广义函数简史

◆李 斐 王 昌 编著

中国工信出版集团

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

广义函数简史

李 斐 王 昌 编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书论述了广义函数理论创建的背景、过程、原因，以及这一理论对线性偏微分方程理论发展的影响。这不仅有助于人们理解泛函分析发展的历程，而且为数学家的科研工作提供了一种富有启发性的模板和案例，具有理论和现实意义。本书以“为什么数学”为切入点，从主、客观两个方面论述了施瓦兹能够成功创建广义函数理论、有幸成为广义函数理论奠基者的原因，以便使人们更全面地理解和看待数学理论的发展，更深入地理解这一理论。

本书可作为高等院校相关专业的高年级本科生和研究生的参考教材，也可供从事近现代数学史研究的工作者、广义函数和泛函分析的工作者以及教授广义函数和泛函分析课程的教师阅读参考。

图书在版编目（CIP）数据

广义函数简史 / 李斐，王昌编著. — 北京：电子工业出版社，2018.6

ISBN 978-7-121-34239-4

I. ①广… II. ①李… ②王… III. ①广义函数一研究 IV. ①O177.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 106126 号

策划编辑：冯小贝

责任编辑：冯小贝

印　　刷：北京虎彩文化传播有限公司

装　　订：北京虎彩文化传播有限公司

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编：100036

开　　本：787×980　1/16　印张：9.5　字数：155 千字

版　　次：2018 年 6 月第 1 版

印　　次：2018 年 6 月第 1 次印刷

定　　价：39.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：fengxiaobei@phei.com.cn。

前　言

20 世纪 40 年代末，法国数学家施瓦兹在前人研究工作的基础上建立的广义函数理论(他称其为“分布理论”)是泛函分析的一个重要发展。这一理论因数学与物理学的发展需要而产生。这一理论的建立不仅丰富了泛函分析，而且促进了 20 世纪以及未来数学和物理学的发展，如加快了偏微分方程理论发展的步伐、奠定了量子力学研究的基础等。

广义函数概念的引入标志着函数概念进入了新的发展阶段，施瓦兹《分布理论》一书的出版，标志着广义函数理论作为新分析学分支的诞生。对广义函数理论创建的过程、原因、影响以及相关历史问题进行研究具有重要意义。首先，这一研究是泛函分析史的重要组成部分，有助于我们更全面地理解整个泛函分析的历史发展进程。其次，有助于我们理解施瓦兹的思想，进而为数学家的科研工作提供一种可借鉴的思路或方法，同时也为理解近现代数学思想的传承演变提供重要的参考资料。最后，历史是教学的指南，通过研究广义函数理论的历史，为泛函分析和广义函数理论的教学提供更全面的历史背景，有助于相关专业的学习者更加深刻地理解其思想脉络。

这本《广义函数简史》是在已有研究成果的基础上，通过研读海维赛德、狄拉克、索伯列夫、施瓦兹、马尔格朗日和赫尔曼德尔等物理学家、数学家的原始文献及其相关研究文献，从“是什么”“如何做”和“为什么”这三个逐渐递进的数学史研究角度，对广义函数建立的过程、形成的原因等问题进行详细论述而完成的。书后详细列出了相关参考文献，以便感兴趣的读者进行查阅，同时对文献作者表示诚挚的敬意和感谢。

本书力图全面、合理地描绘并呈现出广义函数理论建立的历史过程和原因。首先探究施瓦兹在什么问题的刺激下，以什么为灵感，如何引入分布概念的。接着对施瓦兹的相关原始文献进行剖析，探析蕴含在其工作之中的深刻思想和方法，展示他在这种思想和方法的指导下做出的具体工作。继而从数学背景、时代背景、数学传统以及科研目标等主、客观方面，探讨施瓦兹能够成功创建

分布理论的原因；分析了虽然索伯列夫先于施瓦兹近十年之久引入了广义函数的泛函定义、发展了相关运算，但是广义函数理论的奠基者却是施瓦兹而不是索伯列夫的历史必然性。最后简要论述了广义函数理论产生的影响及其进一步发展，着重论述这一理论对线性偏微分方程理论的影响。

本书对广义函数的发展历程及施瓦兹等人为此做出的贡献和产生的重大意义给予了详细阐述，对学习泛函分析、研究泛函分析史有很大帮助，值得相关专业的高年级本科生、研究生以及数学史工作者和爱好者阅读。

感谢家人的支持，让我安心完成书稿；感谢恩师曲安京教授的指导和帮助；感谢电子工业出版社谭海平先生和冯小贝编辑的帮助以及珍贵意见；感谢国家自然科学基金(11726019)以及西北大学科学史学科建设经费的资助。
基于作者水平有限，书中难免有不足之处，感谢读者给予批评指正(E-mail：nancong1987@163.com)。

李斐　王昌

2018 年 1 月于西安

目　录

第1章　狄拉克与δ函数

数学与物理学之间是相互促进、相互发展的。自牛顿(I. Newton，1643—1727)时代起，物理学家就借助广泛的数学工具来研究物理现象的数学模型——数学物理问题。反过来，数学物理的研究亦刺激了数学的发展，尤其是理论物理学的不断发展要求“更高的数学”作为其理论基础，这就为数学科学提供了强大的发展动力。

17世纪，英国数学家、物理学家牛顿和莱布尼茨(G. W. Leibniz，1646—1716)在前人数学思想的积累与指导下创立了微积分。这一数学分支的建立是科学技术发展史上的大事件，被誉为人类文明史上的划时代事件。人们利用这一卓有成效的数学工具描述了许多新的自然现象，取得了前所未有的成就。那时，人们普遍认为描述自然现象的函数总是足够光滑的，函数的光滑性似乎是大自然的和谐反映。

然而，随着数学的进一步发展，人们逐渐意识到不光滑函数的存在。1861年，德国数学家魏尔斯特拉斯(K. T. W. Weierstrass，1815—1897)给出了一个处处连续、处处不可微的函数$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b^n\cos(a^nx\pi)$。19世纪中期，人们已经知道并不是任意一个函数都能进行微分、积分运算，许多运算只能在特定的条件下进行。

诚然，随着古典分析学的不断发展，我们不得不承认其直观性减弱了，作为描述自然现象的工具其灵活性也降低了，这便迫使数学家不得不考虑推广已有函数概念的范围。也就是说，已有函数概念已经无法适应数学科学自身的发展，数学家需要思考如何对其进行推广，甚或是引入新的数学对象。另一方面，经典函数概念已经无法满足物理学的发展，尤其是量子场理论，这便使物理学家开始寻求新的数学对象来开展学术研究。

19世纪末，英国电子工程师海维赛德(O. Heaviside，1850—1925)在“数学物理中的算子”一文中大胆引进并使用了没有得到数学证实的算子演算法则，其中要求对在原点处不连续的海维赛德函数进行求导，该函数的导数即为狄拉

克函数$\delta(x)$。20 多年之后，英国物理学家狄拉克(P. A. M. Dirac，1902—1984)在量子力学研究过程中直接引入了δ函数。很快，数学家便从纯粹的数学角度指出狄拉克函数是毫无意义的。事实上，狄拉克自己也很清楚δ函数在经典函数定义下并不是一个函数，但是用它的确能够有效地处理物理学问题——这暴露出了经典函数概念的局限性。

1.1 海维赛德的算子演算

海维赛德(见图 1.1)是自学成才的英国电气工程师、物理学家和数学家。他的兴趣广泛，极度地享受阅读并对学术研究饱含着争辩和任性的风格。他是哥廷根大学的荣誉博士，是第一位获得法拉第奖的物理学家，并且是英国皇家学会的会员。

图 1.1 海维赛德(O. Heaviside，1850—1925)

海维赛德的主要科学贡献在于发展并重新形成了英国物理学家麦克斯韦(J. C. Maxwell，1831—1879)的电动力学，他的数学思想正是在这一物理研究活

动的背景下产生的。他引入了求解微分方程的数学方法(等价于拉普拉斯变换)，根据电磁力和能量流重述了麦克斯韦场方程，发表了很多电磁学文章①。

微分算子满足结合律和分配律，故莱布尼茨的微分记号使数学家可以把微分算子看作不依赖所作用的函数的代数量，这一思想为海维赛德发展其符号运算法则提供了基本保障。另外，海维赛德在发展他的算子演算之前，已经从英国数学家布尔(G. Boole，1815—1864)的著作《微分方程讲义》中获得了用抽象代数方法处理运算微积分的知识。正是在这些思想的基础上，海维赛德于 19 世纪末提出了他的符号运算法则，引进了海维赛德函数和单位阶跃函数。

1.1.1　电磁学的贡献，算子演算的源泉

海维赛德出生于英国伦敦卡姆登镇普伦德街。孩提时患过猩红热，损伤了听力，这导致他与同学的关系不够融洽，童年并不快乐。然而，他的学习成绩却相当不错，1865 年时位于学校 500 名学生中的第 5 名。遗憾的是，出于家庭的原因，16 岁之后他就再也没有接受过正规的学校教育。即便如此，基于对知识的渴望，他自学了莫尔斯电报密码学、电学，以及丹麦语和德语。

青年时，海维赛德想成为一名电报员，并幸运地得到了叔叔惠斯通(C. Wheatstone，1802—1875)的帮助。惠斯通是位英国物理学家，是电报和电磁学领域的知名专家，是 19 世纪 30 年代中期第一台商业电报机的发明者之一。1867 年，惠斯通介绍海维赛德与他的哥哥亚瑟(Arthur)一起工作，亚瑟那时正在经营惠斯通位于英格兰纽卡斯尔的一家电报公司。第二年，海维赛德便到丹麦从事电报员工作，因在工作中的飞速进步而于 1871 年来到英格兰纽卡斯尔大北电报公司工作，当时该公司正在通过英国承包商铺设从纽卡斯尔到丹麦的电缆。

尽管海维赛德的听力越来越糟糕并且依旧坚守在电报员的岗位上，但是他却在工作之余进行电学研究，同时发表电学文章。22 岁那年，他在知名杂志上发表了一篇学术论文，文中提出了使用电流计和电池测量电阻的最佳惠斯通电桥方法，这一方法赢得了包括汤姆森(W. Thomson，1824—1907)在内的许多物理学家的肯定，尤其是没有成功解决该代数问题的物理学家。

① 这些文章后来基本都收录在《电学文章》和《电磁学理论》(共三卷)这两部著作之中，其中《电学文章》主要包含了 1873—1891 年的文章，《电磁学理论》则收录了 1891—1912 年的文章。

麦克斯韦(见图 1.2)的经典之作——《电磁学专著》，对海维赛德产生了深远影响。海维赛德有幸在 1873 年看到这一巨著时，便对它产生了浓厚兴趣，并因此放弃了电报员的工作，潜心致力于该理论的研究。对此，他在年迈时有这样的回忆：

“记得我第一次看到这部伟大专著时，我还是一个年轻人……我认为这是一部卓越的、非常卓越的、最卓越的著作，其中蕴含着巨大的潜能……我下决心一定要吃透这部著作，并为之付出了实际行动。那时我的知识极其贫瘠，没有数学分析的知识，仅在学校学过代数和三角学，且绝大部分已经遗忘了。因此，我花费了好几年时间，才能尽自己最大的可能理解这部著作。随后，我便把麦克斯韦理论放到一边，跟着自己的节奏走，取得了更快的进步……可以这样讲，我按照自己对麦克斯韦理论的理解，传扬着这部著作的真谛。”

图 1.2 麦克斯韦(J. C. Maxwell，1831—1879)

海维赛德还促进了传输线理论——我们现在熟知的“电报方程”——的发展，从而加快了电报机实现的速度。他从数学上指出，电报线上均匀分布的电感将有助于减小信号的衰减和扰动，同时在电感系数足够大而阻抗不是很高的情况下，电报线上传输的各个频率的电流信号具有相同的速度，此时的电报线路是无扰的。

19 世纪 80 年代后期到 90 年代前期，海维赛德对物理学的贡献主要集中于以下两个方面。一方面，他致力于电磁质量的研究，于 1889 年首次提出了作用

于运动带电粒子的磁力的正确术语，即我们现在所称的洛伦兹力。另一方面，他在 1902 年预言大气层中存在着一个导电层，它使无线电信号沿着地球曲率传播，这即为后来被命名的“海维赛德层”。当无线电脉冲垂直向上传输，接收到反射层返回的脉冲时，这个预言便被证实了。英国物理学家阿普尔顿(E. V. Appleton，1892—1965)正是因为证实了该电离层的存在，于 1947 年荣获诺贝尔物理学奖。

海维赛德把数学看作与物理科学一样的实验科学，物理直觉常常指引着他的数学推理。正如他所言：

“在研究的一开始，我们必定是通过直觉而不是严格的规则来进行研究的。如同在物理学中一样，在数学中我们首先必须知道事情是如何进行的。当我们明白了事情是如何进行的之后，我们或许能够理解事情发展过程的含义。”

基于电磁学问题的研究，海维赛德发展了向量方法和向量微积分，鼓励该方法的运用。出于对海维赛德在电磁现象数学描述方面取得的成就表示认可，英国皇家学会在 1891 年选举他为会员，这可能是他获得的最大荣誉。第二年，英国皇家学会还在其相关的哲学杂志上为海维赛德向量方法和电磁理论留出了五十多页的版面。

1884 年，海维赛德把麦克斯韦电磁学公式从原来烦琐的形式简述成现代的向量术语，运用向量微积分中的旋度和散度算子，把原来含有 20 个未知数的 20 个方程中的 12 个减少到含有两个未知数的 4 个微分方程。这就是我们现在熟知的麦克斯韦方程组，它描述了电荷和磁场的性质，以及它们之间的关系——电磁场。诚然，我们现在所称的麦克斯韦方程组实际上是海维赛德方程组。

继而，他通过引入海维赛德阶梯函数，模拟了电路中的电流，成为第一位引入单位脉冲函数的科学家；发明了解线性微分方程的算子演算方法，提出了一个求解微分方程的方法，运用该方法成功求解了常系数常微分方程及一些偏微分方程。海维赛德算子演算方法的基本思想是：用变量 p 替换微分算子 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$，把微分方程转化成代数方程并求解，再通过换算表转换代数方程的解，得到原微分方程的解，从而求解从电路理论中得到的微分方程。英国数学家惠特克(E. T. Whittaker，1873—1956)对海维赛德在算子演算方面的贡献有这样的评价：

“海维赛德的算子演算、庞加莱(J. H. Poincaré，1854—1912)的自守函数和里奇(Ricci)的张量计算，堪称是19世纪最后25年里最重要的数学进展。它们的应用、推广及论证是当今数学活动的重要组成部分。”

虽然海维赛德的算子演算方法在求解微分方程上取得了很大成功，但是该方法缺乏严谨性，这一点与19世纪末追求严格化的数学家的观点格格不入。许多科学家都曾质疑、反对海维赛德的这一做法，剑桥大学的数学家就对他不严格地使用发散级数的做法感到非常愤怒，并因此拒绝发表他的一系列文章。譬如，伯恩赛德(W. Burnside，1852—1927)拒绝接受海维赛德提交给《英国皇家学会学报》的一篇关于算子演算的论文，拒绝的理由是文章含有错误的内容、证明具有不可挽救的错误。再如，泰特(P. G. Tait，1831—1901)支持四元法，反对海维赛德的向量法，常常给《自然》杂志写信反对海维赛德的方法。然而，对于这些异议，海维赛德有这样经典的回应：

“数学是一门实验科学，定义不是首先出现的，而是后来引入的……我不会因为不懂消化过程就拒绝我的晚餐。”

所幸的是，并非所有科学家都只关注海维赛德算子演算的不严密性，也有一些科学家注意到他研究工作中值得认可和称赞的地方。比如，作为电气工程师协会的主席，汤姆森在1889年发表就职演讲时就把海维赛德的工作称为权威；洛奇(Lodge)向《自然》杂志写信，这样赞许海维赛德：

“……海维赛德对电磁波的理解、研究的深入程度迄今无人可及。”

1.1.2 符号运算法则与 δ 函数

海维赛德在研究电磁学问题时提出了符号运算法则，引进了海维赛德函数及其导数，运用这一运算法则成功地求解了一些微分方程，尤其是常系数微分方程。现在，我们通过《电磁学理论》第二卷中的两个实例来考察他的算子演算。

在研究电路问题时，海维赛德把电路系统中的电阻算子定义为：把电流 C 转换成电压 e 的算子 Z，即 $e=ZC$ 或 $C=\frac{1}{Z}e$。纯电阻 R（电导 $\frac{1}{K}$）的电阻算子是

$R\left(\dfrac{1}{K}\right)$，自感线圈 L 的电阻算子是 $Z = L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，电容为 S 的电容器的电阻算子是 $Z = \dfrac{1}{S}\int_0^t \cdot \mathrm{d}t$。然后，他记 $p = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，$p^{-1} = \int_0^t \cdot \mathrm{d}t$，则自感线圈和电容器的电阻算子可分别记为 Lp 和 $\dfrac{1}{S}p^{-1}$。

例 1　海维赛德考察被电动势 e 所作用的内阻为 R 的线圈 L 和一个漏电的电容器。他想通过 e 来确定 C。通过一般准则，他将电阻与电阻算子联系起来，得到图 1.3 所示的连接系统的电阻算子。

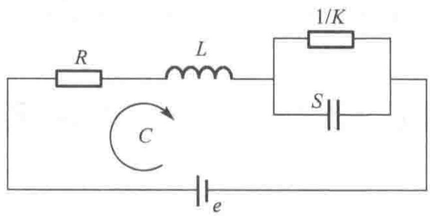

图 1.3　例 1 的电路图

首先，他发现漏电电容器的电阻算子 Z' 可由电容器 $\dfrac{1}{Sp}$ 和与其并联的电阻 $\dfrac{1}{K}$ 来确定，即由 $\dfrac{1}{Z'} = K + Sp$ 可得 $Z' = \dfrac{1}{K + Sp}$，故总电阻算子 $Z = R + Lp + (K + Sp)^{-1}$。因此，$C = \dfrac{e}{Z} = \dfrac{e}{R + Lp + (K + Sp)^{-1}}$，称为所求问题的演算解。

然后，海维赛德的目标是把这个演算解转化成关于 t 的函数(真解)。也就是说，消去演算解中的 p 和 p^{-1}。当 e 是简谐振动($e = \sin nt$)时，在 $K = S = 0$ 的情况下，海维赛德这样来消去演算解中的 p 和 p^{-1}，如他所述：

“在这种情况下，对于周期解，事情很简单。借助性质 $p^2 = -n^2$ 和 $p = ni$，当 e 已知时便可把电阻算子简化成标准形式 $a + bp$……”

因为 $C = \dfrac{e}{R + Lp} = \dfrac{(R - Lp)e}{R^2 + L^2n^2}$，所以若 $e = \sin nt$，则 $C = \dfrac{R\sin nt - Ln\cos nt}{R^2 + L^2n^2}$。

如果在 $t = 0$ 时 e 是一个不断的外力，那么海维赛德用这样的技巧来处理演算解(再次令 $K = S = 0$)：按照 p 的降幂或升幂展开演算解。因为

$$C=\frac{e}{R+Lp}=\frac{e}{Lp\left(1+\frac{R}{Lp}\right)}=\frac{1}{R}\left\{\frac{R}{Lp}-\left(\frac{R}{Lp}\right)^2+\left(\frac{R}{Lp}\right)^3-\cdots\right\}e^{①} \tag{1.1}$$

借助 $p^{-n}1=\frac{t^n}{n!}$ ②，则式(1.1)可以转化为 $C=\frac{e}{R}\left\{\frac{Rt}{L}-\frac{1}{2!}\left(\frac{Rt}{L}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{Rt}{L}\right)^3-\cdots\right\}$，所以可得 $C=\frac{e}{R}\left(1-\exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)\right)$。他还按照 p 的升幂来展开演算解，即 $C=\frac{e}{R+Lp}=\frac{1}{R}\left(1-\frac{Lp}{R}+\left(\frac{Lp}{R}\right)^2-\cdots\right)e$。若 $t>0$ 时 e 是常数，则海维赛德假设 p^ne 为零，从而有 $C=\frac{e}{R}$。另外，海维赛德注意到当 $t\to\infty$ 时，$C=\frac{e}{R}$ 是 $C=\frac{e}{R}\left(1-\exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)\right)$ 的渐近展开。

例 2 海维赛德考察被电动势 $e=H(t)$ 作用的半无限电缆和具有电阻算子 Z 的连接系统，如图 1.4 所示。

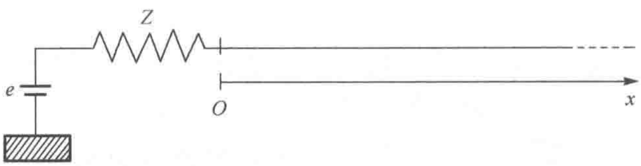

图 1.4 例 2 的电路图

首先，海维赛德发现电势 $V(x,t)$ 和电流 $C(x,t)$ 之间存在这样的关系③：

$$-\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}=SpV\,,\quad -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=RC \tag{1.2}$$

其中，S 是静电电容，R 是单位长度的电阻。消去 C，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}=RSpV=q^2V \tag{1.3}$$

其中定义 $q^2=RSp$。把 p 看成常数，他得到式(1.3)的演算解 $V(x,t)=A\mathrm{e}^{qx}+B\mathrm{e}^{-qx}$，

① 按照 p 的降幂展开。

② 海维赛德在这里使用的记号 1 即为海维赛德函数 $H(t)$。

③ 海维赛德在这里忽略了电缆中的自感。

其中 A 和 B 是关于 t 的任意函数。再通过边界条件 $x=0$ 和 $x=\infty$，则有 $V(x,t)=V_0e^{-qx}$，其中 V_0 是在 $x=0$ 处的外加电动势。

通过式(1.2)和 $V(x,t)=V_0e^{-qx}$，他得到 $C=\dfrac{q}{R}e^{-qx}V_0=C_0e^{-qx}$，其中 C_0 表示电缆末端的电流。再对 $V_0=\dfrac{R}{q}C_0$ 应用 $q^2=RSp$，得 $V_0=\dfrac{R}{(RSp)^{\frac{1}{2}}}C_0=\left(\dfrac{R}{Sp}\right)^{\frac{1}{2}}C_0$，因而电缆的电阻算子是 $\left(\dfrac{R}{Sp}\right)^{\frac{1}{2}}$。

因此，若在外部电压的作用下，把 Z 放于电缆和地面之间，则可用 $C_0=\dfrac{e}{Z+\left(\dfrac{R}{Sp}\right)^{\frac{1}{2}}}$ 来表示通过 Z 并进入电缆的电流。之所以可以这么做，是因为算子可以像电阻那样是可加的。

另一方面，借助前面的结果 $V_0=\left(\dfrac{R}{Sp}\right)^{\frac{1}{2}}C_0$，可由 $C_0=\dfrac{e}{Z+\left(\dfrac{R}{Sp}\right)^{\frac{1}{2}}}$ 得 $V_0=\dfrac{e}{1+Z\left(\dfrac{Sp}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}$，即得到了关于 e 的 V_0（电缆始端的势）。

接着，海维赛德假设 Z 是纯电阻 r，e 在 $t=0$ 处是恒定外力，即 $e=eH(t)$。然后，他按 p 的升幂展开得到 $V_0=\left\{1-r\left(\dfrac{Sp}{R}\right)^{\frac{1}{2}}+r^2\dfrac{Sp}{R}-r^3\left(\dfrac{Sp}{R}\right)^{\frac{3}{2}}+\cdots\right\}e$。当 n 是自然数时，他证明 $p^ne=0$，从而得到

$$V_0=\left(1-r\left(1+\frac{r^2Sp}{R}+\frac{r^4S^2p^2}{R^2}+\cdots\right)\left(\frac{Sp}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\right)e \tag{1.4}$$

显然，海维赛德在这里遇到了分数阶微分问题。对于这个问题，他凭借经验进行处理，证明$p^{\frac{1}{2}}H(t)=(\pi t)^{-\frac{1}{2}}$。借助$p^{\frac{1}{2}}H(t)=(\pi t)^{-\frac{1}{2}}$，则可由式(1.4)得

$$V_0=e-er\left(\frac{S}{R\pi t}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{r^2S}{2Rt}+1\cdot 3\left(\frac{r^2S}{2Rt}\right)^2-\cdots\right\} \tag{1.5}$$

事实上，在没有使用“逐渐级数”这个术语的情况下，当$t\to\infty$时，海维赛德按照他的方式由式(1.5)得到了关于$V(t)$的渐近级数。对于式(1.5)，他有这样的论述：

“当t足够小而使原来级数不收敛时，式(1.5)是不适宜的。据说每种毒药都有解药，并且一些业余植物学家声称可以在毒药附近找到解药。对此，我们在这里给出一个例证：式(1.5)的解药是以另外一种方式处理$V_0=\dfrac{e}{1+Z\left(\dfrac{Sp}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}$。”

随后，海维赛德按p的降幂展开$V_0=\dfrac{e}{1+Z\left(\dfrac{Sp}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}$，得到

$$V_0=\left(\frac{R}{r^2Sp}+\left(\frac{R}{r^2Sp}\right)^2+\cdots\right)\left(\frac{r^2Sp}{R}\right)^{\frac{1}{2}}e-\left(\frac{R}{r^2Sp}+\left(\frac{R}{r^2Sp}\right)^2+\cdots\right)e$$

同理，运用$p^{\frac{1}{2}}H(t)=(\pi t)^{-\frac{1}{2}}$可得

$$V_0=2e\left(\frac{Rt}{r^2S\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{2Rt}{3r^2S}+\frac{1}{3\cdot 5}\left(\frac{2Rt}{r^2S}\right)^2+\cdots\right\}-e\left(\exp\frac{Rt}{r^2S}-1\right) \tag{1.6}$$

海维赛德对此解说道：

“现在不难看出，当t的值较小时我们便可容易地计算V_0。但是当t的值较大时，式(1.6)是不适用的。因此，我们可以把式(1.5)看成毒药，将式(1.6)看成解药。它们是相互补充的，而不是相互矛盾的。”

现在回过头来看例 1，易知当$t\to\infty$时，$C=\dfrac{e}{R}$是$C=\dfrac{e}{R}\left(1-\exp\left(-\dfrac{Rt}{L}\right)\right)$的