考研数学命题人士豪金系列丛书

2017

双色印刷+全真模拟+精彩解析

考研数学命题人全真终极冲刺8套卷

（数学二）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

北京大学 尤承业 教授 清华大学 徐荣 教授

北京大学 刘德荫 教授 首都师范大学 童武 教授

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

考研数学命题人土豪金系列丛书

2017

双色印刷+全真模拟+精彩解析

考研数学命题人全真终极冲刺8套卷

（数学二）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

北京大学 尤承业 教授 清华大学 徐荣 教授

北京大学 刘德荫 教授 首都师范大学 童武 教授

BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是作者在10多年收集、整理考研数学资料和进行考研数学辅导的基础上,通过对历年试题的精心研究和分析,并结合授课体会和学生的需要全新编写而成的。

本书由来自北京大学、清华大学和中国人民大学的原命题组组长、命题研究专家,以及一线教师组织编写。通过本书,考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌,而且可以方便地了解有关试题和信息,从中发现规律,进一步把握考试特点及命题思路,从容应考,轻取高分。

本书适用于参加研究生入学数学考试的广大考生。

图书在版编目(CIP)数据

2017考研数学命题人全真终极冲刺8套卷. 数学二 / 全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会编著. --北京 : 北京航空航天大学出版社,2016.6

ISBN 978-7-5124-2155-4

Ⅰ.①2… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第124247号

2017考研数学命题人全真终极冲刺8套卷(数学二)

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

责任编辑 王 实

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191) http://www.buaapress.com.cn

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱:bhpress@263.net 邮购电话:(010)82316936

涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1 092 1/16 印张:8 字数:204千字

2016年7月第1版 2016年7月第1次印刷

ISBN 978-7-5124-2155-4 定价:16.80元

前　　言

在考研数学复习的冲刺阶段，实战练习几套全真模拟试卷对于考生巩固复习效果、查漏补缺、克服薄弱环节、适应考试模式有着极为重要的作用。《2017 考研数学命题人全真终极冲刺 8 套卷（数学二）》是考研数学专家团队根据最新发布的全国硕士研究生招生考试数学考试大纲精心打造而成的。试卷涵盖大纲所有知识点，命题思路贴近真题，有助于考生进行有效的自我检测，达到应考的最佳状态。

本书的特点如下：

一、专家团队倾力编写。《2017 考研数学命题人全真终极冲刺 8 套卷（数学二）》作者团队由数位命题组、阅卷组原成员组成，他们有着丰富的命题及阅卷经验，能够直击考研数学命题点，把握考研数学的命题方向。

二、内容全面，紧扣大纲。本书依据最新的全国硕士研究生招生考试数学考试大纲编写，覆盖考试大纲规定的重要知识点，题型、题量、难易程度贴近考研真题，有助于考生适应考试模式，达到最佳应试状态。

三、价格低廉，性价比高。在保证试卷质量的前提下，严格控制定价，使本书成为市面上性价比极高的考研数学模拟卷，保证考生能以极低的价格买到最有帮助的考研书。

由于编写时间仓促，书中难免有错误和疏漏之处，欢迎广大读者和同行批评指正！

预祝广大考研学子在 2017 年全国硕士研究生入学考试中取得优异成绩！

本书编委会

2016 年 4 月

目　　录

第一篇　全真终极冲刺 8 套卷

全真模拟卷(一) ………… 3
全真模拟卷(二) ………… 8
全真模拟卷(三) ………… 12
全真模拟卷(四) ………… 16
全真模拟卷(五) ………… 20
全真模拟卷(六) ………… 24
全真模拟卷(七) ………… 28
全真模拟卷(八) ………… 32

第二篇　参考答案及解析

全真模拟卷(一)参考答案及解析 ………… 39
全真模拟卷(二)参考答案及解析 ………… 49
全真模拟卷(三)参考答案及解析 ………… 58
全真模拟卷(四)参考答案及解析 ………… 69
全真模拟卷(五)参考答案及解析 ………… 80
全真模拟卷(六)参考答案及解析 ………… 89
全真模拟卷(七)参考答案及解析 ………… 98
全真模拟卷(八)参考答案及解析 ………… 109

第一篇

全真终极冲刺8套卷

全真模拟卷(一)

(本试卷满分150分,考试时间180分钟)

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题4分,共32分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求.

(1) 设 $\alpha(x)=\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$, $\beta(x)=x^4+x^5$, $\gamma(x)=\dfrac{\tan x}{x}-1$, $\delta(x)=\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)dt$, 当 $x\to 0$ 时,按照前面一个比后面一个为高阶无穷小排列的次序为 ( )

(A) $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ (B) $\beta,\alpha,\delta,\gamma$ (C) $\gamma,\alpha,\beta,\delta$ (D) $\delta,\beta,\alpha,\gamma$

(2) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{x^2})}=2$ (其中 a,b,c,d 为常数且 $a\neq 0,c\neq 0$),则一定有 ( )

(A) $a=-4c$ (B) $a=4c$ (C) $b=4d$ (D) $b=-4d$

(3) 有四个函数:

$$f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0; \end{cases}$$

$$g(x)=x^2D(x), \text{其中 } D(x)=\begin{cases} 1, & x\in[-1,1]\text{ 中的有理数}, \\ 0, & x\in[-1,1]\text{ 中的无理数}; \end{cases}$$

$h(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)-h(-x)}{2x}=l$ 存在;

$$\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{xe^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

它们在 $x=0$ 处可导的有 （　　）

(A)$f(x)$　　(B)$g(x)$　　(C)$f(x),h(x)$　　(D)$f(x),\varphi(x)$

(4) 定积分 $I=\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{7}\right)dx\quad(a>0)$ 的值为 （　　）

(A)0　　(B)$\frac{\ln7}{2}\pi a^2$　　(C)$-\frac{\ln7}{2}\pi a^2$　　(D)$(\ln7)\pi a^2$

(5) 设 $f(x)$ 满足 $f'(x_0-0)=f'(x_0+0)$，则 （　　）

(A)$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，且 $f'(x_0)=a$

(B)$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，但未必可导

(C)$f(x)$ 存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，但未必连续

(D) 以上结论都不正确

(6) 区域 D 是由 $r=2$ 及弦 $r=\frac{1}{\cos\theta}$ 围成的弓形，则 $I=\iint\limits_D r\cos\theta d\sigma$ 等于 （　　）

(A)$\sqrt{3}$　　(B)$2\sqrt{3}$　　(C)$3\sqrt{3}$　　(D)$4\sqrt{3}$

(7) $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&\frac{1}{3}\\\frac{1}{4}&0&0&0\end{vmatrix}$，则行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的所有元素的代数余子式之和为 （　　）

(A)$-\frac{5}{12}$　　(B)$\frac{5}{12}$　　(C)$-\frac{7}{12}$　　(D)$\frac{7}{12}$

(8) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 是四个4阶矩阵，其中 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$|\boldsymbol{B}|\neq0$，$|\boldsymbol{C}|\neq0$，$\boldsymbol{D}\neq\boldsymbol{O}$，且满足：$\boldsymbol{ABCD}=\boldsymbol{O}$，若 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})+r(\boldsymbol{C})+r(\boldsymbol{D})=r$，则 r 的取值范围是 （　　）

(A)$r<10$　　(B)$10\leqslant r\leqslant12$　　(C)$12<r<16$　　(D)$13<r\leqslant15$

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题4分，共24分.

(9) 已知 $\int_x^{2\ln2}\frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}=\frac{\pi}{6}$，则 $x=$ ________.

(10) 函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a-1$ 恰有两个不同的零点，则 $a=$ ________.

(11) 微分方程 $2(ydx+xdy)+xdx-5ydy=0$ 满足 $y\big|_{x=0}=1$ 的特解为________.

(12) 曲线 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x}{1+x^2-e^{tx}}$，$g(x)=\frac{1}{2}x$ 及 $x=1$ 围成图形的面积等于________.

(13) 由 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$，则

$\mathrm{d}z\Big|_{(1,0,-1)}=$ ________.

(14) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&3\\3&3&a\\0&0&3\end{pmatrix}$ 只有两个线性无关的特征向量，则常数 a 满足的条件为________.

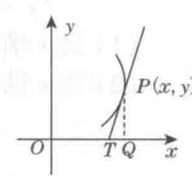
三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导且 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)\,\mathrm{d}x$. 试证:至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

(16)(本题满分 11 分)

如图所示,过点(0,2)求一条曲线,使曲线上任意一点 $P(x,y)$ 的切线 PT 与 x 轴的交点 T 到 P 的距离,等于该切线在 Ox 轴上截距的绝对值 $|OT|$.



(17)(本题满分 10 分)

设 $f(u,v)$ 有 2 阶连续偏导数,且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$. 又 $g(x,y)=f\left[xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right]$. 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(18)(本题满分 10 分)

求函数 $z = x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$、x 轴和 y 轴所围成区域 D 上的最大值与最小值.

(19)(本题满分 11 分)

设 $f(x) = xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$,

(1) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

(2) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

(20)(本题满分 10 分)

求摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$:

(1) 绕 x 轴旋转一周,所得旋转面的面积;

(2) 绕 x 轴旋转一周,所得旋转体的体积.

(21)(本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且对任意的 $x,y \in [0,1]$ 都有 $|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|$. 其中 $M>0$ 是常数. 试证: $\left|\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n}$.

(22)(本题满分 11 分)

已知线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ 2x_1+(a+4)x_2-5x_3=6 \\ -x_1-2x_2+ax_3=-3 \end{cases}$有无穷多个解,而$\boldsymbol{A}$是某个3阶矩阵,$\boldsymbol{\xi}_1=(1,2a,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_2=(a,a+3,a+2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_3=(a-2,-1,a+1)^{\mathrm{T}}$分别是$\boldsymbol{A}$的属于特征值$1,-1,0$的3个特征向量,求矩阵$\boldsymbol{A}$.

(23)(本题满分 11 分)

二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$,它的秩为2.

(1) 求常数t,及将它通过可逆线性变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$化为标准形的矩阵$\boldsymbol{C}$;

(2) 求此二次型的标准形及正、负惯性指数.

全真模拟卷(二)

（本试卷满分150分，考试时间180分钟）

一、选择题：1 ~ 8小题，每小题4分，共32分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求.

(1) 极限 $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{5^n+3}{n}}$ 等于 （　　）

(A)2　　(B)3　　(C)5　　(D)10

(2) 设 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t|\,dt$，则 （　　）

(A) $f(x) = f(x+\pi)$

(B) $f(x) > f(x+\pi)$

(C) $f(x) < f(x+\pi)$

(D) 当 $x>0$ 时，$f(x) > f(x+\pi)$；当 $x<0$ 时，$f(x) < f(x+\pi)$

(3) 当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 （　　）

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　　(B) $\ln\left(\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}\right)$

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

(4) 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x\geq 0, \\ x, & x<0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$

下列四个命题：

(ⅰ) 在 $[-1,1]$ 上 $f(x)$ 存在原函数

(ⅱ) 在 $[-1,1]$ 上 $f(x)$ 存在定积分 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

(ⅲ) 存在 $g'(0)$

(ⅳ) 在 $[-1,1]$ 上 $g(x)$ 存在原函数

正确的是 （　　）

(A)(ⅰ)(ⅱ)　　(B)(ⅲ)(ⅳ)　　(C)(ⅱ)(ⅳ)　　(D)(ⅰ)(ⅲ)

(5) $I = \int_0^{\pi} (5^{\cos x} - 5^{-\cos x})\,dx$ 等于 （　　）

(A)0　　(B)1　　(C) -1　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

(6) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$

则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处, ( )

(A)2 阶偏导数存在,函数也连续

(B)2 阶偏导数存在,但函数不连续

(C)2 阶偏导数不存在,但函数连续

(D)2 阶偏导数不存在,函数也不连续

(7)3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块表示为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,已知 $|\boldsymbol{A}|=5$,则 $|2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3|=$ ( )

(A)25 (B)30 (C)35 (D)40

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\xi}_1=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_2=(2,1,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,t)^{\mathrm{T}}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解向量,其中 $\boldsymbol{b}=(1,3,-2)^{\mathrm{T}}$. 则 ( )

(A) $t=-1$,必有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$. (B) $t=-1$,必有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$.

(C) $t\neq-1$,必有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$. (D) $t\neq-1$,必有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$.

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x+xf(x)}{x^3}=0$,则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3+f(x)}{x^2}=$ __________.

(10) 与微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x+1$ 的所有积分曲线都正交,而且过原点的曲线方程是__________.

(11) 将极坐标下二次积分:$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 交换积分次序得__________.

(12) 曲线 $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x}$ 在 $x=1$ 到 $x=3$ 之间的弧长为__________.

(13) 方程 $yy''+(y')^2=0$ 满足 $y(0)=1,y'(0)=\dfrac{1}{2}$ 的特解为__________.

(14) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 都是 n 阶可逆矩阵,则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=$ __________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

设 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有 2 阶导数,且 $f'(x_0)\neq0$,求极限

$$l=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{f'(x_0)(x-x_0)}\right].$$

(16)(本题满分 10 分)

设 $x+z=yf(x^2-z^2)$，其中函数 $f(u)$ 可微，求 $z\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(17)(本题满分 10 分)

已知 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，试证：$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\,\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\left[\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$.

(18)(本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 为连续函数且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\ln(1+x)}{x^2}=2$，$F(x)=\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t$，又当 $x\to 0$ 时，$F(x)-\dfrac{1}{2}x^2$ 与 bx^k 是等价无穷小量，其中常数 $b\neq 0$，k 是正整数.

(Ⅰ) 求 k 与 b 的值及 $f(0)$；

(Ⅱ) 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，并求 $f'(0)$.

(19)(本题满分 10 分)

设平面图形 A 由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 所围成，求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

(20)(本题满分 11 分)

设 $0 < a < b$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 处可导, 且 $f'(x) \neq 0 (x \in (a,b))$, 试证: 存在 $\xi, \eta, \zeta \in (a,b)$, 使

$$f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta) = (b^2 + ba + a^2) \frac{f'(\zeta)}{3\zeta^2}.$$

(21)(本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 可导, 且满足 $\int_1^x \frac{f(t)}{t^3 f(t) + t} \mathrm{d}t = f(x) - 1$, 求 $f(x)$.

(22)(本题满分 11 分)

设 4 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1+t,1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,2+t,2,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (3,3,3+t,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4 = (4,4,4,4+t)^{\mathrm{T}}$.

(1) t 为何值时 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关?

(2) 当 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时, 求它的一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

(23)(本题满分 11 分)

二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2ax_2x_3$, 经过正交变换化为标准形: $3y_1^2 + 3y_2^2 + ty_3^2$.

(1) 求 a, t 的值;

(2) 求所用的正交变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{PY}$.