JINBANG BOOKS SINCE 1997
金榜图书
北京时代巨流文化有限公司

2019

全国硕士研究生入学统一考试

全国十二大考研辅导机构指定用书

概率论与数理统计辅导讲义

讲义2.1

主编◎曹显兵

紧扣考纲

直击考点

查漏补缺

提升水平

资深名师
权威打造

分析透彻
化繁为简

典型例题
分类精讲

讲练结合
掌握方法

【双色印刷
高品质阅读体验】

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

金榜图书

2019 全国硕士研究生入学统一考试

全国十二大考研辅导机构指定用书

概率论与数理统计辅导讲义

主编◎曹显兵

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书共分六章，每章开头给出了教育部最新数学大纲所规定的考试内容与考试要求，并且对考试内容作了规范的描述与讲解。同时还对每一章中的重点、难点以及容易混淆的概念进行了诠释，并归纳总结每一章的重要定理、公式和结论。特别对一些重要的中间结论或者隐含条件进行了归纳总结，目的在于帮助同学们更好地把握考试的重点、难点，掌握解题的基本方法。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计辅导讲义/曹显兵主编. —西安：西安交通大学出版社，2018.1

ISBN 978-7-5693-0421-3

Ⅰ.①概… Ⅱ.①曹… Ⅲ.①概率论－高等学校－教学参考资料 ②数理统计－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 029467 号

书　　名　概率论与数理统计辅导讲义
主　　编　曹显兵
责任编辑　张阳　于睿哲

出版发行　西安交通大学出版社
　　　　　(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
　　　　　(029)82668315(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　三河市燕山印刷有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张　10.5　字数　239 千字
版次印次　2018 年 3 月第 1 版　2018 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5693-0421-3
定　　价　49.80 元

2019 版说明

2018 年考研刚刚过去，数学一、三的概率统计内容分别考了 5 个题，34 分，其中 2 道大题，数学一、三是相同的，3 道小题中有 2 道不同，这样一共考了 7 个不同题。仔细对照 2018 版《概率论与数理统计辅导讲义》中的例题或习题，发现所考题型与知识点在书中都能找到，有的就是书中一个简单结论，有的几乎就是原题。例如，数学一、三的第 14 题与 2018 版（2017 年 4 月出版）书中练习题一的第一大题第 5 小题完全类似，数学一、三的第 22 大题与 2018 版书中例 3.22 完全类似，第 23 大题与 2018 版书中例 6.4、例 6.17 完全类似，等等。为了更好地反映 2019 年的考试重点和趋势，这次对 2018 版《概率论与数理统计辅导讲义》再次作了部分修订，并给出了所有思考题的参考答案。

作　者

2018 年 2 月于北京

再版说明

本书出版两年来，得到了全国广大考研同学的肯定与厚爱。考生认为该书以尽可能少的篇幅将概率统计讲解清楚，将平时学习这门课程的很多疑惑解开了，能够在较短时间内复习好这门课程。从出版方反馈的信息看该书已经成为考研同学复习概率统计的首选，并且还有许多考生甚至同行专家给作者和出版方提出了很多宝贵的意见和建议。为了能反映研究生数学考试的最新信息，更好地满足考生的需求，2013 版《概率论与数理统计辅导讲义》特作如下修订：

1. **更新了部分例题**，尤其补充了作者最近命制的新题；重新修订了一些题型的归纳总结和每章的补充注释，更正了几处印刷错误。

2. **对部分难度较大的题标注了"本题仅作参考"**。此类例题若在第一轮复习时有困难，可先跳过去，第二轮复习时再突破。对基础比较薄弱的考生，这类问题甚至可以放弃，否则影响复习的进度和效果。

3. 每章的最后有一个本章小结，**明确指出了这章的重点所在**，考生一定要看，有利于从整体上把握这章内容，提高复习效率。

衷心感谢使用和关心本书的广大考生和同行专家！

祝各位考研同学复习顺利，快乐考研，心想事成！

曹显兵

2012 年 2 月于北京

前　言

概率论与数理统计是专门研究随机现象及其数量规律的一个数学分支。学好这门课程的关键是将基本概念、定理及方法和实际例子联系起来，掌握用概率统计的语言来描述实际问题，即把问题表示为随机事件、概率、条件概率、数字特征以及概率分布等，然后选择合适的概率统计模型及正确的定理、公式进行计算。

编者主讲概率论与数理统计已有十余年，积累了较为丰富的教学实践经验。本书正是根据编者这十余年来的讲稿精心提炼、浓缩而成的，目的是让同学们在较短时间内学习好概率论与数理统计，最终取得优异成绩，实现自己的人生梦想。

本书共分六章，编写特点如下：

一、本书在每章的开头给出了教育部最新数学大纲所规定的考试内容与考试要求，并且对考试内容作了规范的描述与讲解。

二、本书力求用最少的篇幅帮助同学们理解基本概念，掌握基本原理、基本方法和公式。一方面，编者通过精心选取、重新编制设计题目，使得本书所选例题更具代表性，同学们更容易理清解题思路、熟悉常用方法与技巧；另一方面，借助于许多典型例题的评注，帮助读者更好地把握典型例题的典型处理方法和各种可能的延伸，从而达到举一反三、触类旁通的效果。另外，对于真正掌握一门课程内容并通过相关考试来说，做一定数量的习题是必不可少的。为此，编者按照填空题、选择题和解答题的顺序编制了一定数量的习题，供读者模拟练习之用，希望读者尽可能独立完成大部分习题。

三、针对每一章中的重点、难点以及容易混淆的概念进行诠释，并归纳总结每一章的重要定理、公式和结论。特别对一些重要的中间结论或者隐含条件进行了归纳总结，目的在于帮助同学们更好地把握考试的重点、难点，掌握解题的基本方法。

在成书过程中，编者参考了众多著作和教材，由于篇幅所限不能一一列出，在此谨向有关作者表示衷心感谢！

由于编者水平所限，书中一定还存在许多不足之处，敬请广大读者、同行专家批评指正。

曹显兵

2011 年 3 月于北京

目　录

第一章　随机事件和概率

第二章　随机变量及其分布

第三章　多维随机变量及其分布

第四章　随机变量的数字特征

第五章　大数定律与中心极限定理

第六章　数理统计

英文字母 A、B、C 等表示，有时用{……}表示事件，大括号中用文字或式子描述事件的内容. 在每次试验中，当且仅当事件中的一个样本点出现时，称这个事件发生. 由一个样本点组成的单点集称为基本事件；由多于一个样本点组成的集合称为复合事件.

显然，Ω 和空集 $\varnothing$ 都是 Ω 的子集，从而也是事件，它们分别称为必然事件 —— 每次试验中一定发生的事件；不可能事件 —— 每次试验中一定不发生的事件.

二、事件的关系及其运算

事件是一个集合，因此事件间的关系和运算自然按照集合间的关系和运算来处理.

1. 事件的关系和运算

(1) 包含　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即 A 为 B 的子集，则称事件 B 包含事件 A，也称 A 为 B 的子事件，记作 $A \subset B$，图 1-1(称为文氏图)表示了事件的包含关系. 显然，对任何事件 A 有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

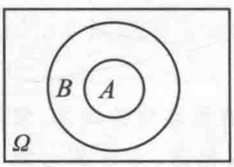


图 1-1

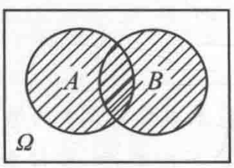


图 1-2

(2) 相等　若两个事件 A、B 满足 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A = B$. 此时 A 与 B 包含的样本点完全相同，即表示同一个事件.

(3) 和(并)　事件 A、B 中至少有一个发生的事件称为 A 与 B 的和(并)，记作 $A \cup B$(或 $A+B$)，即

$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}.$$

类似有 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. 图 1－2 表示了 A 与 B 的和事件(阴影部分).

(4) 积(交)　事件 A 与 B 同时发生的事件称为 A 与 B 的积(交)，记作 $A \cap B$(或 AB)，即

$$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}.$$

类似有 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$，可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. 图 1-3 表示了 A 与 B 的积事件(阴影部分).

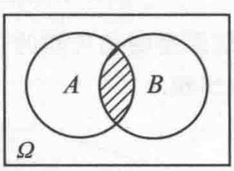


图 1-3

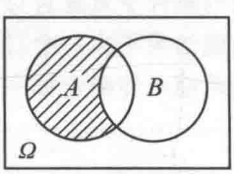


图 1-4

(5) 差　事件 A 发生但 B 不发生的事件称为 A 与 B 的差，记作 $A - B$，即

$$A-B=\{\omega \mid \omega \in A \text{ 但 } \omega \notin B\}$$

图 1-4 表示了 A 与 B 的差事件(阴影部分).

(6) 互不相容(互斥)　若事件 A 与 B 不能同时发生,即 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 与 B 互不相容(或互斥),记作 $A\cap B=\varnothing$ 或 $AB=\varnothing$. 图 1-5 表示了 A,B 的互斥关系.

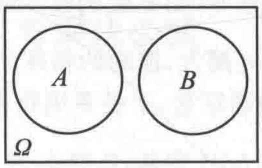


图 1-5

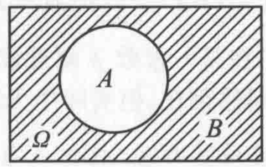


图 1-6

(7) 对立(互逆)　若事件 A,B 不能同时发生,且必有一个发生,即 A,B 满足 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$,则称 A 与 B 互为对立事件(或互逆事件),记作 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$,即 A 的对立事件 $\overline{A}$ 就是 A 不发生的事件:

$$\overline{A}=\{\omega \mid \omega \notin A\}=\Omega-A$$

图 1－6 表示了 A 的对立事件为 B(阴影部分).

(8) 完全(备)事件组　若有限个或可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 满足 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$,且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 构成一个完全事件组或完备事件组.

2. 事件运算的性质

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A,\quad AB=BA.$

(2) 结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C,$$
$$(AB)C=A(BC)=ABC.$$

(3) 分配律

$$A(B\cup C)=AB\cup AC,$$
$$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C),$$
$$A(B-C)=AB-AC,$$
$$A(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\bigcup_{i=1}^{n}AA_i.$$

(4) 对偶律(De • Morgan 律)

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$
$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}(i\geqslant 1).$$

(5) 吸收律　$A\cap(A\cup B)=A,\quad A\cup(A\cap B)=A.$

(6) 双重否定律　$\overline{\overline{A}}=A.$

(7) 排中律　$A\cup\overline{A}=\Omega, A\overline{A}=\varnothing.$

(8) 差积转换律　$A-B=A\overline{B}.$

三、事件的概率及其性质

概率是事件发生的可能性大小的定量描述,是事件的本质特征,它客观存在,我们常用

$P(A)$ 表示事件 A 的概率.

1. 概率的统计定义

在相同条件下，独立重复进行 n 次试验，则事件 A 在 n 次试验中发生的次数称为 A 发生的频数，记为 μ_A，比值 $f_n(A)=\frac{\mu_A}{n}$ 称为 A 发生的频率. 当试验次数 n 增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现出某种稳定性，即它在某一常数 p 附近波动，且 n 越大，波动的幅度越小，则称 p 为事件 A 发生的概率. 显然，p 固然存在，但实际中无法精确确定它，于是多用频率 $f_n(A)$ 作为 p 的估计值.

2. 概率的古典定义

若试验 E 的样本空间 Ω 只包含有限个样本点，即有限个基本事件，且每个样本点出现的可能性相同，则称试验 E 为古典概型. 此时，事件 $A\subset\Omega$ 的概率定义为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件总数}}$$

上式计算出的概率称为古典概率.

3. 概率的几何定义

若试验 E 的样本空间 Ω 为几何空间中的一个有界区域(这个区域可以是一维、二维、三维，甚至 n 维的)，且 Ω 中每个样本点，即基本事件出现的可能性相同，则称试验 E 为几何概型，此时，事件 $A\subset\Omega$ 的概率定义为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量(长度、面积、体积)}}{\Omega\text{ 的度量(长度、面积、体积)}}$$

上式计算出的概率称为几何概率.

4. 概率的公理化定义

设试验 E 的样本空间为 Ω，对 E 的任意一个事件 A，规定一个实数 $P(A)$ 与之对应，若集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) 非负性：对任意事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性：对任意两两互不相容的事件列：$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

5. 概率的基本性质

(1) 对于不可能事件 $\varnothing$，$P(\varnothing)=0$；对于必然事件 Ω，$P(\Omega)=1$.

(2) 有限可加性：若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则有 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$.

(3) 求逆公式：$P(\overline{A})=1-P(A)$.

(4) 加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

(5) 广义加法公式(多除少补原理)：

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+$$

$(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$，

特别有 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$.

(6) 减法公式：$P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

特别当 $B\subset A$ 时，$P(A-B)=P(A)-P(B)$，从而 $P(B)\leqslant P(A)$.

四、条件概率与乘法公式

1. 条件概率

对于任意两个事件 A 和 B，其中 $P(A)>0$，事件 B 在“事件 A 已发生”的条件下发生的概率，简称为“事件 B 关于 A 的条件概率”，定义为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

对于固定的事件 A，条件概率 $P(B\mid A)$ 具有(无条件)概率的一切性质.

2. 乘法公式

设 A,B 为两个事件，若 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A).$$

若 $P(B)>0$，则有

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B).$$

一般地，若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

五、全概率公式和 Bayes 公式

1. 全概率公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$ 为一个完全事件组，且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n,\cdots$，则对任意事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

2. Bayes 公式

设 $A_1,A_2,\cdots A_n,\cdots$ 为一完全事件组，且 $P(A_i)>0,i=1,\cdots,n,\cdots,P(B)>0$，则有

$$P(A_j\mid B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)P(B\mid A_i)},j=1,2,\cdots.$$

六、事件的独立性与伯努利(Bernoulli)概型

1. 事件的独立性

(1) 对于两个事件 A,B，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立.

(2) 对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果其中任意两个事件相互独立，即对 $\forall 1\leqslant i<j\leqslant n$，均有

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立.

(3) 对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果其中任意 k 个事件($2 \leqslant k \leqslant n$)：$A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$ 均有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),(1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n)$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

(4) 对于事件序列 $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$，如果对任意正整数 $n(n \geqslant 2)$，事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则称事件序列 $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ 相互独立.

2. 独立事件的性质

(1) 若 A 与 B 相互独立，则 $\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

(2) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则其中任意 $m(2 \leqslant m \leqslant n)$ 个事件也相互独立.

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i),$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}).$$

3. 试验的独立性

(1) 如果试验 E_1 和 E_2 分别产生的任意两个事件 A_1 与 A_2 都相互独立，则称试验 E_1 和 E_2 相互独立，其直观含义是一个试验结果的发生不影响另一个试验结果发生的概率.

(2) 对于 n 个试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$，如果它们分别产生的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都相互独立，则称 n 个试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 相互独立.

4. 伯努利(Bernoulli) 概型

(1) 伯努利概型：只考虑两个对立的结果：A(成功) 和 $\overline{A}$(失败) 的试验称为伯努利概型，或伯努利试验，将这样一个伯努利试验独立重复进行 n 次就称为一个 n 重(次) 伯努利试验，或 n 重伯努利概型，有时也简称为伯努利概型. 在这里，“独立”是指试验之间相互独立，“重复”是指每次试验中 A 发生的概率保持不变.

(2) 伯努利概型概率计算公式：在 n 重 Bernoulli 概型中，设 $P(A) = p$，则 n 次试验中 A 发生 k 次的概率为 $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,\cdots,n.$

例题讲解

一、古典概型与几何概型

【例 1.1】 (2016，数 3) 设袋中有红、白、黑球各 1 个，从中有放回地取球，每次取 1 个，直到三种颜色的球都取到时停止，则取球次数恰好为 4 的概率为________.

【答案】 $\frac{2}{9}$.

【分析】 本题考查古典概率的计算，关键是正确计算有利事件数.

【详解】　方法一：对于有放回取球，基本事件总数显然为 3^4. 有利事件数可如下考虑：第 4 次取到第 3 种颜色的球，共有 3 种取法；前 3 次里取得另外 2 种不同颜色的球，每次共有 2 种可能取法，3 次有 $2^3=8$ 种取法，同时要除去 3 次取同一色共 2 种取法，所以前 3 次取得 2 种不同颜色的球，共有 $8-2=6$ 种取法，因此有利事件数为 $(2^3-2)\times 3=18$. 故所求概率为 $\frac{18}{3^4}=\frac{2}{9}$.

方法二：对于有放回取球，基本事件总数为 3^4. 有利事件数可如下考虑：前 3 次里取到且仅取到 2 种不同颜色的球，从而必有 1 种颜色取到 2 次，第 4 次取到第 3 种颜色的球. 首先从 3 种颜色球中任取 2 种，共有 C_3^2 种取法，所取的 2 种颜色有 1 种在前 3 次里被取到 2 次的不同取法有 C_3^2 种，然后这 2 种颜色交换次序，有 C_2^1 种方法，因此有利事件数为 $C_3^2C_3^2C_2^1=18$.

故所求概率为 $\frac{18}{3^4}=\frac{2}{9}$.

【例 1.2】　一个盒中有 4 个黄球，5 个白球，现按下列三种方式从中任取 3 个球，试求取出的球中有 2 个黄球，1 个白球的概率.

(1) 一次取 3 个；

(2) 一次取 1 个，取后不放回；

(3) 一次取 1 个，取后放回.

【详解】　设三种方式下对应的三个事件分别为 A_1,A_2,A_3，由古典概型得

(1) $P(A_1)=\frac{\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_5^1}{\mathrm{C}_9^3}=\frac{5}{14}$.

(2) $P(A_2)=\frac{P_4^2P_5^1\mathrm{C}_3^2}{P_9^3}=\frac{5}{14}$.

(3) $P(A_3)=\frac{\mathrm{C}_3^1\times 4^2\times 5}{9^3}=\frac{80}{243}$.

【评注】　在抽球问题中，“一次取出 k 个球”与“逐个无放回取出 k 个球”所对应事件的概率是相同的，但与“有放回取出 k 个球”是不同的.

【例 1.3】　某班有 50 名同学，其中正、副班长各 1 名. 现从中任意选派 5 名同学参加假期社会实践活动，试求正、副班长至少有一个被选派上的概率.

【详解】　设 $A=\{$正、副班长至少有一个被选上$\}$.

方法一：基本事件总数为 C_{50}^5，有利事件数为 $\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_{48}^4+\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_{48}^3$，故

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_{48}^4+\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_{48}^3}{\mathrm{C}_{50}^5}=\frac{47}{245}.$$

方法二：因为 $\overline{A}$ 的有利事件数为 C_{48}^5，于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{\mathrm{C}_{48}^5}{\mathrm{C}_{50}^5}=1-\frac{198}{245}=\frac{47}{245}.$$

【例 1.4】　袋中有 a 个红球，b 个白球，现从袋中每次任取一球，取后不放回，试求第 k 次取到红球的概率 $(1\leqslant k\leqslant a+b)$.

【详解】　方法一：排列法

设各个球是有区别的. 比如对每个球进行了编号，把取出的球依次排列在一直线上的

$a+b$ 个位置上，则样本空间中基本事件总数为 $a+b$ 个球在 $a+b$ 个位置上的全排列数：$(a+b)!$. 令 $A=\{$第 k 次取到红球$\}$. 第 k 次取到红球相当于首先在第 k 个位置上排红球，共有 a 种排法；其次在其余的 $a+b-1$ 个位置上排剩下的 $a+b-1$ 个球，共有 $(a+b-1)!$ 种不同排法. 由乘法原理得有利于事件 A 的事件数为 $a\cdot(a+b-1)!$，故

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

方法二：组合法

除了颜色之外，将各个球看作没有区别，将取出的球还是依次放在直线上的 $a+b$ 个位置上，此时 a 个红球在 $a+b$ 个位置上的所有不同放法为组合数 C_{a+b}^{a}（因 a 个红球之间没有区别，也就是不需考虑其排列次序，所以是组合数），而这个数就是 a 个红球被取出的所有不同取法总数，即样本空间中基本事件总数. 令 $A=\{$第 k 次取到红球$\}$. 第 k 次取到红球，即在第 k 个位置上必须放红球，其余的 $a-1$ 个红球可放在其余的 $a+b-1$ 个位置的任意 $a-1$ 个位置上，其所有不同的放法为组合数 C_{a+b-1}^{a-1}，即有利于事件 A 的基本事件数，故

$$P(A)=\frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^{a}}=\frac{a}{a+b}.$$

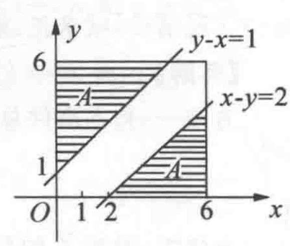
【评注】 (1) 本例说明不放回取球模型中，第 k 次取到红球的概率与次序 k 无关，它是一个常数，这正说明了在实际中抽签或抓阄问题的公平性.

(2) 本例说明同一个试验，样本空间的选取可以不同，但若都按古典概型求解，则必须保证都满足“等可能性”和“有限性”，而且求解时基本事件总数和有利事件数的计算要一致，即要么都用排列，要么都用组合.

(3) 本例也可以利用全概率公式，对 k 用归纳法求得概率为 $\frac{a}{a+b}$.

【例 1.5】 甲、乙两艘货轮驶向一个不能同时停泊两艘货轮的码头. 若两艘货轮在某一天的上午 8 点至下午 2 点到达码头是等可能的，甲货轮的停泊时间为 1 小时，乙货轮的停泊时间为 2 小时，求两艘货轮均不需要等待码头空出的概率.

【详解】 设甲、乙两艘货轮到达码头的时刻分别为 x,y（将上午 8 点取作坐标原点，单位：小时），则本题是一个几何概型，且样本空间 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x,y\leqslant 6\}$.



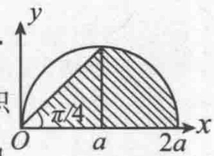
要求两艘货轮均不需要等待码头空出，则甲比乙须早到 1 小时，即 $y-x\geqslant 1$；或者乙比甲早到 2 小时，即 $x-y\geqslant 2$. 记事件 $A=\{(x,y)\mid(x,y)\in\Omega,y-x\geqslant 1\}\cup\{(x,y)\mid(x,y)\in\Omega,x-y\geqslant 2\}$，于是所求概率为

$$p=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 5^2+\frac{1}{2}\cdot 4^2}{6^2}=\frac{41}{72},$$

其中 S_A,S_Ω 分别表示区域 A,Ω 的面积.

【例 1.6】 随机地向半圆 $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}(a > 0)$ 内掷一个点，点落在半圆内任何区域的概率均与该区域的面积成正比，求该点与原点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率.

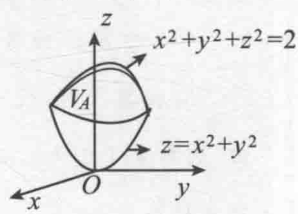
【分析】 题目中"随机地"即表示试验结果的等可能性，"点落在半圆内任何区域的概率与该区域的面积成正比"更强调试验的等可能性，因试验结果非有限个，容易想到用几何概率来计算.



【详解】 如图，设事件 A 表示"点与原点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$". 于是样本空间 $\Omega = \{(x,y) \mid 0 < y < \sqrt{2ax - x^2}\}$，即为图中的半圆，其面积为 $\frac{1}{2}\pi a^2$；而 $A = \{(x,y) \mid (x,y) \in \Omega, x > y\}$，其面积为 $\frac{1}{4}\pi a^2 + \frac{1}{2}a^2$. 由几何概率计算公式有

$$P(A) = \frac{\frac{1}{4}\pi a^2 + \frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}.$$

【例 1.7】 **(本题仅作参考)** 随机地向球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2$ 内投点，设点落在球体内任何区域的概率与该区域的体积成正比，试求所投点的坐标满足 $z \geqslant x^2 + y^2$ 的概率.



【详解】 由题意易知这是一个几何概型，其样本空间为

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2\},$$

所求概率的事件为

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \Omega, z \geqslant x^2 + y^2\} \\ &= \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2, z \geqslant x^2 + y^2\}. \end{aligned}$$

又 Ω 的体积为

$$V_\Omega = \frac{4}{3}\pi \cdot (\sqrt{2})^3 = \frac{8}{3}\pi\sqrt{2}.$$

由于立体 A 在 xOy 平面上的投影区域为 $D: x^2 + y^2 \leqslant 1$，故 A 的体积为

$$V_A = \iint_D \sqrt{2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

作极坐标变换：$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$ 有

$$\begin{aligned} V_A &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \sqrt{2 - r^2} \cdot r\mathrm{d}r - \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^2 \cdot r\mathrm{d}r \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{2}\pi - \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{2}\pi - \frac{7}{6}\pi. \end{aligned}$$

故所求概率为

$$P(A) = \frac{V_A}{V_\Omega} = \frac{1}{2} - \frac{7}{32}\sqrt{2}.$$

【小结】 1. 古典概型中事件概率的计算一般按以下步骤进行：

(1) 正确判断试验为古典概型概率，即试验必须有两个特点：① 试验的所有可能结果只有有限个；② 每个结果发生的可能性相同.

(2) 恰当选取样本空间 Ω，并计算 Ω 中样本点的个数 n.

(3) 计算要求事件 A 中包含的样本点的个数 k.

(4) 由古典概型概率计算公式得到：$P(A)=\dfrac{k}{n}$.

另外，在具体计算过程中要注意下面几点：

(1) 对比较简单的试验，即样本空间所含样本点的个数很少，这时可直接写出样本空间 Ω 和事件 A，然后数出各自所含的样本点的个数即可.

(2) 对于较复杂的试验，一般不再写出样本空间 Ω 和事件 A 中的元素，而是利用排列组合方法计算出它们各自所含的样本点数，但这时一定要保证 n 和 k 的计算方法一致，即要么都用排列，要么都用组合进行计算，否则就容易出现错误结果.

2. 几何概型中事件概率的计算一般可按以下步骤进行：

(1) 选取合适的模型，即样本空间 Ω.

(2) 在坐标系中正确表示 Ω 与所求概率的事件 A 所在的区域.

(3) 计算 Ω 与 A 的几何度量 $m(\Omega)$，$m(A)$ 得到概率 $P(A)=\dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$.

3. 抽签原理：设一个口袋中有 a 个红球，b 个白球，不放回地从中任意依次将球摸出，则第 $k(1\leqslant k\leqslant a+b)$ 次摸到红球的概率为 $\dfrac{a}{a+b}$(与 k 无关). 在选择和填空题中可直接应用.

二、事件的关系与概率性质

【例 1.8】 已知 $(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B})+\overline{A+B}+\overline{\overline{A}+B}=C$，且 $P(C)=\dfrac{1}{3}$，试求 $P(B)$.

【详解】 因为 $(A+\overline{B})\overline{A}+(A+\overline{B})\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}=C$，于是

$$\overline{B}\,\overline{A}+\overline{B}+(\overline{A}+A)\overline{B}=C,\quad \overline{B}\,\overline{A}+\overline{B}+\overline{B}=C.$$

即 $\overline{B}\overline{A}+\overline{B}=C$，亦即 $\overline{B}=C$.

所以

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(C)=\frac{2}{3}.$$

【评注】 $(A+B)-B\neq A$，事实上，若 $A\subset B$，则 $(A+B)-B=\varnothing$. 若 $AB=\varnothing$，则 $(A+B)-B=A$.

【例 1.9】 设 A，B 为两个事件，且 $A\neq\varnothing$，$B\neq\varnothing$，则 $(A+B)(\overline{A}+\overline{B})$ 表示

(A) 必然事件.　　(B) 不可能事件.

(C) A 与 B 不能同时发生.　　(D) A 与 B 中恰有一个发生.　　[　　]