第十届全国教育图书展优秀畅销图书
国家集训队教练执笔联合编写
在香港出版繁体字版和网络版
版版畅销，网络销量居榜首

畅销15年
超1200万册

总主编 单墫 熊斌

奥数教程学习手册

·配《奥数教程》第六版·

高二年级

本册主编 刘诗雄

上海市著名商标 华东师范大学出版社
ECNUP
全国百佳图书出版单位

总主编 单墫 熊斌

奥数教程
学习手册

·配《奥数教程》第六版·

华东师范大学出版社

高二年级

本册主编 刘诗雄
参编者 刘诗雄 边红平
郭希连 岑爱国
詹立波 周国栋
芦坤成 张新泽

图书在版编目(CIP)数据

奥数教程(第六版)学习手册. 高二年级/刘诗雄主编. —上海:华东师范大学出版社,2010,
ISBN 978-7-5617-7540-0

Ⅰ. 奥... Ⅱ. 刘... Ⅲ. 数学课—高中—教学参考
Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 019066 号

奥数教程(第六版)学习手册

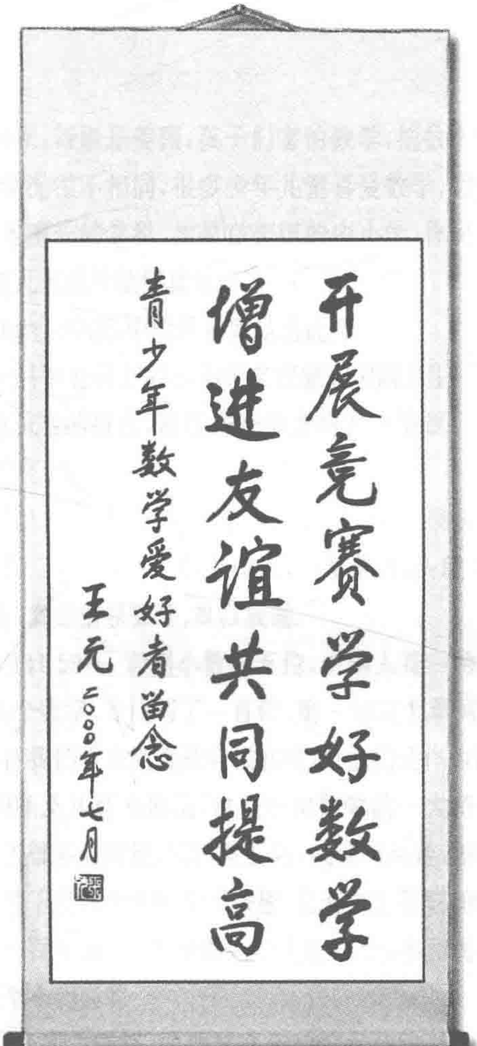
高二年级

总 主 编 单 墫 熊 斌
本册主编 刘诗雄
总 策 划 倪 明
项目编辑 孔令志
审读编辑 徐惟简
封面设计 高 山
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
网 址 www.ecnupress.com.cn
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887
地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 店 http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者 宜兴德胜印刷有限公司
开 本 890×1240 32 开
印 张 9.5
字 数 238 千字
版 次 2014 年 6 月第二版
印 次 2014 年 8 月第 7 次
书 号 ISBN 978-7-5617-7540-0/G·4365
定 价 19.00 元

出 版 人 王 焰



著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生致青少年数学爱好者

前　言

据说在很多国家，特别是美国，孩子们害怕数学，把数学作为“不受欢迎的学科”. 但在中国，情况很不相同，很多少年儿童喜爱数学，数学成绩也都很好. 的确，数学是中国人擅长的学科，如果在美国的中小学，你见到几个中国学生，那么全班数学的前几名就非他们莫属.

在数(shǔ)数(shù)阶段，中国儿童就显出优势.

中国人能用一只手表示 1～10，而很多国家非用两只手不可.

中国人早就有位数的概念，而且采用最方便的十进制(不少国家至今还有 12 进制，60 进制的残余).

中国文字都是单音节，易于背诵，例如乘法表，学生很快就能掌握，再“傻”的人也都知道“不管三七二十一”. 但外国人，一学乘法，头就大了. 不信，请你用英语背一下乘法表，真是佶屈聱牙，难以成诵.

圆周率 $\pi=3.14159\cdots$. 背到小数后五位，中国人花一两分钟就够了. 可是俄国人为了背这几个数字，专门写了一首诗，第一句三个单词，第二句一个……要背 π 先背诗，这在我们看来简直是自找麻烦，可他们还作为记忆的妙法.

四则运算应用题及其算术解法，也是中国数学的一大特色. 从很古的时候开始，中国人就编了很多应用题，或联系实际，或饶有兴趣，解法简洁优雅，机敏而又多种多样，有助于提高学生的学习兴趣，启迪学生智慧. 例如：

“一百个和尚一百个馒头，大和尚一个人吃三个，小和尚三个人吃一个，问有几个大和尚，几个小和尚?”

外国人多半只会列方程解. 中国却有多种算术解法，如将每个大和尚“变”成 9 个小和尚，100 个馒头表明小和尚是 300 个，多出 200 个和尚，是由于每个大和尚变小和尚，多变出 8 个，从而 $200\div8=25$ 即是大和尚人数. 小和尚自然是 75 人，或将一个大和尚与 3 个小和尚编成一组，平均每人吃一个馒头. 恰好与总体的平均数相等. 所以大和尚与小和尚这样编组后不多不少，即大和尚是 $100\div(3+1)=25$ 人.

中国人善于计算，尤其善于心算．古代还有人会用手指计算（所谓“掐指一算”）．同时，中国很早就有计算的器械，如算筹、算盘．后者可以说是计算机的雏形．

在数学的入门阶段——算术的学习中，我国的优势显然，所以数学往往是我国聪明的孩子喜爱的学科．

几何推理，在我国古代并不发达（但关于几何图形的计算，我国有不少论著），比希腊人稍逊一筹．但是，中国人善于向别人学习．目前我国中学生的几何水平，在世界上遥遥领先．曾有一个外国教育代表团来到我国一个初中班，他们认为所教的几何内容太深，学生不可能接受，但听课之后，不得不承认这些内容中国的学生不但能够理解，而且掌握得很好．

我国数学教育成绩显著．在国际数学竞赛中，我国选手获得众多奖牌，就是最有力的证明．从1986年我国正式派队参加国际数学奥林匹克以来，中国队已经获得了14次团体冠军，可谓是成绩骄人．当代著名数学家陈省身先生曾对此特别赞赏．他说：“今年一件值得庆祝的事，是中国在国际数学竞赛中获得第一……去年也是第一名．”（陈省身1990年10月在台湾成功大学的讲演“怎样把中国建为数学大国”）

陈省身先生还预言：“中国将在21世纪成为数学大国．”

成为数学大国，当然不是一件容易的事，不可能一蹴而就，它需要坚持不懈的努力．我们编写这套丛书，目的就是：(1)进一步普及数学知识，使数学为更多的青少年喜爱，帮助他们取得好的成绩；(2)使喜爱数学的同学得到更好的发展，通过这套丛书，学到更多的知识和方法．

“天下大事，必作于细．”我们希望，而且相信，这套丛书的出版，在使我国成为数学大国的努力中，能起到一点作用．本丛书初版于2000年，现根据课程改革的要求对各册再作不同程度的修订．

著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生担任本丛书顾问，并为青少年数学爱好者题词，我们表示衷心的感谢．还要感谢华东师大出版社及倪明、孔令志先生，没有他们，这套丛书不会是现在这个样子．

单 墫 熊 斌

2014年5月

目 录

习题详细解答

竞赛热点精讲

第 1 讲

不等式的性质

1 $\sin 1 < \log_3\sqrt{7}$. 显然有

$$\sin 1 < \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{7}{8}.$$

又 $3^7 < 7^4$,所以 $\sin 1 < \frac{7}{8} < \log_3\sqrt{7}$.

2 $a < b$. 这是因为

$$a = \frac{1}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}} < \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{m-1}} = b.$$

3 $f(x) < f(x^2) < f^2(x)$.

当 $0 < x < 1$ 时,$f(x) = \frac{x}{\lg x} < 0$, $f(x^2) = \frac{x^2}{\lg x^2} < 0$, $f^2(x) > 0$. 而

$$\frac{x}{\lg x} - \frac{x^2}{\lg x^2} = \frac{2x - x^2}{2\lg x} = \frac{(2-x)x}{2\lg x} < 0,$$

所以 $f(x) < f(x^2) < f^2(x)$.

4 $a > b > 1$.

因为 $a^n = a+1 > 1$,所以 $a > 1$,又因为 $b^{2n} = b+3a > 1$,所以 $b > 1$, $a^{2n} - b^{2n} = (a+1)^2 - (b+3a) = a^2 - a - b + 1$,又 $a^{2n} - b^{2n} = (a-b)(a^{2n-1} + a^{2n-2}\cdot b + \cdots + b^{2n-1})$,所以 $\frac{a^2-a-b+1}{a-b} = a^{2n-1} + \cdots + b^{2n-1} > 1$,即 $\frac{(a-1)^2}{a-b} > 0$,故 $a > b$.

5 $A-B=\frac{(a^p-b^p)(a^q-b^q)}{4}$. 当 $a=b$ 时，$A=B$；当 $a\neq b$ 时，因 $p, q>0$，所以 $(a^p-b^p)(a^q-b^q)>0$，所以 $A>B$.

6 (1) 作差并配方得

$$2\left(a^2b^2-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(ab-\frac{1}{2}\right)^2+(a-b-c)^2>0,$$

所以 $\qquad 2a^4b^4+a^2+b^2+c^2+1>4ab-2bc+2ca.$

(2) $\frac{a^ab^bc^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}}\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{c-a}{3}}\geqslant 1$，所以当 $a=b=c$ 时，$a^ab^bc^c=(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$；当 a、b、c 不全相等时，$a^ab^bc^c>(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

7 因 $a>b>c$，故 $a^2(b-c)+c^2(a-b)-b^2(a-c)=a^2(b-a+a-c)+c^2(a-b)-b^2(a-c)=(a^2-b^2)(a-c)+(a-b)(c^2-a^2)=(a-b)(a+b)(a-c)+(a-b)(c+a)(c-a)=(a-b)(a-c)(b-c)>0$. 所以不等式成立.

8 $\frac{a_1^2}{a_1-1}>S\Leftrightarrow a_1^2>(a_1+a_2+a_3)(a_1-1)\Leftrightarrow\frac{1}{a_2+a_3}>\frac{a_1}{a_1+a_2+a_3}$. 将三个类似不等式相加，即证.

9 左 $-$ 右 $=x^2+y^2+z^2-2\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}xy-2\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(c+a)}}yz-2\sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}}zx=\frac{b+c}{b+c}x^2+\frac{c+a}{c+a}y^2+\frac{a+b}{a+b}z^2-2\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}xy-2\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(c+a)}}yz-2\sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}}zx=\left(\sqrt{\frac{b}{b+c}}x-\sqrt{\frac{a}{c+a}}y\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{c+a}}y-\sqrt{\frac{b}{a+b}}z\right)^2+\left(\sqrt{\frac{a}{a+b}}z-\sqrt{\frac{c}{b+c}}x\right)^2\geqslant 0$，所以原不等式成立.

10 $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4=c^2(2b^2+2a^2)-$

$(a^2-b^2)^2-c^4=c^2(a^2+b^2+2ab-2ab+a^2+b^2)-(a+b)^2(a-b)^2-c^4=c^2(a+b)^2+c^2(a-b)^2-(a+b)^2(a-b)^2-c^4=[(a+b)^2-c^2]\cdot[c^2-(a-b)^2]=(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c+b-a)\geqslant 0$,所以不等式成立.

11 原不等式$\Leftrightarrow a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b-6abc\geqslant 0\Leftrightarrow a(b-c)^2+b(a-c)^2+c(a-b)^2\geqslant 0$.

12 由于 $\dfrac{a_1^2-a_2^2}{a_1+a_2}+\dfrac{a_2^2-a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}^2-a_n^2}{a_{n-1}+a_n}+\dfrac{a_n^2-a_1^2}{a_n+a_1}=0$,所以

$$\begin{aligned}&\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\\=&\frac{a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_1^2}{a_n+a_1}.\end{aligned}$$

再由 $\dfrac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}\geqslant\dfrac{1}{2}(a_1+a_2)$, $\dfrac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}\geqslant\dfrac{1}{2}(a_2+a_3)$, $\cdots$, $\dfrac{a_n^2+a_1^2}{a_n+a_1}\geqslant\dfrac{1}{2}(a_n+a_1)$,相加,可得

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\frac{1}{2}.$$

第2讲

基本不等式

1 $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $y=-\frac{\sqrt{6}}{2}$,或 $x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$, $y=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

$$\frac{4}{4-x^2}+\frac{9}{9-y^2}\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{4-x^2}\cdot\frac{9}{9-y^2}}=\frac{12}{\sqrt{37-(9x^2+4y^2)}}$$

$$\geqslant\frac{12}{\sqrt{37-2\sqrt{36(xy)^2}}}=\frac{12}{5},$$

其中当且仅当 $\frac{4}{4-x^2}=\frac{9}{9-y^2}$, $xy=-1$,且 x, $y\in(-2,2)$ 时等号成立,解之得 $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $y=-\frac{\sqrt{6}}{2}$,或 $x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$, $y=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

2 $\frac{m^2}{n^2}\neq\frac{bc}{ad}$.

$$Q^2=ab+\frac{nbc}{m}+\frac{mad}{n}+cd\geqslant ab+2\sqrt{abcd}+cd=P^2,$$

其中等号当且仅当 $\frac{nbc}{m}=\frac{mad}{n}$ 时成立.

3 $\sqrt{10}$. 由柯西不等式知 $(2\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x})^2\leqslant(2^2+1^2)(x-3+5-x)=10$,当且仅当 $\frac{\sqrt{x-3}}{2}=\frac{\sqrt{5-x}}{1}$,即 $x=\frac{23}{5}$ 时等号成立. 所以,$f(x)=2\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ 的最大值为 $\sqrt{10}$.

4 $\frac{5}{6}$. 由柯西不等式，有 $25\times 36=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqslant(ax+by+cz)^2=30^2$，故不等式等号成立. 由柯西不等式等号成立的条件知 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=k$. 于是 $k^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}=\frac{25}{36}$，可得 $k=\frac{5}{6}$（$k=-\frac{5}{6}$ 舍去）. 从而有 $k=\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{5}{6}$.

5 已知 $A+B+C=\pi$. 故

$$(A+B+C)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\geqslant 3^2,$$

即
$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\geqslant\frac{9}{\pi}.$$

又 $(1+1+1)(A^2+B^2+C^2)\geqslant(A+B+C)^2$，

故
$$A^2+B^2+C^2\geqslant\frac{\pi^2}{3}.$$

6 由已知两方程相加、相减得 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2,\\-8x+6y-24z=39.\end{cases}$

由柯西不等式有

$$39=-8x+6y-24z\leqslant\sqrt{(-8)^2+6^2+(-24)^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$=\sqrt{676}\times\sqrt{\frac{9}{4}}=39.$$

而由柯西不等式取等号的条件得

$$\frac{x}{-8}=\frac{y}{6}=\frac{z}{-24}=\frac{-8x+6y-24z}{64+36+576}=\frac{39}{676}=\frac{3}{52}.$$

所以，方程组的实数解为 $(x,y,z)=\left(-\frac{6}{13},\frac{9}{26},-\frac{18}{13}\right)$.

7 $8=1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc\geqslant 1+3\sqrt[3]{abc}+3(\sqrt[3]{abc})^2+abc=(1+\sqrt[3]{abc})^3$，故 $abc\leqslant 1$.

8 由二维三角不等式得

$$\begin{aligned}&\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\\=&\sqrt{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2}+\sqrt{\left(x+\frac{z}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2}\\\geqslant&\sqrt{\left(x+\frac{y}{2}-x-\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2}\\=&\sqrt{\frac{1}{4}(y^2-2yz+z^2)+\frac{3}{4}(y^2+2yz+z^2)}\\=&\sqrt{y^2+yz+z^2}.\end{aligned}$$

9 由 $abc=1$，有 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=bc+ca+ab$. 由柯西不等式得

$$\left[\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\right]\cdot[a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)]$$

$$\geqslant\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2.$$

于是

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\right]&\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\&\geqslant\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

10 当 $x=y=z=0$ 时，不等式显然成立. 除此之外，x、y、z 中至少有一正一负，不妨设 $xy<0$，则

$$\begin{aligned}6(x^3+y^3+z^3)^2&=6[(x^3+y^3)-(x+y)^3]^2=54x^2y^2z^2\\&=54\mid xy\mid\cdot\mid xy\mid\cdot z^2\leqslant(2z^2+2\mid xy\mid)^3.\end{aligned}$$

而 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=z^2+2\mid xy\mid$，所以

$$(2z^2+2\mid xy\mid)^3=(x^2+y^2+z^2)^3.$$

11 令 $f(x)=ax^2+bx+c$，由题设可知

$$
\begin{aligned}
&|f(0)|=|c|\leqslant 1,\\
&|f(1)|=|a+b+c|\leqslant 1,\\
&|f(-1)|=|a-b+c|\leqslant 1.
\end{aligned}
$$

由于 $cx^2+bx+a=c(x^2-1)+(a+b+c)\dfrac{1+x}{2}+(a-b+c)\dfrac{1-x}{2}$，所以对任意 $x\in[-1,1]$ 有

$$
\begin{aligned}
|cx^2+bx+a|&\leqslant|c||x^2-1|+|a+b+c|\left|\frac{1+x}{2}\right|+\\
&\qquad|a-b+c|\left|\frac{1-x}{2}\right|\\
&\leqslant|x^2-1|+\left|\frac{1+x}{2}\right|+\left|\frac{1-x}{2}\right|\\
&=1-x^2+\frac{1+x}{2}+\frac{1-x}{2}=2-x^2\leqslant 2.
\end{aligned}
$$

12 对于任意 $1\leqslant k\leqslant n$，由于 $1+a_1\geqslant 2\sqrt{a_1}$，$1+a_2\geqslant 2\sqrt{a_2}$，…，$1+a_k\geqslant 2\sqrt{a_k}$，所以

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)\geqslant 2^k\sqrt{a_1a_2\cdots a_k}\geqslant 2^k.$$

于是
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}.$$

令 $S=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^k}$，则 $2S=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^{k-1}}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{k+1}{2^k}$，从而

$$S=2S-S=1-\frac{n}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}=2-\frac{n}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}<2.$$

于是得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)}\leqslant S<2.$$

第3讲

最大值和最小值

1 15. 由题设知 $0 < p \leqslant x \leqslant 15$，从而

$$x - p \geqslant 0,\ 15 - x \geqslant 0,\ p + 15 - x > 0.$$

因此 $f(x) = (x-p) + (15-x) + (p+15-x) = 30 - x.$

其在区间 $[p, 15]$ 上最小值为 $f(15) = 15.$

2 2.
$$\begin{aligned}(x+y)(x+z) &= yz + x(x+y+z)\\ &\geqslant 2\sqrt{yz \cdot x(x+y+z)} = 2.\end{aligned}$$

3 $\frac{25}{4}$. $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right) = ab + \frac{1}{ab} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant ab + \frac{1}{ab} + 2 = ab + \frac{1}{16ab} + \frac{15}{16ab} + 2 \geqslant \frac{5}{2} + \frac{15}{4(a+b)^2} = \frac{25}{4}.$

4 $\frac{32}{27}$.

$$\begin{aligned}y &= (\cos x + 1)(1 - \cos x)^2\\ &= 4(\cos x + 1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x\right)\\ &\leqslant 4 \cdot \left[\frac{\cos x + 1 + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x\right)}{3}\right]^3 = \frac{32}{27}.\end{aligned}$$

5 $\frac{13}{3}$. 由 $x+y+z=5$，有 $(x+y)^2 = (5-z)^2$. 由 $xy + yz + zx = 3$，有 $xy = 3 - z(5-z)$. 于是有

$$\begin{aligned}(x-y)^2 &= (x+y)^2 - 4xy = (5-z)^2 - 4[3 - z(5-z)]\\ &= (13-3z)(1+z) \geqslant 0.\end{aligned}$$

解得 $-1\leqslant z\leqslant \frac{13}{3}$，且当 $x=y=\frac{1}{3}$ 时，$z=\frac{13}{3}$.

6 $\frac{\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{2})$. $\left(\sqrt{\frac{1}{2}-x}\right)^2+\left(\sqrt{x-\frac{1}{3}}\right)^2\leqslant[f(x)]^2\leqslant 2\left[\left(\sqrt{\frac{1}{2}-x}\right)^2+\left(\sqrt{x-\frac{1}{3}}\right)^2\right]$，所以 $a=\sqrt{\frac{1}{3}}$，$b=\sqrt{\frac{1}{6}}$.

7 $9+\sqrt{135}$. 因 $(x+y)^2=9(\sqrt{y+2}+\sqrt{x+1})^2\leqslant 18\cdot[(y+2)+(x+1)]$，有 $(x+y)^2-18(x+y)-54\leqslant 0$，解得 $x+y\leqslant 9+\sqrt{135}$，等号当 $x=5+\frac{\sqrt{135}}{2}$，$y=4+\frac{\sqrt{135}}{2}$ 时取得.

8 0. 易知 $0<a, b, c<1$，且 $a+b+c=1$. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$（当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时取等号），即 $9abc\leqslant ab+bc+ca=\frac{1}{2}[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]=\frac{1}{2}[1-(a^2+b^2+c^2)]$，即 $a^2+b^2+c^2+18abc\leqslant 1$.

9 考虑当 S 最大取什么值时同时满足三个不等式：$x\geqslant S$，…①；$y+\frac{1}{x}\geqslant S$，…②；$\frac{1}{y}\geqslant S$，…③；且其中至少有一个取等号.

因为 $x, y\in\mathbf{R}^+$，所以 $S>0$. 由③得 $y\leqslant\frac{1}{S}$；由①得 $\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{S}$. 由②得 $S\leqslant\frac{1}{x}+y\leqslant\frac{2}{S}$，即 $S^2\leqslant 2$，$S\leqslant\sqrt{2}$.

另一方面，当 $x=\sqrt{2}$，$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，有 $S=\sqrt{2}$. 故 $S_{\max}=\sqrt{2}$.

10 因为 $a=x_1+x_2+x_3\geqslant 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3}=3\sqrt[3]{a}$，所以，$a\geqslant 3\sqrt{3}$. 由 $3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\leqslant(x_1+x_2+x_3)^2$，有 $3b\leqslant a$. 所以