名师优学
高考系列丛书

决胜高考数学
压轴题（文科）

王芝平 李彭龄 许 雪 编著

● 数学特级教师团队 ● 全国高考命题研究专家

诠释命题要点 归纳题型特征 解析真题精髓 分享解题智慧

中国科学技术大学出版社

名师优学

高考系列丛书

决胜高考数学

压轴题（文科）

王芝平　李彭龄　许　雪　编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书通过剖析近几年全国卷和地方卷的部分高考数学压轴题，归纳总结了解答压轴题所涉及的基础知识、基本技能、基本思想和基本经验。把令人生畏的压轴题解法简单化、模式化、规范化，并精选了部分高考题和模拟题(含参考解答)供读者演练，以达到“做一题，通一类”“向前一小步，能力一大步”，吃透压轴题，决胜高考创奇迹．本书适合高三学生第二轮复习时使用，对于优秀的高一、二年级的学生也有较大的帮助，当然也可以作为教师的教学参考用书．

图书在版编目(CIP)数据

决胜高考数学压轴题(文科)/王芝平，李彭龄，许雪编著．—合肥：中国科学技术大学出版社，2016．12

ISBN 978-7-312-04035-1

Ⅰ．决…　Ⅱ．①王…　②李…　③许…　Ⅲ．中学数学课—高中—题解—升学参考资料　Ⅳ．G634．605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 211926 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷　安徽省瑞隆印务有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　787 mm×1092 mm　1/16
印张　18．75
字数　480 千
版次　2016 年 12 月第 1 版
印次　2016 年 12 月第 1 次印刷
定价　58．00 元

前　言

现在放在你面前的《决胜高考数学压轴题(文科)》,是几位作者根据北京市“十二五”立项课题——“基于培养学生创新意识的数学开放性变式学习的实践研究”和“北京市首届中小学名师工程”——“创新取向的高中数学变式教学”的研究成果,结合自己几十年的高考备考经验和对试题的研究体会,精心编写的参考书.作者从近几年的全国各地高考题中,精选出了几十道压轴题,通过抽丝剥茧般的分析,梳理了其中所涉及的知识,剖析了解题的通用策略.希望本书能助你理解数学相关概念、提高数学基本技能、感悟数学思想、积累数学解题基本经验,形成你自己的解决问题的常用策略.

1. 压轴题及其特点

按照《辞海》(1989年版)的解释,“压轴”是戏曲术语,指一台折子戏演出中的倒数第二个剧目.由于其紧压最末一个被称为“大轴”的剧目而得名;而且演压轴戏的一般是戏班挂头牌的主要演员.后来这个术语被移植过来,用以指一张试卷里安排在靠后出现的、比较难的大题目.我们这本书里的压轴题就是指高考数学文、理科试卷最后出现的两三个解答题,而且主要涉及解析几何、函数与导数方面的试题.这类题目表面上看是分数多、难度大、知识面广,实质上,压轴题还有以下特点:

※综合性:在多个核心知识的网络交汇处命制,渗透多个数学思维方法.

※探究性:条件不完备,或结论不确定,或解法不常规,或答案不唯一;这类问题常来源于课本知识的拓展和研究性学习的成果.

※灵活性:在解决问题时,常常在“动与静”“变与不变”“数与形”“特殊与一般”“设参与消参”“设而不求”“正难则反”及“猜想与演绎”,甚至“数学实验”和“数学思维”等辩证思想和方法间巧妙转化与变换.

因而,压轴题在历年高考中,变化无穷,常考常新.这就促使我们去研究,力图帮助你在解决压轴题的“战斗”中,决战而“决胜”!

2. “决胜”的落实

在本书中,对于每一道精选的高考压轴题目,解前有思路分析,寻找合理、简捷、有效的解题途径,表述中有准确、规范的解答示范,解后有反思与启迪以形成超越本题的更加广阔与深入的思路.解答数学高考压轴题的方法与经验千头万绪,归根到底可有下面四句话概括:

※回到定义去.

※有图析图,无图画图.

※设计有效运算.

※抓住本质,莫忘细节.

3. 本书的结构设置

全书分两篇：

解析几何篇——代数运算表其外，几何性质蕴其中；

函数与导数篇——函数问题变无穷，导数应用显神通.

每篇各分 15 章，每章以几道压轴题为例，都取了一个简明、概括的诗一般的题目，用以表述该题的特点，并对解题方法进行精准的“点穴”式的说明，以助同学们对例题有本质上的掌握. 事实上，每节标题的内容，就是当你忘记了具体题目之后应该留在脑海里的内容，这才是你真正学到的浓缩了的精华.

每章例题下设两个板块：

◈板块 1　真题解析

每个真题包括三个部分：

谋定思路有方向；

规范解答不失分；

解后反思要升华.

特别指出，有些高考题目，作者对解答进行了再加工，甚至“向前多走了一步”或“搭了脚手架”，目的是助你“解难释疑”.

◈板块 2　变式练习

我们根据主编老师的“变式研究”的研究成果，结合多年高考备考经验和研究体会，每章精选了 4～6 个高考题或模拟题供同学们练习，目的是希望同学们通过自己的解题实践，消化学习成果，克服“眼高手低”的毛病；在“平淡”中练能力，在“过程”中抓创新. 此外，在有的练习题的参考解答后面，作者写了“反思与启迪”，作为对所学习题目的认识，算是与你一起讨论解法时的“发言”，希望你也提出自己的反思、总结，由“一题”到“一类”，变“似懂”为“真懂”.

4. 作者寄语

“年年岁岁花相似，岁岁年年人不同”.

数学解题无定式，自悟贯通是真谛.

决胜高考压轴题，剖析真题加练习；

细心观察多联想，数学本质莫忘记.

几何代数别分家，计算正确明算理；

举一反三练能力，复习过程创新意.

作　者

2016 年 9 月

目　　录

函数与导数篇——函数问题变无穷,导数应用显神通

解析几何篇

代数运算表其外，几何性质蕴其中

解析几何是通过坐标系用代数方法研究几何问题的一门数学学科,所以探求平面内动点的轨迹方程就自然成为用坐标法解决平面几何问题的第一步.有关动点的几何条件有诸多表现形式,其不同形式有不同的解决方法.本篇将通过一些具体的例子,分析如何用不同的方法解决有关动点轨迹的问题.

1　认清目标明方向,代数运算求方程

圆锥曲线方程是用代数方法研究圆锥曲线几何性质的必要基础,所以求圆锥曲线方程是高考的热点问题,在历年的高考试卷中多次出现.例如在2014年高考的18份新课标文科数学试卷中,涉及求圆锥曲线方程的试卷就有14份之多.下面我们以2013年高考天津卷文科第18题为例探究这类问题的解决途径.

1.1　真题解析

例题　(2013·天津)设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F$,离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$,过点$F$且与$x$轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(Ⅰ)求椭圆的方程;

(Ⅱ)设A,B分别为椭圆的左、右顶点,过点F且斜率为k的直线与椭圆交于C,D两点.若$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=8$,求$k$的值.

谋定思路有方向

1. 关系转化列方程,建立联系可求解

由已知条件列出椭圆基本量a,b,c的方程组,解出a,b,c即可求出椭圆方程.

2. 向量转化有坐标,待定系数力无穷

根据条件列出方程,将$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=8$转化为坐标,解出相应的$k$值即可求解.

规范解答不失分

解析　(Ⅰ)设$F(-c,0)$,由$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,知$a=\sqrt{3}c$.过点$F$且与$x$轴垂直的直线方程为$x=-c$,代入椭圆方程有$\frac{(-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,解得$y=\pm\frac{\sqrt{6}b}{3}$,于是$\frac{2\sqrt{6}b}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,解得$b=\sqrt{2}$.又$a^2-c^2=b^2$,从而$a=\sqrt{3},c=1$.

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

(Ⅱ) 设点 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，则由 $F(-1,0)$ 得直线 CD 的方程为 $y=k(x+1)$. 由方程组 $\begin{cases} y=k(x+1) \\ \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$，消去 y 整理得 $(2+3k^2)x^2+6k^2x+3k^2-6=0$. 于是 x_1,x_2 是这个方程组的两个根，由根与系数的关系(即韦达定理)，得 $x_1+x_2=-\dfrac{6k^2}{2+3k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{3k^2-6}{2+3k^2}$.

因为 $A(-\sqrt{3},0)$，$B(\sqrt{3},0)$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB} &= (x_1+\sqrt{3},y_1)(\sqrt{3}-x_2,-y_2)+(x_2+\sqrt{3},y_2)(\sqrt{3}-x_1,-y_1)\\ &= 6-2x_1x_2-2y_1y_2=6-2x_1x_2-2k^2(x_1+1)(x_2+1)\\ &= 6-(2+2k^2)x_1x_2-2k^2(x_1+x_2)-2k^2\\ &= 6+\frac{2k^2+12}{2+3k^2}.\end{aligned}$$

由已知得，$6+\dfrac{2k^2+12}{2+3k^2}=8$，解得 $k=\pm\sqrt{2}$.

解后反思要升华

本题主要考查椭圆的标准方程及其几何性质、直线的方程、向量的运算等基础知识，考查考生的运算求解能力，以及用方程思想解决问题的能力.

第(Ⅰ)题目标明确，用待定系数法求出椭圆标准方程中的 a,b，这是求圆锥曲线标准方程的基本方法.

解决第(Ⅱ)题的关键是设点 C,D 的坐标，一方面由直线方程与椭圆方程两者构成的方程组得到其横坐标与 k 的关系，另一方面用坐标表示向量而进行运算，与已知条件挂钩. 这是运用解析几何基本思想(几何问题代数化)解题的重要手段.

1.2　变式练习

题 1.1　(2011 · 重庆)如图 1.1 所示，椭圆的中心为原点 O，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，一条准线的方程是 $x=2\sqrt{2}$.

(Ⅰ) 求该椭圆的标准方程；

(Ⅱ) 设动点 P 满足：$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}$，其中 M,N 是椭圆上的点，直线 OM 与 ON 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$，问：是否存在定点 F，使得 $|PF|$ 与点 P 到直线 $l: x=2\sqrt{10}$ 的距离之比为定值？若存在，求 F 的坐标，若不存在，说明理由.

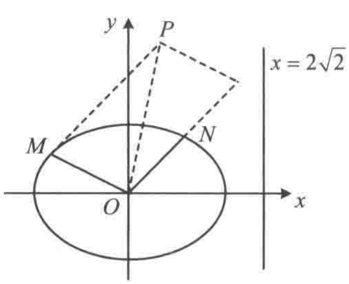

图 1.1

解析　(Ⅰ) 由 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{a^2}{c}=2\sqrt{2}$，解得 $a=2$，$c=$

$\sqrt{2}, b^2 = a^2 - c^2 = 2$. 故椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(Ⅱ) 如图 1.1 所示,设 $P(x, y)$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,则由$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON}$得$(x, y) = (x_1, y_1) + 2(x_2, y_2) = (x_1 + 2x_2, y_1 + 2y_2)$,即 $x = x_1 + 2x_2$, $y = y_1 + 2y_2$.

因为点 M,N 在椭圆$x^2 + 2y^2 = 4$ 上,所以 $x_1^2 + 2y_1^2 = 4$, $x_2^2 + 2y_2^2 = 4$. 从而

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 &= (x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2) + 2(y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_1y_2) \\ &= (x_1^2 + 2y_1^2) + 4(x_2^2 + 2y_2^2) + 4(x_1x_2 + 2y_1y_2) \\ &= 20 + 4(x_1x_2 + 2y_1y_2). \end{aligned} \tag{$*$}$$

设 k_{OM}, k_{ON}分别为直线 OM, ON 的斜率,则由题设知 $k_{OM} \cdot k_{ON} = \frac{y_1y_2}{x_1x_2} = -\frac{1}{2}$,所以 $x_1x_2 + 2y_1y_2 = 0$,于是由($*$)式得 $x^2 + 2y^2 = 20$. 所以点 P 是椭圆$\frac{x^2}{(2\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{10})^2} = 1$上的点,该椭圆的右焦点为 $F(\sqrt{10}, 0)$,离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$,直线 l: $x = 2\sqrt{10}$是该椭圆的右准线. 故根据椭圆的第二定义,存在定点 $F(\sqrt{10}, 0)$,使得$|PF|$与 P 点到直线l 的距离之比为定值.

反思与启迪 (Ⅰ) 根据离心率和准线方程求得 a 和c,则 b 也可求得,从而可求出椭圆的方程.

(Ⅱ) 设出 P, M, N 的坐标,根据题设建立等式,把 M, N 代入椭圆方程,整理求得 $x^2 + 2y^2 = 20 + 4(x_1x_2 + 2y_1y_2)$,设出直线 OM, ON 的斜率,利用题意求得 $x_1x_2 + 2y_1y_2 = 0$,进而求得 $x^2 + 2y^2$ 的值,利用椭圆的第二定义可推断出,存在定点 F 满足题意.

本题考查了椭圆标准方程的求解与椭圆的定值问题,考查学生综合运用知识解决问题能力和运算求解能力.

题 1.2 已知椭圆 C_1: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,椭圆 C_2 以 C_1 的长轴为短轴,且与 C_1 有相同的离心率.

(Ⅰ) 求椭圆 C_2 的方程;

(Ⅱ) 设 O 为坐标原点,点 A, B 分别在椭圆 C_1 和 C_2 上,$\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$,求直线 AB 的方程.

解析 (Ⅰ) 由已知可设椭圆 C_2 的方程为$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{4} = 1 (a > 2)$,其离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,故$\frac{\sqrt{a^2 - 4}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,解得 $a = 4$. 故椭圆 C_2 的方程为$\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$.

(Ⅱ) 设 A, B 两点的坐标分别为(x_A, y_A), (x_B, y_B),则由$\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$及(Ⅰ)知,$O$, A, B 三点共线且点A, B 不在 y 轴上,因此可设直线 AB 的方程为 $y = kx$.

将 $y = kx$ 代入$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 中,得$(1 + 4k^2)x^2 = 4$,所以 $x_A^2 = \frac{4}{1 + 4k^2}$;

将 $y = kx$ 代入$\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$ 中,得$(4 + k^2)x^2 = 16$,所以 $x_B^2 = \frac{16}{4 + k^2}$.

又由$\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$,得 $x_B^2 = 4x_A^2$,即$\frac{16}{4 + k^2} = \frac{16}{1 + 4k^2}$,解得 $k = \pm 1$.

故直线 AB 的方程为 $y=x$ 或 $y=-x$.

反思与启迪　(Ⅰ)求出椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的长轴长、离心率,根据椭圆 C_2 以 C_1 的长轴为短轴,且与 C_1 有相同的离心率,即可确定椭圆 C_2 的方程.

(Ⅱ)设 A,B 的坐标分别$(x_A,y_A),(x_B,y_B)$,根据$\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}$,可设 AB 的方程为 $y=kx$.将该方程分别与椭圆 C_1 和 C_2 联立,求出 A,B 的横坐标,再利用$\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}$,即可求得直线 AB 的方程.

本题考查椭圆的标准方程、直线与椭圆的位置关系问题,解题的关键是掌握椭圆几何量之间关系,联立方程组求解.

题 1.3　(2015·湖南)已知抛物线 $C_1:x^2=4y$ 的焦点 F 也是椭圆 $C_2:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点,$C_1$ 与 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{6}$,过点 F 的直线 l 与 C_1 相交于 A,B 两点,与 C_2 相交于 C,D 两点,且$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$同向.

(Ⅰ)求 C_2 的方程;

(Ⅱ)若$|AC|=|BD|$,求直线 l 的斜率.

解析　(Ⅰ)由 C_1 方程知其焦点 F 的坐标为$(0,1)$,因为 F 也是椭圆 C_2 的一个焦点,所以

$$a^2-b^2=1. \qquad ①$$

又 C_1 与 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{6}$,C_1 与 C_2 都关于 y 轴对称,且 C_1 的方程为 $x^2=4y$,由此易知 C_1 与 C_2 的公共点的坐标为$\left(\pm\sqrt{6},\frac{3}{2}\right)$,所以

$$\frac{9}{4a^2}+\frac{6}{b^2}=1. \qquad ②$$

联立①②得 $a^2=9,b^2=8$,故 C_2 的方程为$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{8}=1$.

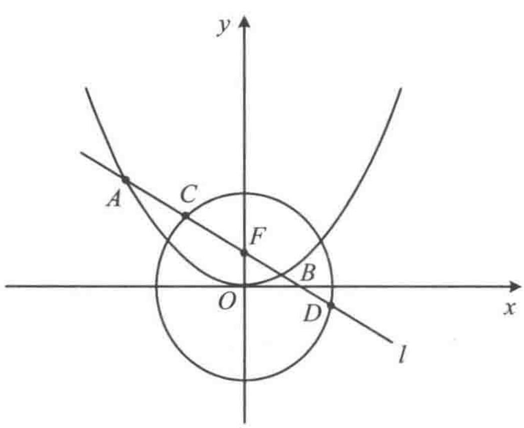

图 1.2

(Ⅱ)如图 1.2 所示,设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$,因$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$同向,且$|AC|=|BD|$,所以$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$,从而 $x_3-x_1=x_4-x_2$,即 $x_3-x_4=x_1-x_2$,于是

$$(x_3+x_4)^2-4x_3x_4=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2. \qquad ③$$

设直线 l 的斜率为 k,则 l 的方程为 $y=kx+1$,由$\begin{cases}y=kx+1\\x^2=4y\end{cases}$,得 $x^2-4kx-4=0$.由于 x_1,x_2 是这个方程的两根,所以

$$x_1+x_2=4k,\quad x_1x_2=-4. \qquad ④$$

由$\begin{cases}y=kx+1\\\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1\end{cases}$,得$(9+8k^2)x^2+16kx-64=0$,而 x_3,x_4 是这个方程的两根,又有

$$x_3+x_4=-\frac{16k}{9+8k^2},\quad x_3x_4=-\frac{64}{9+8k^2}.\qquad ⑤$$

将④⑤代入③,得 $16(k^2+1)=\frac{16^2k^2}{(9+8k^2)^2}+\frac{4\times64}{9+8k^2}$,即 $16(k^2+1)=\frac{16^2\times9(k^2+1)}{(9+8k^2)^2}$,所以 $(9+8k^2)^2=16\times9$,解得 $k=\pm\frac{\sqrt6}{4}$,即直线 l 的斜率为 $\pm\frac{\sqrt6}{4}$.

反思与启迪 (Ⅰ)通过 C_1 方程可知 $a^2-b^2=1$,通过 C_1 与 C_2 的公共弦的长为 $2\sqrt6$ 且 C_1 与 C_2 的图像都关于 y 轴对称可得 $\frac{9}{4a^2}+\frac{6}{b^2}=1$,计算即得结论.

(Ⅱ)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$,$D(x_4,y_4)$,通过 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ 可得 $(x_3+x_4)^2-4x_3x_4=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$,设直线 l 的方程 $y=kx+1$,分别联立直线与抛物线方程、直线与椭圆方程,利用韦达定理计算即可.

本题是一道直线与圆锥曲线相交的综合题,考查椭圆方程以及直线的斜率问题,涉及韦达定理等知识,考查学生的计算能力.考生应注意解题方法的积累.

题 1.4 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt3}{3}$,过右焦点 F 的直线 l 与 C 相交于 A,B 两点.当 l 的斜率为 1 时,坐标原点 O 到 l 的距离为 $\frac{\sqrt2}{2}$.

(Ⅰ)求 a,b 的值;

(Ⅱ)C 上是否存在点 P,使得当 l 绕 F 转到某一位置时,有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 成立?若存在,求出所有的 P 的坐标与 l 的方程;若不存在,说明理由.

解析 (Ⅰ)设 $F(c,0)$,直线 $l:x-y-c=0$,由坐标原点 O 到 l 的距离为 $\frac{\sqrt2}{2}$,则 $\frac{|0-0-c|}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$,解得 $c=1$.又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt3}{3}$,所以 $a=\sqrt3$,$b=\sqrt2$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知椭圆的方程为 $C:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则由题意知,l 过 $F(1,0)$ 且斜率一定不为 0,故不妨设 $l:x=my+1$,代入椭圆方程整理得 $(2m^2+3)y^2+4my-4=0$,显然 $\Delta>0$.

由根与系数的关系(即韦达定理)得

$$y_1+y_2=-\frac{4m}{2m^2+3},\quad y_1y_2=-\frac{4}{2m^2+3}.\qquad ①$$

假设存在点 P,使 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 成立,则其充要条件为:点 P 的坐标为 (x_1+x_2,y_1+y_2),且点 P 在椭圆上,即

$$\frac{(x_1+x_2)^2}{3}+\frac{(y_1+y_2)^2}{2}=1,$$

整理得 $2x_1^2+3y_1^2+2x_2^2+3y_2^2+4x_1x_2+6y_1y_2=6$.

又点 A,B 在椭圆上,即 $2x_1^2+3y_1^2=6$,$2x_2^2+3y_2^2=6$.所以

$$2x_1x_2+3y_1y_2+3=0.\qquad ②$$

将 $x_1x_2=(my_1+1)(my_2+1)=m^2y_1y_2+m(y_1+y_2)+1$ 及①代入②,解得 $m^2=\frac12$,于是

$y_1+y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$或$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x_1+x_2=-\frac{4m^2}{2m^2+3}+2=\frac{3}{2}$，所以 $P\left(\frac{3}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 故存在符合条件的点 P，即当 $P\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$时，$l$：$2x-\sqrt{2}y-2=0$；或当 $P\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$时，$l$：$2x+\sqrt{2}y-2=0$.

反思与启迪　(Ⅰ) 设 $F(c,0)$，则直线 l 的方程为 l：$x-y-c=0$，由坐标原点 O 到 l 的距离求得 c，进而根据离心率求得 a 和 b.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)可得椭圆方程，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，将 l：$x=my+1$ 代入椭圆方程整理得方程 $\Delta>0$. 由韦达定理可求得 y_1+y_2 和 y_1y_2 的表达式，假设存在点 P，使$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$成立，则其充要条件为：点 P 的坐标为(x_1+x_2,y_1+y_2)，代入椭圆方程. 再把 A，B 两点代入椭圆方程，最后联立方程求得 c，进而求得点 P 坐标，求出 m 的值并得出直线 l 的方程.

本题主要考查了椭圆的性质. 处理解析几何题，考生要在“算”上下工夫. 所谓“算”，主要是指算理和算法. 算法是解决问题采用的计算方法，而算理是采用这种算法的依据和原理. 一个是表，一个是里；一个是现象，一个是本质. 有时候算法和算理并不是截然区分的，例如，三角形的面积是用底乘以高的一半来算，或是用两边与夹角的正弦的一半来算，还是分割成几部分来算？在具体处理的时候，考生还要根据具体问题及题意边做边调整，寻找合适的突破口和切入点.

题 1.5　(2015·四川)如图 1.3 所示，椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率是$\frac{\sqrt{2}}{2}$，点 $P(0,1)$在短轴 CD 上，且$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=-1$.

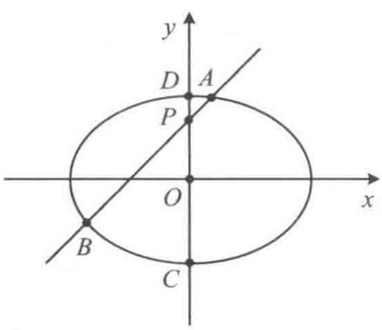

图 1.3

(Ⅰ) 求椭圆 E 的方程；

(Ⅱ) 设 O 为坐标原点，过点 P 的动直线与椭圆交于 A，B 两点. 是否存在常数 λ，使得$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$为定值？若存在，求 λ 的值；若不存在，请说明理由.

解析　(Ⅰ) 由已知，点 C，D 的坐标分别为$(0,-b)$，$(0,b)$. 又点 P 的坐标为$(0,1)$，且$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=-1$，于是$\begin{cases}1-b^2=-1\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2-b^2=c^2\end{cases}$，解得 $a=2$，$b=\sqrt{2}$. 所以椭圆 E 方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(Ⅱ) 当直线 AB 斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y=kx+1$，A，B 的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2). 联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\\ y=kx+1\end{cases}$，得$(2k^2+1)x^2+4kx-2=0$. 其判别式 $\Delta=(4k)^2+8(2k^2+1)>0$，所以 $x_1+x_2=-\frac{4k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=-\frac{2}{2k^2+1}$. 从而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}&=x_1x_2+y_1y_2+\lambda[x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)]\\&=(1+\lambda)(1+k^2)x_1x_2+k(x_1+x_2)+1\end{aligned}$$

$$=\frac{(-2\lambda-4)k^2+(-2\lambda-1)}{2k^2+1}$$

$$=-\frac{\lambda-1}{2k^2+1}-\lambda-2.$$

所以，当 $\lambda=1$ 时，$-\frac{\lambda-1}{2k^2+1}-\lambda-2=-3$. 此时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-3$ 为定值.

当直线 AB 斜率不存在时，直线 AB 即为直线 CD，此时 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=-2-1=-3$. 故存在常数 $\lambda=1$，使得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值 -3.

反思与启迪 （Ⅰ）通过离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，以及 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=-1$，计算即得 $a=2,b=\sqrt{2}$，进而可得结论.

（Ⅱ）分情况对直线 AB 斜率的存在性进行讨论：①当直线 AB 的斜率存在时，联立直线 AB 与椭圆方程，利用韦达定理计算可得当 $\lambda=1$ 时 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-3$；②当直线 AB 的斜率不存在时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-3$.

本题考查椭圆的标准方程、直线方程等基础知识，考查运用推理论证能力、运算求解能力，考查数形结合、化归与转化、特殊与一般、分类与整合等数学思想解决问题的能力，学生在学习和备考过程中应注意解题方法的积累.

题 1.6 在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 到两点 $(0,-\sqrt{3})$，$(0,\sqrt{3})$ 的距离之和等于 4. 设点 P 的轨迹为 C.

（Ⅰ）写出 C 的方程；

（Ⅱ）设直线 $y=kx+1$ 与 C 交于 A,B 两点，k 为何值时，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$？此时 $|\overrightarrow{AB}|$ 的值是多少？

解析 （Ⅰ）设 $P(x,y)$，由椭圆定义可知，点 P 的轨迹 C 是以 $(0,-\sqrt{3})$，$(0,\sqrt{3})$ 为焦点，长半轴长为 $a=2$ 的椭圆. 该椭圆的短半轴长 $b=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$，故曲线 C 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

（Ⅱ）由 $\begin{cases}x^2+\frac{y^2}{4}=1\\ y=kx+1\end{cases}$，消去 y 并整理得 $(k^2+4)x^2+2kx-3=0$，$\Delta=(2k)^2-4\times(k^2+4)\times(-3)=16(k^2+3)>0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{2k}{k^2+4}$，$x_1x_2=-\frac{3}{k^2+4}$. 由 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，得 $x_1x_2+y_1y_2=0$. 而 $y_1y_2=(kx_1+1)(kx_2+1)=k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1$，于是

$$x_1x_2+y_1y_2=-\frac{3}{k^2+4}-\frac{3k^2}{k^2+4}-\frac{2k^2}{k^2+4}+1=\frac{-4k^2+1}{k^2+4}.$$

由 $\frac{-4k^2+1}{k^2+4}=0$，得 $k=\pm\frac{1}{2}$，此时 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$. 当 $k=\pm\frac{1}{2}$ 时，$|x_1+x_2|=\frac{4}{17}$，$x_1x_2=-\frac{12}{17}$.

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(1+k^2)(x_2-x_1)^2},$$