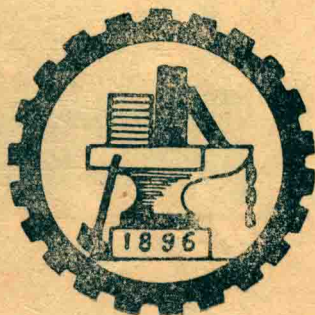


SAP5

线性系统静动力结构分析程序

程序原理和使用说明书

(修订本)



上海交通大学
船舶结构力学研究室

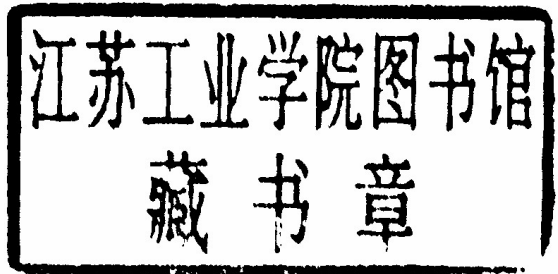
1983年12月

SAP5

线性系统静动力结构分析程序

程序原理和使用说明书

(修订本)



上海交通大学
船舶结构力学研究室编印
1983年12月

修 订 本 说 明

本书是在上海交通大学 1980 年 7 月出版的《SAP 5——线性系统静力和动力响应结构分析程序》一书和 1982 年 7 月的《修订本》的基础上进行修改、订正和补充而编成的。

书中主要介绍 SAP 5 结构分析程序的使用说明。由于没有 SAP 5 的原文程序说明，为了帮助用户学习和理解程序，我们仍将 SAP 4 的程序说明编入本书。它扼要说明了 SAP 程序系统的逻辑结构，动态内存分配，分析能力，单元库和所用的数值计算方法。虽然 SAP 5 比 SPP 4 有了不少的改进和扩充，但 SAP 4 的程序说明仍不失其参考价值。

鉴于原 SAP 5 程序使用说明书落后于 SAP 5 程序的发展，我们对照程序，对原 SAP 5 使用说明书中的不当和错误之处作了订正，遗漏之处作了补充，订正了与程序不符的输入格式和变量名，并补齐了缺掉的变量名，订正了多处卡片和注解中的错误，补齐了缺掉的卡片和说明。此外，三年来，我们在进行 SAP 5 程序的维护和对广大用户的技术咨询过程中，同时对 SAP 5 程序进行了许多纠错、改进和扩充。这些内容也已编入本书。书中凡注有“*”的是修改和增删的内容，注有“**”的是上海交大 SAP 5 扩充版本增加的功能。

为了保证 SAP 5 程序使用说明书的通用性和专用术语的一致性，本书在编写过程中参考了北京工业学院 1981 年 6 月出版的《SAP 5 使用说明书（增定本）》，杭州工业汽轮机研究所 1980 年 11 月出版的《SAP 5 C——移植程序操作卡片说明书（修改版）》等国内常见版本。编写时，尽量照顾到与原文版本一致，但也不拘泥于原文，力求内容准确，文字通顺，易于理解。

本书由上海交通大学船舶结构力学研究室汪庠宝、李龙渊、韩继文执笔编写和校对。鉴于编者经验和水平，错误和不妥之处在所难免，欢迎用户指正

编者

1983 年 12 月

目 录

第一部份 (A)

SAP IV 说明书

1. 引言	(1)
2. 复杂结构系统的平衡方程	(2)
2—1 结构的单元矩阵	(2)
2—2 边界条件	(3)
3. 计算结构刚度矩阵和结构质量矩阵的程序编排	(3)
3—1 节点输入数据和自由度	(3)
3—2 单元质量和刚度的计算	(4)
3—3 结构刚度和质量的形成	(4)
4. 单元库	(7)
4—1 三维桁架单元	(7)
4—2 三维梁单元	(7)
4—3 平面应力、平面应变和轴对称单元	(7)
4—4 三维块单元	(7)
4—5 节点数可变的厚壳和三维单元	(7)
4—6 板壳单元	(8)
4—7 边界单元	(8)
4—8 管单元	(8)
5. 静力分析	(8)
5—1 平衡方程的求解	(9)
5—1 单元应力的计算	(9)
6. 频率和振型的计算	(9)
6—1 行列式搜索法	(9)
6—2 子空间迭代法	(10)
6—3 动力优化	(11)
7. 动力分析	(11)
7—1 用振型迭加法作历程响应分析	(11)
7—2 用直接积分法作历程响应分析	(12)
7—3 响应谱分析	(13)
7—4 振型迭加法分析中的再启动功能	(13)
7—5 振型迭加法与直接积分法的比较	(14)
8. 数据的校核过程	(14)

9. 把 SAP 装在 CDC 计算机系列以外的其它计算机上.....	(15)
10. 结论.....	(15)

第二部份 (B)

实例分析

1. 管道网络的静力分析.....	(16)
2. 壳体的静力分析.....	(17)
3. 平面刚架的频率和振型分析.....	(18)
4. 管道网络的响应谱分析.....	(19)
5. 悬臂梁的振型迭加时间历程响应分析.....	(20)
6. 圆管的振型迭加时间历程响应分析.....	(22)
7. 圆管的直接积分时间历程响应分析.....	(23)

第三部份 (C)

应 用

SAP 5 数据卡片的编排.....	(24)
I . 标题卡片.....	(26)
II . 主控制卡片.....	(27)
III . 节点数据卡片.....	(30)
III A. 节点温度修正卡片.....	(34)
IV . 单元数据卡片.....	(35)
类型 1——三维桁架单元.....	(35)
类型 2——三维梁单元.....	(38)
类型 3——平面应力膜单元.....	(45)
类型 4——二维平面应力、平面应变和轴对称单元.....	(49)
类型 5——8 节点三维块单元.....	(56)
类型 6——板壳单元.....	(63)
类型 7——边界单元.....	(68)
类型 8——8 到 21 节点厚壳和三维单元.....	(71)
类型 9——伪单元.....	(84)
类型 10——读入刚度单元.....	(87)
类型 12——管单元.....	(89)
IV A. 节点号优化顺序卡片.....	(98)
V . 集中载荷或集中质量数据卡片.....	(99)
IV . 结构单元载荷工况乘子卡片.....	(101)
VI . 重量和重心参考点卡片.....	(102)

动力分析.....	(103)
VII. 振型和频率卡片.....	(104)
IX. 结构绘图卡片.....	(107)
X. 强迫响应.....	(111)
A. 响应历程分析卡片.....	(111)
B. 响应谱分析卡片.....	(123)
C. 频率响应分析卡片.....	(126)
参考文献.....	(131)

第一部份 (A)

SAP 4 说明书

1. 引言

研制一个有效的结构分析程序需要有三门学科的知识——结构力学、数值分析和计算机应用。研制精确有效的结构单元需要现代结构力学的基础，程序的有效性主要取决于所用的数值分析方法和计算机的效率，在程序编制技术方面，必须有一个高速和低速存贮的最佳分配。

然而，一个通用计算机程序的最重要特点是能方便地修改、扩充和改进。否则，这个程序很可能用了几年后就陈旧了。这是因为新的结构单元研究出来了，更好的数值分析可以应用了，或者需要新的编程技术的计算机设备生产出来了。

结构分析程序 SAP 设计得能由用户加以修改和扩充，可以方便地加进新单元。本程序有能力分析非常大的三维系统，但也不丧失解较小问题的效率。此外，从本程序中选一些实际需用的子程序便可方便地编制成较小的专用程序，这就使得本程序特别适用于小型计算机。

用于线性结构系统的静力和动力分析的 SPA 4 程序现行文本是数年研究、实践和发展的结果。事实证明，本程序是一个很灵活和很有效的分析工具。程序用 FORTRAN IV 编写，可以不作任何修改地在 CDC 6400, 6600 和 7600 计算机上运行。1970 年 9 月发表了第一个 SPA 程序文本^[28]，1971 年公开了改进的静力分析程序 SOLIDSAP 或 SAP 2^[29]，然后，开始了新的静力和动力分析程序的编写。1972 年底发表了静力和动力分析程序 SAP 3，但它仅提供给那些支持我们研究工作的公司。与 SAP 3 比较，SAP 4 已经彻底改进过，特别是有了一个新的适用的节点数目可变的厚壳和三维元以及用于时间历程分析的有内外存交换的直接积分法。

分析的结构系统可由若干种不同的结构单元组合而成，本程序现包括以下几种单元类型：

- (a) 三维桁架单元；
- (b) 三维梁单元；
- (c) 平面应力和平面应变单元；
- (d) 二维轴对称块单元；
- (e) 三维块单元；
- (f) 节点数目可变的厚壳和三维单元；
- (g) 薄板和薄壳单元；

(h) 边界单元:

(i) 管单元(直管和弯管)

这些单元可用于静力和动力分析,程序的能力主要取决于系统的节点总数和动力分析时要求的特征值数目以及所用的计算机。单元的数目、载荷工况的数目以及刚度矩阵的阶数和带宽实际上是不受限制的。系统中的每一个节点有 0 到 6 个位移自由度,单元刚度矩阵和质量矩阵是以压缩形式组集的。因此,本程序对一维、二维或三维系统的分析同样有效。

在静力分析和动力分析中,结构刚度的形成是用同一方法完成的。随后,静力分析是求解平衡方程和计算单元应力,而动力分析则在下列几种中选择:

(a) 仅计算频率;

(b) 计算频率后,接作历程响应分析;

(c) 计算频率后,接作响应谱分析;

(d) 用直接积分法作历程响应分析。

为了求得频率和振形,采用了一些求解子程序来直接计算所要求的特征值和特征矢量,而不用把刚度矩阵和质量矩阵转换为压缩形式。在直接积分运算中,采用一个无条件稳定的积分方案,也在原始结构刚度矩阵和质量矩阵上进行运算。动力分析所用的程序和所需的输入数据是在静力分析所需要的程序和数据上简单地加上一部份。

本报告这一部份的目的是简要地说明总的程序组织,现有的单元库和所用的数值方法,叙述了适用于静力和动力分析的不同选择,给出了典型例题的运算时间。本报告的重点是在程序的应用方面,对所用的结构单元和数值方法研究方面的资料请读者参考适当的文献。

2. 复杂结构系统的平衡方程

2—1 结构的单元矩阵

对于线性结构单元系统,节点平衡方程可通过各种不同的方法导出^{[1]、[2]、[9]、[15]、[23]、[34]}。所有的方法都得到如下形式的一组线性方程

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = R \quad (1)$$

式中, M 是质量矩阵, C 是阻尼矩阵, K 是刚度矩阵,它们都是由单元组合而成的; 矢量 u , \dot{u} , \ddot{u} 和 R 分别是节点位移, 速度, 加速度和广义载荷。

结构矩阵是直接由单元矩阵迭加而成的。例如

$$K = \sum K_m \quad (2)$$

式中, K_m 是第 m 个单元的刚度矩阵。虽然 K_m 形式上与 K 同阶,但 K_m 中仅与单元自由度有关的项才是非零的,因此单元刚度矩阵的迭加可用密集形式的单元刚度矩阵和一个指示数组来完成,指示数组将单元的自由度与结构的自由度联系起来。程序中所用的算法在 3—3 节中叙述。

结构刚度矩阵和对角质量矩阵都是组集而成的。采用了集总质量法,结构质量矩阵是各个单元质量矩阵再加上在给定自由度上的附加集中质量的和。阻尼假定是比例的,

并表示为模态阻尼系数的形式，在集总质量法和比例阻尼方面所用的假定已在不同的场合讨论过了^{[9]、[11]、[17]、[33]}。

2—2 边界条件

如果一位移分量为零，则相应的方程不再保留在结构平衡方程(1)中，相应的单元刚度和单元质量项也不管了。如果在第*i*个自由度上给定一个非零位移， $u_i = x$ ，则把下面的方程(3)加到方程(1)中：

$$Ku_i = Kx \quad (3)$$

式中， $K \gg K_{ii}$ 。因此，方程(1)的解必给出 $u_i = x$ ，实际上，这可解释为在自由度“*i*”上加了一个刚度很大的弹簧和给定一个荷重，由于在这个自由度上结构相对柔性，从而产生了所要求的位移 x 。

3. 计算结构刚度矩阵和结构质量矩阵的程序编排

结构刚度矩阵和质量矩阵的计算由三个步骤完成：

- (1) 由程序读入和生成节点输入数据，这一步确定了每个节点有效自由度的方程号；
- (2) 计算单元刚度矩阵，质量矩阵及其连接数组，这些数组顺序贮存在带上（或其它低速存储器上）；
- (3) 迭加单元矩阵，形成结构刚度矩阵和质量矩阵，并以分块形式贮存在带上。

需注意，这些基本步骤与所用的单元类型无关，而且无论对静力分析或动力分析都是一样的。

3—1 节点输入数据和自由度

程序的容量由结构系统的节点数目控制。每一节点需要6个边界条件代码（存放在ID数组中），3个坐标（存放在X、Y、Z数组中）和节点温度（存放在T数组中），（具有生成的能力）。在形成单元刚度矩阵和质量矩阵的过程中，全部节点数据放在内存中，因为单元子程序要求的内存较少，所以对一个给定的题目所需的最少内存量应比系统的节点数目的10倍稍大些。

需要指出，用户应仅保留那些与连接在节点上的单元相协调的自由度。每一节点涉及6个可能的自由度，所有无效自由度将被删去，于是降低了结构矩阵的阶数。具体地说，在ID数组中“1”表示没有方程与此自由度有关，“0”表示这是一个有效的自由

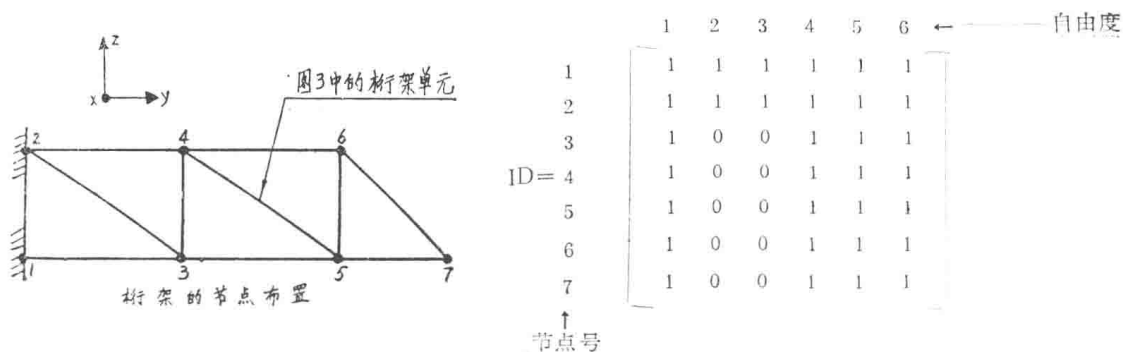


图 1.1 桁架例题的节点布置及读入和(或)生成的ID数组

度。图 1 表示——简单桁架结构读入和由程序生成后的 ID 数组。一旦求得了 ID 数组和 X, Y, Z 数组, 方程号便与所有有效自由度连系了起来, 即在 ID 数组中的“0”被相应的方程号所取代, 并且每个“1”都用“0”去代替。简单桁架的例子如图 2 所示。

$$ID = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

图 1.2 将方程号分配给有效自由度后桁架例题的 ID 数组

3—2 单元质量和刚度的计算

根据已知的全部节点坐标和已建立的自由度的方程号, 可计算系统的每个单元的刚度矩阵、质量矩阵和应力一位移转换矩阵。如前所述, 因为这些矩阵的形成和存贮到带上是与单元特性的读入同时完成的, 所以在这一步中需要少量的附加内存。单元的矩阵和相应的单元连接数组即矢量 LM 一起记在带上。矢量 LM 是由 ID 数组和与此单元有关的结构节点来形成的。一个典型的桁架单元的连接数组如图 3 所示。

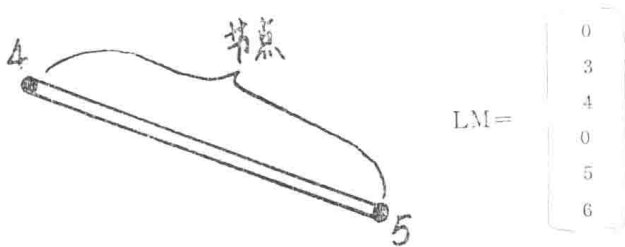


图 1.3 桁架例题中一个典型单元的连接数组 (矢量 LM)

单元数据的计算是分批进行的, 即同一批的所有单元总是在一起计算, 这样, 对每一批单元只要调用一次相应的单元子程序。当全部单元矩阵建立以后, ID 数组和 X, Y, Z 数组不再需要, 相应的存贮区域用来形成结构矩阵和以后求解平衡方程。

3—3 结构刚度和质量的形成

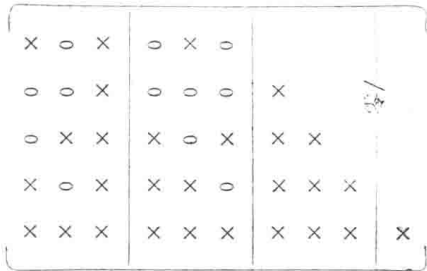
结构的刚度矩阵和质量矩阵分块形成, 如图 4 所示的桁架例子。每块的方程数取决于可用的内存量, 并且如图 5 所示的那样在程序中计算。已经证明, 在适当大小的计算机上能进行很大的系统的静力分析和动力响应分析。当每块方程数已知时, 可将单元矩阵直接相加。刚度矩阵和质量矩阵每次组装两块。在组装时必须查阅存在带上的单元矩阵, 为了将读带次数减至最少, 在每次读带时, 把与以后几块有关的单元矩阵记入另一带上。此法有效地减少了形成这些块所必须的读带次数。

计算结构刚度矩阵与质量矩阵的程序编排流程图如图 6 所示。

0 = 零元素
 X = 非零元素



质量矩阵



刚度矩阵

第1块

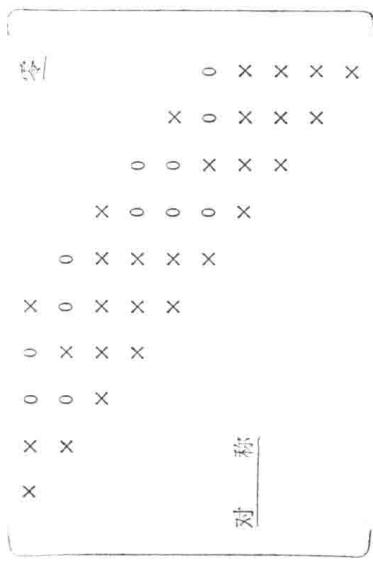
第2块

第3块

第4块



质量矩阵



刚度矩阵

实际的结构矩阵

刚度矩阵和质量矩阵在带上的存储

可用的内存数目

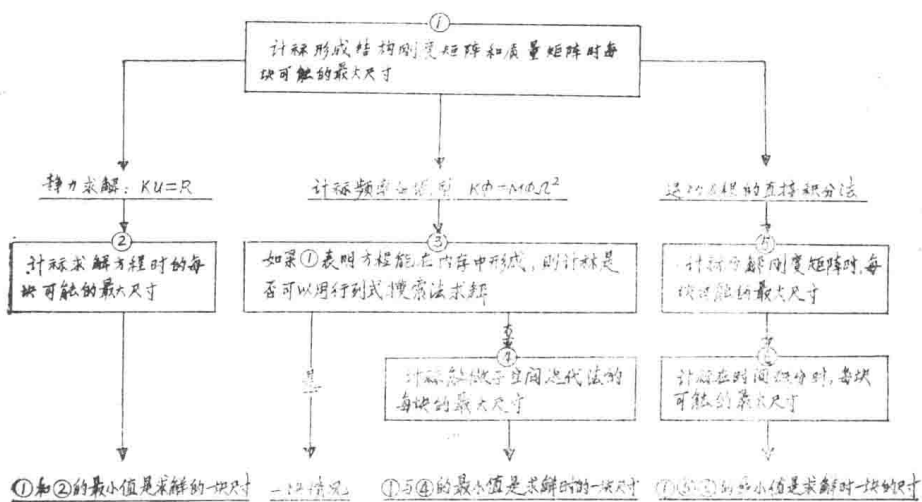


图 1.5 计算一块的方程数的流程图

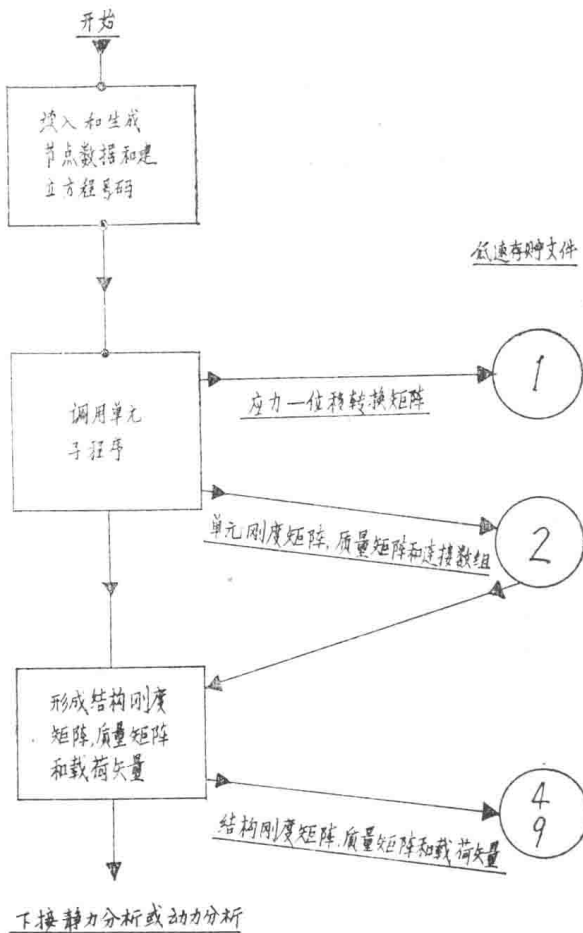


图 1.6 计算结构刚度矩阵和质量矩阵的流程图

4. 单元库

SAP 4 的单元库由 8 种不同类型的单元组成, 这些单元在静力分析或动力分析中都可以使用。单元库如图 7 所示, 现简述如下:

4—1 三维桁架单元

刚度矩阵的推导在参考文献[22], [29]中给出, 单元可承受均匀温度变化。

4—2 三维梁单元

程序中的梁单元考虑了扭转, 对两个轴的弯曲, 轴向和剪切变形。单元是等截面的, 其刚度特性的推导是标准的, 并且在[23]中给出。单元载荷模式由三个方面的惯性载荷和给定的固端力形成。力(轴力和剪力)和力矩(弯矩和扭矩)是在梁的局部坐标系中计算的。

一个典型的梁单元如图 7 b 所示, 由 i, j, k 平面确定梁的主惯性轴平面, 仅需要 k 节点的几何参数, 因此, 在计算中不因 k 节点而增加自由度。梁单元的特殊功能是梁的端点可以几何约束于一个主节点, 梁端点的从属自由度从公式中消去并且用主节点的自由度代替[18]、[20]。此法减少了节点平衡方程的总数(然而可能增大带宽), 而且在许多结构中大大降低了可能的数值敏感度, 此法也可用于建筑分析中的刚性楼板。

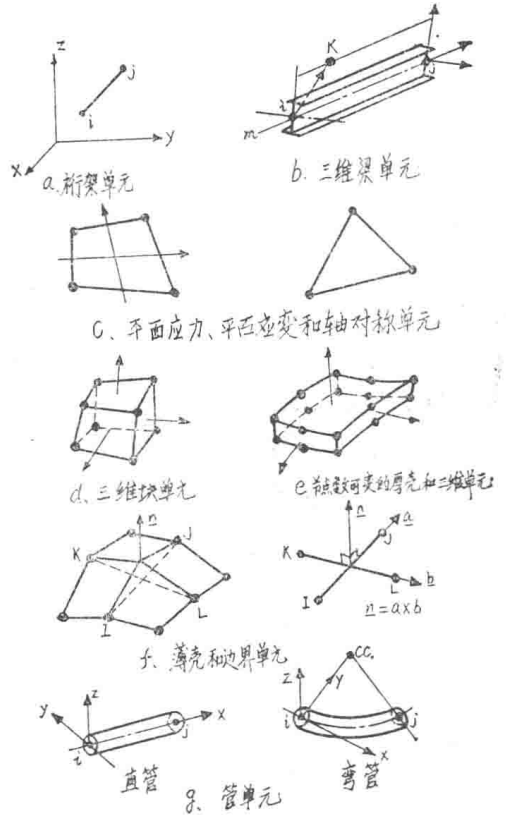


图 1.7 SAP 4 的单元库

4—3 平面应力、平面应变和轴对称单元

可以用正交异性材料特性的平面应力四边形(或三角形)单元, 每个平面应力单元的厚度可以不同, 并且可以位于三维坐标系统中的任意平面, 但平面应变和轴对称单元仅限于 $Y-Z$ 平面。可以考虑重力、惯性力和温度载荷。可以求出每个单元形心处和每边中点的应力。单元是以等参元公式为依据的[19]、[34], 为了改进单元的弯曲特性可采用不协调位移模型[26]、[29]、[32]。

4—4 三维块体单元

采用每个节点有 3 个平移自由度的普通八节点块单元, 如图 7 d 所示。假设材料是各向同性的, 单元载荷由温度力、表面压力和三个方向的惯性力所组成。可以计算单元形心处和单元表面中心处的应力(6 个分量)。如果采用矩形单元, 非协调模型是非常有效的。

4—5 节点数可变的厚壳和三维单元

采用 8 到 21 个节点的普通三维等参元或次参元来进行三维单元或厚壳单元的分析,

如图 7 e 所示^{[7]、[3]}。单元可以具有正交异性特性，载荷包括三个方向上的表面压力，流体静力载荷，惯性载荷和热载荷，可在单元的 7 个位置处输出总坐标系的六个应力分量。

4—6 薄板和壳单元

程序中提供的薄壳单元是由四个协调的三角形单元组成的任意四边形单元，单元的弯曲与平面应力特性在参考文献[12]，[14]中叙述。壳单元用常应变三角形和 LCCT 9 单元分别表达薄膜与弯曲特性，中心节点位于四个角节点的平均位置处。单元有 6 个内自由度，它们在组装之前，在单元一级上被消去，因此，四边形单元最终有 24 个自由度，即每个节点在总坐标系中有 6 个自由度。

在平板分析时，垂直于板面的转动刚度没有定义，因此法向转动自由度必须从分析中除去。对于曲壳，必须包括法向转动自由度。在曲率非常小的情况下，该自由度应该用一个边界单元来约束，这个边界单元应具有很小的法向转动刚度，比如说，约为单元弯曲刚度的 10% 或更小些^{[13]、[14]}。

4—7 边界单元

图 7 f 所示的边界单元可用于以下情形：

- (1) 将一个节点外部的弹性支座理想化；
- (2) 将一个斜向滚动支座理想化；
- (3) 规定一个节点位移；
- (4) 为了消除近于平板的壳体的第六个自由度所造成的数值分析的困难。

本单元是具有轴向刚度或扭转刚度的一维单元，单元的刚度系数直接加到总刚度矩阵（见 2—2 节）。

4—8 管单元

管单元（图 7 g）可以表示一段直管或一段圆形弯管，直管和弯管单元都要求是均匀截面和均匀材料特性。单元可以在空间任意布置，单元刚度矩阵考虑了弯曲、扭转、轴向和剪切变形，此外，还考虑了管内压力对曲管刚度的影响。

管单元承受的结构载荷类型包括总坐标方向的重力载荷，由热变形和内压力引起的变形所产生的载荷。作用在单元端部（i，j）和弯管中心处的力和力矩是按在单元横截面定位的坐标系中计算的。

建立管单元的刚度矩阵时，首先要计算相对于 j 端 6 个自由度的柔度矩阵，如 Polley 提出的那样^[22]。以这相对刚度矩阵，用 Hall 等人^[18]提出的平衡转换来形成整个单元刚度矩阵。用单元载荷引起的变形前乘以刚度矩阵来计算由于热变形、压力或重力载荷引起的节点约束力。

5. 静力分析

静力分析涉及到求解平衡方程

$$Ku = R \quad (4)$$

随后计算单元应力。

5—1 平衡方程的求解

在建立刚度矩阵和质量矩阵的同时，也组成了载荷矢量。方程的解是用大容量线性方程求解器 SESOL^[31] 来得到的，这个子程序用高斯消去法求解正定对称方程组，这种算法运算次数最少，即不对零元素进行运算。程序中利用 K 的 L^TDL 分解，因此，方程(4)可写成

$$L^T V = R \quad (5)$$

$$V = DLu \quad (6)$$

其中，在方程(5)中 V 的解由载荷矢量的换算求得，位移矢量 u 由回代得到。

在求解过程中，载荷矢量的变换是和 K 的分解同时进行的。在全部运算中，任一时刻所需要的矩阵元素必须在内存中，在消去时，在内存中有两块（在形成刚度矩阵和质量矩阵时也是这样），即最后存放 L 和 D 的前导块和受前导块分解影响的后续块。表 1 给出了几个典型的解题时间。

表 1 用 SESOL 求解方程

方 程 数	半 带 宽	中心处理机 (秒)	所用的计算机
8036	544	1786*	CDC 6600
2696	488	1200	CDC 6600
4214	205	31	CDC 7600

*这次求解中，刚度矩阵分解的内层循环是用机器语言编写的。

5—2 单元应力的计算

在求得节点位移后，顺次从低速存储器中读出单元应力一位移矩阵并计算单元应力。

6. 频率和振型的计算

用振型迭加法进行结构系统的动力分析。第一步需要解广义特征值问题

$$K\phi = \omega^2 M\phi \quad (7)$$

式中， ω 是自由振动的频率， ϕ 是自由振动振型。如 3—3 节所述，程序把刚度矩阵和质量矩阵以分块的形式存放在带上，如图 4。质量矩阵是具有部分零对角元素的对角矩阵。程序假定仅需最低的 p 个特征值和特征向量，于是方程(7)的解可写成

$$K\phi = M\phi\Omega^2 \quad (8)$$

式中， Ω^2 是含有 p 个最低特征值的对角矩阵，即 $\Omega^2 = \text{diag}(\omega_i^2)$ ，而 ϕ 存放了和 M 正交的特征向量 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ ，程序中用了两种不同的解法，行列式搜索法和子空间迭代法。当刚度矩阵可以以一块容纳在内存中时，用行列式搜索法。对于高阶和大带宽的系统，用子空间迭代法。这两种解法都可直接解广义特征值问题，而无须转换成标准形式^[31]。

6—1 行列式搜索法

对于 K 和 M 具有小带宽的大型系统模态分析，行列式搜索法是最适用的^[41]。这

种解法基本上是将三角分解和矢量逆迭代按最佳方式组合起来，计算所需要的特征值和特征向量，从最低的特征对 ω_1^2, ϕ_1 开始，依次求出。对于特征多项式

$$P(\omega^2) = \det(K - \omega^2 M) \quad (9)$$

的运算，采用了一个有效的加速正割迭代过程，以寻找接近下一个未知特征值的移位。迭代中，用了特征值分离定理（Sturm 序列特性）。每次行列式的计算需要作一次矩阵 $K - \omega^2 M$ 的三角分解。一旦求得了接近下一个未知特征值的移位，使用逆迭代来计算特征向量，把 Rayleigh 商的修正值加到移位值上便求得了特征值。表 2 表示了典型的求解时间。

表 2 用行列式搜索法计算频率和振型

系 统	系统阶数 n	最大半 带 宽	需 要 的 频 率 和 振 型 数	使 用 的 机 器	中央处理机 时间(秒)
平面刚架	297	30	3	CDD 6400	40
管道系统	566	12	7	CDC 6600	11
建筑物	340	32	7	CDC 6600	20
容 器	265	65	40	CDC 7600	58

6—2 子空间迭代法

当系统太大不能完全存放在内存中时，即大于一块时，便使用子空间迭代法。这一迭代可理解为反复运用 Ritz 法 [5]、[9]，在此法中，用第一步算得的特征向量作为下一步迭代的试探基矢量，直到收敛到所需要的 p 个特征值和特征向量为止。

本法是通过 q 个线性独立矢量同时迭代来求解的，这里 $q > p$ ，在第 k 次迭代中，矢量复盖 q 维子空间 ϵ_k ，并且算出特征值和特征矢量的“最佳”近似值，即当矢量复盖最小 p 维占优势子空间时，便得到了所需的特征值和特征矢量。

令 V_0 存放初始迭代矢量，则第 k 次迭代叙述如下：

求解复盖 ϵ_k 的矢量 \bar{V}_k

$$K \bar{V}_k = M V_{k-1} \quad (10)$$

计算 K 和 M 在 ϵ_k 上的投影（即相应于 ϵ_k 的广义刚度矩阵和质量矩阵）

$$K_k = \bar{V}_k^T K \bar{V}_k \quad (11)$$

$$M_k = \bar{V}_k^T M \bar{V}_k \quad (12)$$

求解 K_k 和 M_k 的特征系统

$$K_k Q_k = M_k Q_k \Omega_k^2 \quad (13)$$

计算特征向量的第 k 次改进近似

$$V_k = \bar{V}_k Q_k \quad (14)$$

若初始子空间和任一需要的特征矢量都不正交，则迭代收敛到所希望的结果，即当 $K \rightarrow \infty$ 时， $\Omega_k^2 \rightarrow \Omega^2$ ， $V_k \rightarrow \phi$

取迭代矢量的数目大于所求的特征矢量数目，以加速计算过程的收敛。当然，为了达到满意的收敛，所需的迭代次数与初始迭代矢量 V_0 的质量有关。除非另有需要（见

6—3节), 否则由程序生成 q 个初始矢量, $q = \min(2p, p+8)$, 在一般的应用中它已被证明是有效的。在收敛后, 可以要求进行 Sturm 序列检验, 以验证已找到的最低的 p 个征特值。

表 3 列出了用程序生成 q 个初始矢量的几个典型解题时间。

表 3 用子空间迭代法计算频率和振型

系 统	系统阶数 n	最大半 带 宽	所 需 的 频 率 和 振 型 数 P	使 用 的 计 算 机	中央处理机 时间(秒)
平面刚架	297	30	3	CDC 6400	25
管道系统	566	12	28	CDC 6600	142
带基座的 建筑物	1174	138	45	CDC 6600	890
三维刚架 建 筑	468	156	4	CDC 6400	160

6—3 动力优化

当已知所求特征系统的很好估算值时, 如在动力优化中那样, 仍可能需要解特征值问题。在这种情况下, 子空间迭代法是理想的方法。这时, 迭代矢量的数目 q 和矢量 V_i 以及最大迭代次数都可由用户规定。并且在所需的特征值和特征矢量的数目增加时, 已经算得的特征矢量可规定为初始迭代矢量的一部份, 以加速收敛。

7. 动力分析

在动力响应分析中需要解方程

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = R(t) \quad (15)$$

式中, $R(t)$ 是一个随时间变化的载荷矢量或是由基础运动引起的有效载荷矢量。在基础运动的情况下, 假设结构是均匀承受基础运动加速度 u_g [9], 则平衡方程为

$$M\ddot{u}_r + C\dot{u}_r + Ku_r = -M\ddot{u}_g \quad (16)$$

式中, u_r 是结构对基础的相对位移, 即

$$u_r = u - u_g$$

本程序可以对方程(15)或(16)的解进行历程分析, 或对方程(16)的解进行响应谱分析。历程分析可以用振型迭加法或直接积分法来完成。当然, 响应谱分析首先要求解特征系统。

7—1 用振型迭加法作历程响应分析

在振型迭加法中, 假定结构响应用 p 个最低振型来描述就足够了, 这里 $p \ll n$ 。利用 $u = \phi X$ 变换, ϕ 中各列是 p 个与 M 正交的特征矢量, 方程(15)可写为

$$\ddot{X} + \Delta \dot{X} + \Omega^2 X = \phi^T R \quad (17)$$

$$\text{式中, } \Delta = \text{diag}(2\omega_i \varepsilon_i); \quad \Omega^2 = \text{diag}(\omega_i^2) \quad (18)$$