高等院校“十三五”规划教材

高等数学

同步辅导与练习(下)

梁宝钰　杨德志 等 编

南開大學出版社
NANKAI UNIVERSITY PRESS

高等院校“十三五”规划教材

高等数学
同步辅导与练习(下)

主　编：梁宝钰　杨德志
副主编：刘　念　高俊勇

南開大學出版社
NANKAI UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导与练习(下) / 梁宝钰，杨德志等编. -- 天津：南开大学出版社，2017.8

ISBN 978-7-310-05465-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①梁… ②杨… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 218707 号

南开大学出版社出版发行

出版人：刘立松

地址：天津市南开区卫津路 94 号　　邮编编码：300071

营销部电话：(022)23508339　23500755

营销部传真：(022)23508542　　邮购部电话：(022)23502200

*

三河市海新印务有限公司印销

全国各地新华书店经销

*

2017 年 8 月第 1 版　　2017 年 8 月第 1 次印刷

787×1092 毫米　16 开本　14.5 印张　324 千字

定价：36.80 元

如遇图书印装质量问题，请与本社营销部联系调换。电话：(022)23507125

前　言

高等数学是一门重要的基础课．鉴于这门课程逻辑性及解题技巧较强，特编写了本书．本书是在结合由同济大学出版社出版、王帅主编的高等数学(下)的基础上编写而成的．全书内容包括无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元微积分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分共5章内容．每章按节编排，每节分为知识要点、例题分析、习题、习题解答与提示4个部分，每章配备综合练习题基础篇和提高篇．本书每部分内容构成特点如下：

1．知识要点——此部分按知识要点集中归纳本节的重要概念、性质、结论、公式，阐述扼要，条理清晰．

2．例题分析——此部分按照每节的内容知识点归纳出一些小专题，通过对典型例题的解题分析，归纳出高等数学中的一些问题的解题方法和解题技巧．同时注重选题的广度与梯度，力求达到从一题到一类，从一类到一个系列的效果．

3．习题——给出的练习题，既有掌握基础知识的训练，也有注重知识灵活性、综合性，力图在深度和广度上拓展读者知识面的训练．每章还有两套基础题和提高题，可供读者自测．

4．习题解答与提示——习题都具备详细的解答过程或提示，解答详细，提示精炼．

本书可作为理工科和经管类本科各专业学生的高等数学课程的辅导书、习题课参考书，同时也可用作参加硕士研究生入学考试的复习用书．

限于编者的学识及水平，疏漏与不足之处在所难免，恳请读者与同仁批评指正．

编者

2017年4月

目　录

第7章 无穷级数

7.1 常数项级数的概念与性质

7.1.1 知识要点

1. 常数项级数的概念

(1)一般地,给定一个数列

$$u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n,\cdots,$$

则由此数列构成的表达式

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

叫做(常数项)无穷级数,简称(常数项)级数,记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n\cdots,$$

其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项.

作级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项和

$$s_n=\sum_{i=1}^{n} u_i=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$$

称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和. 当 n 依次取 $1,2,3,\cdots$,时,它们构成一个新的数列

$$s_1=u_1,s_2=u_1+u_2,s_3=u_1+u_2+u_3,\cdots,s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\cdots.$$

(2)如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 当 n 无限增大时有极限 s,即 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$,则称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,这时极限 s 叫做此级数的和,写成

$$s=\sum_{n=1}^{\infty} u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots.$$

如果部分和数列 $\{s_n\}$ 没有极限,则称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时,其部分和 s_n 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和 s 的近似值,它们之间的差值

$$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

叫做级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的余项.

2. 收敛级数的基本性质

性质 1 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 s，则它的各项同乘以一个常数 k 所得的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，且其和为 ks.

性质 2 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于和 s，σ，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛，且其和为 $s \pm \sigma$.

性质 3 在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的收敛性.

比如，级数 $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$ 是收敛的；

级数 $10000 + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$ 也是收敛的；

级数 $\frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{4\times 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$ 也是收敛的.

性质 4 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则对此级数的项任意加括号后所形成的级数仍收敛，且其和不变.

应注意的是，如果加括号后形成的级数收敛，则不能断定去括号后原来的级数也收敛. 例如，级数 $(1-1)+(1-1)+\cdots$ 收敛于零，但级数 $1-1+1-1+\cdots$ 却是发散的.

推论 如果加括号后形成的级数发散，则原来级数也发散.

性质 5 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则它的一般项 u_n 趋于零，即 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

7.1.2 例题分析

例 7.1.1 判别无穷级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$ 的收敛性.

解 由于

$$u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \ln(n-1) - \ln n,$$

因此

$$s_n = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + (\ln 3 - \ln 4) + \cdots + [\ln(n-1) - \ln n] = -\ln n,$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$，故该级数发散.

例 7.1.2 判别无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ 的收敛性.

解 因为

$$u_n=\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}s_n&=\frac{2}{1\times2}+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}\\&=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]\\&=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right),\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{n+1}\right)=2,$$

所以该级数收敛.

例 7.1.3 判断下列级数的收敛性,并计算其值:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{5}{4^n}\right)$$

解 因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}$都收敛,故原级数收敛,且和为

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{5}{4^n}\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}+5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\\&=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}+\frac{5}{1-\frac{1}{4}}=\frac{49}{6}.\end{aligned}$$

7.1.3 习题

1. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,记 $s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$,求:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n^2-u_n+3)$;　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{n+1}+s_{n-1}-2s_n)$.

2. 求 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$的和.

3. 根据级数收敛与发散的定义判别下列级数的收敛性，并计算：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

4. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n\tan\frac{\pi}{n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^n}{(1+n)^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{5^n}\right)$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-1)^n n^2}{n^2 \cdot 3^n}$.

7.1.4　习题解答及提示

1. (1)3；　　(2)0.　　2. $\frac{3}{2}$.

3. (1)收敛，和为$\frac{1}{3}$；　　(2)收敛，和为 $1-\sqrt{2}$.

4. (1)$u_n = n\tan\frac{\pi}{n}$，因为$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\pi = \pi \neq 0$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\tan\frac{\pi}{n}$发散.

(2) $u_n=\frac{2n^n}{(1+n)^n}=\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{\mathrm{e}}\neq 0$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^n}{(1+n)^n}$发散.

(3)因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散$\left(p=\frac{1}{2}<1\text{ 的 }p\text{ 级数}\right)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$收敛$\left(q=\frac{1}{5},|q|<1\text{ 的几何级数}\right)$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{5^n}\right)$发散.

(4) $u_n=\frac{3^n+(-1)^n n^2}{n^2 3^n}=\frac{1}{n^2}+(-1)^n\frac{1}{3^n}=\frac{1}{n^2}+\left(-\frac{1}{3}\right)^n$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛($p=2>1$ 的 p 级数)，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ 收敛$\left(q=-\frac{1}{3},|q|<1\text{ 的几何级数}\right)$，所以原级数收敛.

7.2 常数项级数的收敛法则

7.2.1 知识要点

1. 正项级数的收敛法则

定理 1 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和数列$\{s_n\}$有界.

定理 2(比较审敛法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，且 $u_n\leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；反之，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

推论 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，且存在自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，有 $u_n\leqslant kv_n(k>0)$成立，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，且当 $n\geqslant N$ 时，有 $u_n\geqslant kv_n(k>0)$成立，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

定理 3(比较审敛法的极限形式) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$ $(0<l<+\infty)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同时收敛或同时发散.

定理 4(比值审敛法，达朗贝尔判别法) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的后项与前项之比值的极限等于 ρ，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,$$

则当 $\rho<1$ 时级数收敛；当 $\rho>1$（或 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$）时级数发散；当 $\rho=1$ 时级数可能收敛也可能发散.

定理 5(根值审敛法,柯西判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数,如果它的一般项 u_n 的 n 次根的极限等于 ρ,即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho,$$

则当 $\rho<1$ 时级数收敛,当 $\rho>1$（或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$）时级数发散,当 $\rho=1$ 时级数可能收敛也可能发散.

定理 6(极限审敛法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数,如果

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=l>0$（或 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=+\infty$）,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

(2) $p>1$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}n^pu_n=l$ $(0\leqslant l<+\infty)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

2. 交错级数的收敛法则

下列形式的级数

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$$

称为交错级数. 交错级数的一般形式为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$,其中 $u_n>0$.

定理 7(莱布尼茨定理) 如果交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件:

(1) $u_n\geqslant u_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,

则级数收敛,且其和 $s\leqslant u_1$,其余项 r_n 的绝对值 $|r_n|\leqslant u_{n+1}$.

3. 绝对收敛与条件收敛

对于一般的级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

级数绝对收敛与级数条件收敛有如下关系:

定理 8 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定收敛.

一般来说,如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散,我们不能断定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散. 但是,如果我们用比值法或根值法判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散,则我们可以断定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定发散. 这

是因为，此时$|u_n|$不趋向于零，从而u_n也不趋向于零，因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$也是发散的.

7.2.2 例题分析

例 7.2.1 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-\ln n}$的收敛性.

分析 $u_n=\dfrac{1}{n^2-\ln n}>0$，而$p=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-\ln n}{(n+1)^2-\ln(n+1)}=1$，故比值审敛法失效.

解 方法一 考虑用比较审敛法

$$u_n=\frac{1}{n^2-\ln n}<\frac{1}{n^2-n}\leqslant\frac{1}{(n-1)^2}\quad(n\geqslant 2),$$

而级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)^2}$收敛，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-\ln n}$收敛.

方法二 易知$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$，考虑用比较审敛法的极限形式，即设法寻找与$u_n=\dfrac{1}{n^2-\ln n}$等价或同阶的无穷小. 令

$$v_n=\frac{1}{n^2},$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-\ln n}=1.$$

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-\ln n}$亦收敛.

例 7.2.2 判断下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$；　　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

解 (1)因为$u_n=\dfrac{\ln n}{n}\geqslant\dfrac{\ln 2}{n}$ $(n\geqslant 2)$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln 2}{n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}$发散. 又因$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$，令$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

故当$x>\mathrm{e}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调减少. 由于

$$u_n=f(n)=\frac{\ln n}{n},$$

所以，当$n\geqslant 3$时，$\{u_n\}$单调减少，即$u_{n+1}<u_n(n\geqslant 3)$，从而由莱布尼茨判别法知，原级数收敛且是条件收敛.

(2) $u_n=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}>0$. 因为

$$u_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=1\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n-2}\times\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}\quad(n\geqslant 2),$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$发散，又因

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\frac{2n+1}{2n+2}<1,$$

即 $u_{n+1}<u_n$，再由$\frac{a}{b}<\frac{a+1}{b+1}(0<a<b)$，得

$$u_n=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}<\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{u_n}\frac{1}{2n+1},$$

所以 $0<u_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\to 0\ (n\to\infty)$，由夹逼准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，故由莱布尼茨判别法知，原级数收敛，从而条件收敛.

例 7.2.3 判断下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}\right)$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ (常数 $a>0$).

分析 利用比较审敛法的关键是如何寻找恰当的比较级数. 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$，则由比较审敛法知，当 u_n 与 v_n 是同阶无穷小(即 $u_n=O(v_n)$)时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 有相同的收敛性. 常用的比较级数有两种：p 级数和几何级数. 如：若 $u_n=O\left(\frac{1}{n^p}\right)$，则可用 p 级数作为比较级数.

解 (1)$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}=\frac{\sqrt{n}+1}{n-1}-\frac{\sqrt{n}+1}{n}=\frac{1}{n^{3/2}}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1-\frac{1}{n}}$，

取 $v_n=\frac{1}{n^{3/2}}$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1-\frac{1}{n}}=1,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$收敛$\left(p=\frac{3}{2}>1\right)$，所以原级数收敛.

(2)
$$u_n=\frac{1}{1+a^n},$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\begin{cases}1, & 0<a<1,\\ \frac{1}{2}, & a=1,\\ 0, & a>1.\end{cases}$$

当 $0<a\leqslant 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，所以原级数发散. 当 $a>1$ 时，$0<u_n<\frac{1}{a^n}=v_n$. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n$ 收敛$\left(q=\frac{1}{a},|q|<1\right)$，所以原级数收敛.

7.2.3 习题

1. 判别下列级数的收敛性，若收敛，请指出是绝对收敛，还是条件收敛？

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2-n}}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n5^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{(n+1)}}{(n+1)!}$.

2. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，证明：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{1+u_n}$收敛；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$收敛.

3. 设 $u_n\geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$，且数列$\{nu_n\}$有界，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.

4. 判断下列级数的收敛性：

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$；

(3) $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}+\cdots$.

5. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 n 项部分和为

$$s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n},$$

求级数的一般项 a_n 及和 s.

6. 已知 $a_n=\int_0^1 x^2(1-x)^n\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，并求这个级数的和.

7. 判别下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n!}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin na}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ $(a>0)$；

(5) $\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$.

8. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都发散，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\max\{a_n,b_n\}$ 的收敛性.

9. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}a_n$ 也绝对收敛.

7.2.4 习题解答及提示

1. (1)条件收敛；　(2)绝对收敛；

(3)发散，提示：$u_n=\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\mathrm{e}>1$，$u_n>u_{n-1}>\cdots>u_N>0$ $(n>N)$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n u_n\neq 0$.