燎原®高数

高等院校教材同步辅导及考研复习用书

数学分析
辅导及习题精解

华东师大第四版 上册

主 编 张天德

详解教材习题 剖析重点难点

渗透考研真题 精解典型例题

浙江教育出版社
ZHEJIANG EDUCATION PUBLISHING HOUSE

数学分析
辅导及习题精解

华东师大第四版 上册

主　编　张天德
副主编　孙建波　韩振来

浙江教育出版社·杭州

图书在版编目(CIP)数据

数学分析辅导及习题精解 ：华东师大第四版. 上册 / 张天德主编. -- 杭州 ：浙江教育出版社，2018.8

ISBN 978-7-5536-7618-0

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①数学分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 178235 号

数学分析辅导及习题精解(华东师大第四版)上册

SHUXUEFENXI FUDAO JI XITI JINGJIE HUADONGSHIDA DISIBAN SHANGCE

主编　张天德

出版发行：浙江教育出版社
(杭州市天目山路 40 号　邮编：310013)

责任编辑：谢　园　　文字编辑：张家浚
美术编辑：曾国兴　　封面设计：星火视觉设计中心
责任校对：栗　丽　　责任印务：刘　建
印　　刷：莱州市丰源印刷有限公司
开　　本：720mm×1020mm　1/16
印　　张：20　　字　　数：420 000
版　　次：2018 年 8 月第 1 版
印　　次：2018 年 8 月第 1 次印刷
标准书号：ISBN 978-7-5536-7618-0
定　　价：32.80 元

联系电话：0571-85170300-80928

前言

《数学分析》是数学专业最重要的一门基础课，也是报考数学类专业硕士研究生的专业考试科目。华东师范大学数学系主编的《数学分析》是一套深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材，被全国许多院校采用，也是许多学校硕士研究生入学考试的指定教材。我们编写了这本与华东师范大学数学系主编的《数学分析》(第四版)配套的辅导用书，以帮助读者加深对基本概念的理解，加强对基本解题方法与技巧的掌握，进而提高学习能力和数学思维水平。

讲解结构四大部分

1. 本章教材全解：用网络结构图的形式揭示本章知识点之间的有机联系，以便读者从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容。用表格形式对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行系统的梳理，并指出在理解与应用基本概念、定理、公式时需注意的问题以及各类考试中经常考查的重要知识点。

2. 典型例题解析：这一部分是每节讲解中的核心内容，也是全书的核心内容。我们基于多年的教学经验和研究生入学考试试题的研究经验，将该节教材内容中读者需要掌握的、考试中的重点、难点、考点，归纳为可能出现的基本题型，然后针对每种基本题型，精选大量的例题加以详细讲解，使读者扎实掌握每一个知识点，并能在具体解题过程中熟练运用。基础知识梳理、重点考点深讲、联系考试解题，三重互动、一举突破，从而帮助读者全面提升实际应用应试能力。例题讲解中穿插出现的“思路探索”“方法点击”，更是巧妙点拨，让读者举一反三、触类旁通。

3. 考研真题精析：针对每一个基本题型，精选最新研究生入学考试真题，并进行精心深入的解答。

4. 教材习题详解：对教材中各章节的全部习题作详细解答。在解题过程中，对部分有代表性的习题，设置“思路探索”，以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法；设置“归纳总结”来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。有的习题还给出多种解题方法，以培养读者的分析能力和发散思维能力。

内容编写三大特色

1. 知识梳理清晰、简洁：直观、形象的条目总结，精练、准确的考点提炼，实用、独到的方法归纳，将教材内容抽丝剥茧、层层展开，呈现简明扼要、层次分明的知识结构，便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，为提高读者的解题能力和思维水平夯实基础。

2. 能力提升迅速、持续：本书将所有的重点、难点、考点归纳为考试中可能出现的基本题型，然后针对每种基本题型，精选考研真题，加以详细讲解，真正将知识掌握和解题能力提升做到高效结合，一举两得。

3. 联系考研密切、实用：本书既是一本教材同步辅导书，也是一本考研复习用书：例题中有考研真题，讲解中处处渗透考研经常涉及的重点、考点等，旨在让读者同步完成考研备考，顺利通过硕士研究生入学考试。

本书博采众长，涵盖考研备考的诸多重点、难点、考点。书中如有疏漏与不妥之处，敬请广大读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。

编　者

2018 年 8 月

教材知识全解+教材习题详解

目录

教材知识全解

教材习题详解

教材知识全解

第一章　实数集与函数

本章教材全解

本章知识结构图解

- 实数集与函数
  - 实数集
    - 实　数
      - 实数及其性质
      - 绝对值与不等式
    - 数集·确界原理
      - 区间与邻域
      - 有　界　集
      - 确界原理
  - 函　数
    - 函数概念
      - 函数的定义
      - 函数的表示法
      - 函数的四则运算
      - 复合函数
      - 反　函　数
      - 初等函数
    - 函数性质
      - 有　界　性
      - 单　调　性
      - 奇　偶　性
      - 周　期　性

重点及常考点突破

1. 实数概述

名　称	内　容
实数定义	凡能写成十进小数形式的数叫作实数. 若它是有限的或无限循环的，则为有理数（可表示为形如$\frac{p}{q}$，p、q为整数且$q \neq 0$），若它是无限不循环的，则为无理数.
实数性质	① 实数对加、减、乘、除（除数不得为0）四则运算是封闭的. ② 实数集是有序的. ③ 实数大小关系具有传递性. ④ 实数全体具有稠密性. 即任意两个不相等的实数之间必有另一个实数，且既有有理数又有无理数. ⑤ 实数具有阿基米德性，即对任意两个实数a与b，且$b>a>0$，必存在正整数N，使得$Na>b$. ⑥ 全体实数与数轴上的点具有一一对应的关系.

续表

名　称	内　容
绝对值	实数 a 的绝对值定义为 $\|a\|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$ 从数轴上看，$\|a\|$ 是点 a 到原点 O 的距离.
绝对值性质	① $\|a\|=\|-a\|\geqslant 0$，当且仅当 $a=0$ 时，$\|a\|=0$. ② $-\|a\|\leqslant a\leqslant\|a\|$，当且仅当 $a=0$ 时，等式成立. ③ $\|a\|<h\Leftrightarrow -h<a<h$；$\|a\|\leqslant h\Leftrightarrow -h\leqslant a\leqslant h(h>0)$. ④ $\forall a、b\in\mathbf{R}$，有 $\|a\|-\|b\|\leqslant\|a\pm b\|\leqslant\|a\|+\|b\|$.（三角形不等式） ⑤ $\|ab\|=\|a\|\|b\|$. ⑥ $\left\|\dfrac{a}{b}\right\|=\dfrac{\|a\|}{\|b\|}(b\neq 0)$.
区间与邻域	$(a,b)=\{x\mid a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$ 称为开区间； $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$ 称为闭区间； 类似地可定义 $(a,+\infty)$、$[a,+\infty)$、$(-\infty,a)$、$(-\infty,a]$、$(a,b]$、$[a,b)$ 等等，一般的 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$. $U(a;\delta)=\{x\mid\|x-a\|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$ 称为点 a 的 δ 邻域； $U^{\circ}(a;\delta)=\{x\mid 0<\|x-a\|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$ 称为点 a 的空心 δ 邻域； $U_{+}(a;\delta)=\{x\mid 0\leqslant x-a<\delta,x\in\mathbf{R}\}$ 称为点 a 的 δ 右邻域； $U_{-}(a;\delta)=\{x\mid -\delta<x-a\leqslant 0,x\in\mathbf{R}\}$ 称为点 a 的 δ 左邻域； $\forall M>0,U(+\infty,M)=\{x\mid M<x<+\infty,x\in\mathbf{R}\}$ 称为 $+\infty$ 的 M 邻域，简记为 $U(+\infty)$； $U(-\infty,M)=\{x\mid -\infty<x<-M,x\in\mathbf{R}\}$ 称为 $-\infty$ 的 M 邻域，简记为 $U(-\infty)$.

2. 有界集、确界原理

名　称	内　容	说　明
有界集定义	设 S 为 $\mathbf{R}$ 中的一个数集，若 $\exists M(L)$，使得对 $\forall x\in S$，都有 $x\leqslant M(x\geqslant L)$，则称 S 为有上(下)界的数集，数 $M(L)$ 称为 S 的一个上(下)界. 若数集 S 既有上界又有下界，则称 S 为有界集，否则称为无界集.	S 没有上(下)界可以表述为：$\forall M(L)>0$，都 $\exists x_0\in S$，使得 $x_0>M(x_0<L)$.
上确界定义	对于给定数集 S，若数 η 满足下述条件： (i) 对 $\forall x\in S$，有 $x\leqslant\eta$（即 η 是 S 的上界）； (ii) 对 $\forall\varepsilon>0$，必 $\exists x_0\in S$，使得 $x_0>\eta-\varepsilon$（即 η 是 S 的最小上界），则称数 η 为数集 S 的上确界，记作 $\eta=\sup S$ 或 $\eta=\sup\limits_{x\in S}\{x\}$.	(ii) 也可以表述为：对 $\forall\alpha<\eta$，$\exists x_0\in S$，使得 $x_0>\alpha$，即小于 η 的都不是 S 的上界，也即 η 是 S 的最小上界.

续表

名称	内容	说明
下确界定义	对于给定数集 S,若数 ξ 满足下述条件: (ⅰ)对 $\forall x\in S$,有 $x\geqslant\xi$(即 ξ 是 S 的下界); (ⅱ)对 $\forall\varepsilon>0$,必 $\exists x_0\in S$,使得 $x_0<\xi+\varepsilon$(即 ξ 是 S 的最大下界),则称数 ξ 为数集 S 的下确界,记作 $\xi=\inf S$ 或 $\xi=\inf\limits_{x\in S}\{x\}$.	同上确界一样,(ⅱ)也可以表述为:对 $\forall\beta>\xi$,$\exists x_0\in S$,使得 $x_0<\beta$,即大于 ξ 的都不是 S 的下界,也即 ξ 是 S 的最大下界.
确界原理	(确界原理)非空有上(下)界数集必有上(下)确界. (推广的确界原理)任一非空数集必有正常上(下)确界或非正常上(下)确界.	推广的确界原理指的是把 $+\infty$ 和 $-\infty$ 补充到实数集中,看作数集的非正常上下确界. 这种思想以后还要用到,如单调有界定理等.

3. 函数

名称	内容	说明
函数的定义	设 $D\neq\varnothing$,$D\subset\mathbf{R}$(即 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集),若对 $\forall x\in D$,按照对应法则 f,有唯一确定的 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应,则称 f 为定义在 D 上的函数,记为 $f:D\to\mathbf{R}(x\mapsto y=f(x))$. 数集 D 称为函数 f 的定义域,y 称为 x 所对应的函数值,记为 $y=f(x)$,函数值的集合称为 f 的值域,记为 $f(D)$. 即 $f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}\subset\mathbf{R}$.	① 定义域 D 和对应法则 f 为函数的两个主要因素. 在数学分析中,所谓两个函数相同,是指它们的定义域和对应法则分别相同,两者缺一不可. ② 函数“$f:D\to\mathbf{R}$”中 D 到 $\mathbf{R}$ 的对应只能是单值的.
函数的表示方法	解析法、列表法、图像法	在数学分析中,侧重解析法.

4. 复合函数

名称	内容
复合函数定义	设 $y=f(u)$,$u\in D$;$u=\varphi(x)$,$x\in E$. 若 $E^*=\{x\mid\varphi(x)\in D,x\in E\}\neq\varnothing$,则在 E^* 上确定了一个由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 经过复合运算所得到的复合函数,记作 $y=f(\varphi(x))$,$x\in E^*$,其中 $y=f(u)$ 称为外函数,$u=\varphi(x)$ 称为内函数,u 称为中间变量.

第1章

5. 反函数

名　称	内　容	说　明
反函数定义	设函数 $y=f(x), x\in D, y\in f(D)$. 若 $\forall y_0\in f(D)$, 在 D 中有唯一确定的 x_0, 使得 $y_0=f(x_0)$, 则在 $f(D)$ 上确定一个函数, 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数, 记作 $f^{-1}: f(D)\to D$ 或 $x=f^{-1}(y), y\in f(D)$.	① 若 $y=f(x), x\in D$ 存在反函数 $f=f^{-1}(y), y\in f(D)$, 则 D 与 $f(D)$ 之间是一一对应, 即 $\forall x_1, x_2\in D$, 且 $x_1\neq x_2$, 则必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$. ② 若 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数, 则 $y=f(x)$ 也是 $x=f^{-1}(y)$ 反函数. 而反函数的定义域与值域分别是直接函数的值域与定义域. 因此有 $f^{-1}[f(x)]=x, x\in D$; $f[f^{-1}(y)]=y, y\in f(D)$.

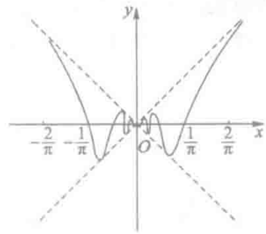
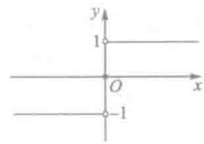
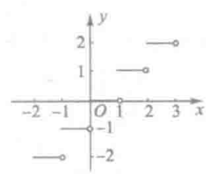
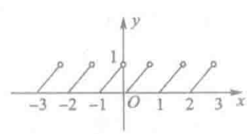
6. 初等函数

名　称	内　容
基本初等函数	常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六类函数统称为基本初等函数.
初等函数	由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数称为初等函数.

7. 几种特殊类型的函数

名　称	内　容	说　明
有界函数	若 $\exists$ 常数 k, 对 $\forall x\in D$, 有 $f(x)\leqslant k$ ($f(x)\geqslant k$), 则称 $f(x)$ 在 D 上有上(下)界, k 称为 $f(x)$ 的上(下)界. 若 $\forall x\in D$, 总有 $\|f(x)\|\leqslant M$ $(M>0)$, 则称 $f(x)$ 为 D 上的有界函数.	① 称函数 $f(x)$ 有界时, 必须指明在哪个区间上. ② 有界函数指既有上界又有下界.
单调函数	$\forall x_1, x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$. 若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ ($f(x_1)\geqslant f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在 D 上单调递增(递减); 若 $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在 D 上严格单调递增(递减). 单调递增(递减)函数, 统称为单调函数. 而严格递增(递减)函数统称为严格单调函数.	说函数 $f(x)$ 单调时, 必须指明函数所在的区间.
奇函数 偶函数	设 D 为对称于原点的数集. 奇函数: $\forall x\in D$, 有 $f(-x)=-f(x)$. 偶函数: $\forall x\in D$, 有 $f(-x)=f(x)$.	称函数 $f(x)$ 是奇(偶)函数时, 其区间必须关于原点对称.
周期函数	设 $f(x)$ 在 D 上有定义, 若 $\exists l>0$, 对 $\forall x\in D$, 且 $x\pm l\in D$, 有 $f(x\pm l)=f(x)$, 称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期. 由 $\forall x\in D$, 且 $x\pm l\in D$ 表明, $\forall n\in \mathbf{N}$, 有 $x\pm 2l\in D, x\pm 3l\in D, \cdots, x\pm nl\in D, \cdots$ 即数集 D 既无上界也无下界. 若 $l>0$ 是 $f(x)$ 的周期, 则 nl 也是它的周期. 若函数 $f(x)$ 有最小正周期, 则称这个最小正周期为 $f(x)$ 的基本周期, 通常所说的函数的周期即是指基本周期.	① 存在没有最小正周期的非常值的周期函数. 如任意正有理数均为狄利克雷函数的周期. ② 两个周期函数的和或积未必是周期函数. 只有当两个周期的商为正有理数时, 它们的和或积才是周期函数.

8. 几种常见的特殊函数

名　称	内　容	图　像
振荡函数	$y=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$	
符号函数	$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$	
狄利克雷(Dirichlet)函数	$y=\begin{cases} 1,当\ x\ 为有理数, \\ 0,当\ x\ 为无理数 \end{cases}$	
黎曼(Riemann)函数	$y=\begin{cases} \dfrac{1}{q},\ 当\ x=\dfrac{p}{q}(p,q\ 为正整数, \\ \quad \dfrac{p}{q}\ 为既约真分数), \\ 0,\ 当\ x=0,1\ 及(0,1)\ 内的无理数 \end{cases}$	
整数部分函数	$\forall x\in\mathbf{R}$,对应的 y 是不超过 x 的最大整数,记作 $y=[x]$.	
小数部分函数	$y=x-[x],x\in\mathbf{R}$	

9. 重点、难点与考点

重　点	函数的有关基本知识
难　点	确界的定义和确界原理
考　点	函数的有关概念,上、下确界

第1章

典型例题解析

基本题型Ⅰ:求一元函数的定义域

【例1】 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$; (2) $y=\lg[\cos(\lg x)]$;

(3) $y=(x-|x|)\sqrt{-\sin^2\pi x}$; (4) $y=\arcsin(2+3^x)$;

(5) $y=(2x)!$; (6) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<0,\\ x, & 0<x<1,\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

【思路探索】 函数的定义域需使得函数的所有部分有定义,一般要求多个不等式的交集,若涉及实际问题,还需要特别注意变量的实际意义.例如,长度、时间等均要非负.

解:(1) 欲使 $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$ 有意义,必须满足不等式组 $\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\neq\pm 1\\ x\geqslant -2\end{cases}$,因此,所求函数的定义域为 $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 当 $\cos(\lg x)>0$ 即 $\left(2k-\dfrac{1}{2}\right)\pi<\lg x<\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi(k=0,\pm 1,\cdots)$ 时,函数有意义,所以原函数的定义域为 $10^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}<x<10^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}(k=0,\pm 1,\cdots)$.

(3) 由于 $\sin^2\pi x\geqslant 0$,所以仅当 $\sin\pi x=0$ 时原函数才有意义,所以函数的定义域为 $x=k(k=0,\pm 1,\cdots)$.

(4) 由于 $3^x>0$,即 $2+3^x>2$,不满足 $-1\leqslant 2+3^x\leqslant 1$,因此,原函数不存在定义域,即无意义.

(5) 由于 $2x=n$,因而函数的定义域为 $x=\dfrac{n}{2}(n=0,1,2,\cdots)$,即 $x=0,\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2},2,\dfrac{5}{2},3,\cdots,\dfrac{n}{2},\cdots(n=0,1,2,3,\cdots)$.

(6) 由于函数为分段表示的函数,所以定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,2]$.

方法点击:求函数的定义域,在不和具体问题结合的情况下,就是求使式子有意义的一切实数值,即存在域.通常需考虑如下几点:

① 分母不得为零;

② 偶次根号下的式子非负;

③ 对数符号后的值为正;

④ 正(余)切函数符号后的值不等于 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\pi)(k=0,\pm 1,\cdots)$;

⑤ 反正、余弦符号后的值的绝对值不大于1;

⑥ 若函数由几项组成,取各项定义域的交集;

⑦ 分段函数取各段定义域的并.

【例2】 设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,问(1) $f(x^2)$;(2) $f(\sin x)$;(3) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 的定义域是什么?

【思路探索】 利用函数的定义.

解:(1) $\because 0\leqslant x^2\leqslant 1,\therefore -1\leqslant x\leqslant 1$,因此定义域为 $[-1,1]$.

(2) $\because 0\leqslant\sin x\leqslant 1,\therefore 2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi(k=0,\pm 1,\cdots)$.

因此,函数的定义域为 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$(k 为整数).

(3) $\because\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1;\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$ ①

注意到 $a>0$,只能有两种情形:

(ⅰ) 当 $1-a<a$ 时,即 $a>\frac{1}{2}$ 时,① 无解,即定义域不存在;

(ⅱ) 当 $a\leqslant 1-a$ 时,即 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时,① 的解为 $a\leqslant x\leqslant 1-a$,因此,定义域为$[a,1-a]$.

基本题型 Ⅱ:相同函数的判定

【例 3】 下列各题中,函数 $f(x)$,$g(x)$ 是否相同?为什么?在哪一区间内它们是相同的?

(1) $f(x)=\frac{x}{x}$, $g(x)=1$;　　(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$;　　(4) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(5) $f(x)=|x|$, $g(x)=(\sqrt{x})^2$.

【思路探索】 我们说两个函数相同,是指两个函数同时满足:

(ⅰ) 定义域相同;

(ⅱ) 对应法则相同.

解:(1) $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$g(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,因而两函数不相同.在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上两函数相同.

(2) 虽然 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,但由于对应法则不同,因而值域也不同,所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.但在$[0,+\infty)$ 上是相同的.

(3) $f(x)$ 的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$g(x)$ 的定义域是$(0,+\infty)$,因而两函数不相同.但在$(0,+\infty)$ 上是相同的.

(4) 相同.因为它们同时满足思路探索中的两个条件.

(5) $f(x)$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$,$g(x)$ 的定义域是$[0,+\infty)$,因而不相同.但在$[0,+\infty)$ 上是相同的.

基本题型 Ⅲ:判断函数的奇偶性

【例 4】 试判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$;　　(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(3) $f(x)=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}(a>0)$;　　(4) $f(x)=x^3+\cos x$.

【思路探索】 利用奇偶性定义.

解:(1) $f(-x)=\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\frac{1+x}{1-x}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$,

$\therefore f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$ 为奇函数.

(2) $$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

$\therefore f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

(3) $$f(-x)=(-x)\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\frac{(-x)a^x(a^{-x}-1)}{a^x(a^{-x}+1)}=(-x)\frac{1-a^x}{1+a^x}$$

$$=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}=f(x),$$

$\therefore f(x)=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}$ 为偶函数.

(4) $f(-x)=(-x)^3+\cos(-x)=-x^3+\cos x$,

即 $f(-x)$ 既不等于 $f(x)$,又不等于 $-f(x)$,

$\therefore f(x)=x^3+\cos x$ 是非奇非偶函数.

方法点击:判断函数奇偶性通常采用的方法有:

① 从定义出发,或者利用运算性质(奇函数的代数和为奇函数等);

② 证明 $f(-x)+f(x)=0$ 或 $f(-x)-f(x)=0$.

基本题型Ⅳ:一元函数周期性的讨论

【例 5】 判断下列函数是否是周期函数?若是,求其周期:

(1) $f(x)=\sin^2 x$;　　(2) $f(x)=\sin x^2$;

(3) $f(x)=\arctan(\tan x)$;　　(4) $f(x)=\sin x+\sin(\sqrt{2}x)$.

【思路探索】 利用周期函数的定义.

解:(1) 方法一:$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$,而 $\cos 2x$ 的周期 $T'=\frac{2\pi}{2}=\pi$,

$\therefore f(x)=\sin^2 x$ 的周期 $T=T'=\pi$.

方法二:设周期为 T,则有 $\sin^2(x+T)-\sin^2 x=0$,而

$$\begin{aligned}\sin^2(x+T)-\sin^2 x&=[\sin(x+T)+\sin x]\cdot[\sin(x+T)-\sin x]\\&=4\sin\frac{2x+T}{2}\cos\frac{T}{2}\cdot\cos\frac{2x+T}{2}\sin\frac{T}{2}\\&=\sin(2x+T)\sin T=0,\end{aligned}$$

于是有 $\sin(2x+T)=0$ 或 $\sin T=0$.

由 $\sin T=0$ 得 $T=\pi$,而当 $T=\pi$ 时,$\sin(x+T)=-\sin x$,因此,函数 $f(x)=\sin^2 x$ 是周期函数,其周期为 $T=\pi$.

(2) 不是周期函数.因若存在 T,使

$$\sin(x+T)^2=\sin(x^2+2Tx+T^2)=\sin x^2,$$

只有当 $T=0$ 才可以.

(3) $\because \tan x$ 的周期 $T=\pi$,$\therefore f(x)=\arctan(\tan x)$ 为周期函数,其周期 $T=\pi$.

(4) $\because \sin x$ 的周期 $T_1=2\pi$,$\sin(\sqrt{2}x)$ 的周期 $T_2=\sqrt{2}\pi$.而 2π 与 $\sqrt{2}\pi$ 无最小公倍数,故 $f(x)=\sin x+\sin(\sqrt{2}x)$ 不是周期函数.

【例 6】 证明:任何正有理数 r 都是狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 的周期.

【思路探索】 利用周期函数的定义.

证明:任意有理数 $r>0$,当 x 为有理数时,$x+r$ 也是有理数,当 x 为无理数时,$x+r$ 也是无理数.

故 $D(x+r)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数},\\0, x\text{ 为无理数},\end{cases}$ 即 $D(x+r)=D(x)$.

因此,任何正有理数 r 都是狄利克雷函数的周期.

基本题型Ⅴ:讨论函数的单调性

【例 7】 证明 $f(x)=1-\ln x$ 是单调递减函数.

【思路探索】 利用单调性的定义.

证明:$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,则

$$f(x_1)-f(x_2)=(1-\ln x_1)-(1-\ln x_2)=\ln\frac{x_2}{x_1},$$

由 $\frac{x_2}{x_1}>1$,$\therefore \ln\frac{x_2}{x_1}>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$.

因此,$f(x)=1-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调递减的.

基本题型 Ⅵ:求函数的表达式

【例 8】　设 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n次}$,若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f_n(x)$.

【思路探索】　使用归纳法.

解:当 $n=2$ 时,

$$f_2(x)=f[f(x)]=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

设对于 $n=k$ 时,有 $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$,则对于 $n=k+1$ 时,有

$$f_{k+1}(x)=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

从而由数学归纳法知,对于任何自然数 n,有 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

方法点击:含有未知函数的方程叫作函数方程,变量代换法和拼凑法是解简单函数方程的两种最基本的方法.

【例 9】　设 $f(x)+f(y)=f(z)$,求出 z,若(1) $f(x)=ax$;(2) $f(x)=\arctan x(|x|<1)$.

【思路探索】　利用函数的性质.

解:(1) $f(x)+f(y)=ax+ay=a(x+y)$, $f(z)=az$,

由 $f(x)+f(y)=f(z)$ 得 $z=x+y$.

(2) 由 $\arctan x+\arctan y=\arctan z$,得 $\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}=\arctan z$.

所以 $z=\dfrac{x+y}{1-xy}$.

【例 10】　设(1) $\varphi(x)=\operatorname{sgn}x$, $\psi(x)=\dfrac{1}{x}$;(2) $\varphi(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0,\\ x, x>0;\end{cases}$ $\psi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0.\end{cases}$

求:$\varphi(\varphi(x))$, $\varphi(\psi(x))$, $\psi(\varphi(x))$, $\psi(\psi(x))$.

【思路探索】　利用复合函数的定义.

解:(1) $\varphi(\varphi(x))=\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(x))=\operatorname{sgn}x$;

$$\varphi(\psi(x))=\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x}\right)=\operatorname{sgn}x(x\neq 0);$$

$$\psi(\varphi(x))=\frac{1}{\operatorname{sgn}x}=\operatorname{sgn}x(x\neq 0);$$

$$\psi(\psi(x))=\frac{1}{\dfrac{1}{x}}=x(x\neq 0).$$

(2) $\varphi(\varphi(x))=\varphi(x)$, $\varphi(\psi(x))=0$, $\psi(\varphi(x))=\psi(x)$, $\psi(\psi(x))=0$.

基本题型 Ⅶ:关于确界及确界原理

【例 11】　证明:若数集 S 的上确界存在,则一定是唯一的.

【思路探索】　利用上确界的定义.

证明:方法一:设 $\eta=\sup S$. 若另有 $\eta'=\sup S$,则由上确界定义,η 为 S 的最小上界,η' 是 S 的一个上界,所以 $\eta\leqslant\eta'$;同理有 $\eta'\leqslant\eta$,故 $\eta'=\eta$. 即 S 的上确界是唯一的.

方法二:(反证法) 设 η 与 η' 均为 S 的上确界,若 $\eta'\neq\eta$,不妨设 $\eta'<\eta$,由 $\eta=\sup S$ 及上确界定义,$\exists x_0\in S$,使 $x_0>\eta'$,这与 $\eta'=\sup S$ 矛盾,故 $\eta'=\eta$,即 S 的上确界是唯一的.

考研真题精析

1. (北京科技大学) 叙述数集 A 的上确界定义,并证明:

对任意有界数列 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$,总有 $\sup\{x_n+y_n\}\leqslant\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}$.

【思路探索】 运用上确界的定义.

解:若存在数 a 满足下面两条:

(1) $\forall x\in A$,都有 $x\leqslant a$;

(2) $\forall b<a$,一定存在 $x_0\in A$,有 $x_0>b$.

则称 a 为数集 A 的上确界,即 $\sup A=a$.

令 $a=\sup\{x_n\}$,$b=\sup\{y_n\}$,则 $x_n\leqslant a$,$y_n\leqslant b(n=1,2,\cdots)$,

$\therefore x_n+y_n\leqslant a+b$,

$\therefore \sup\{x_n+y_n\}\leqslant a+b=\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}$.

2. (中国人民大学) 设 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$,求 $f(x)$ 的定义域和 $f(f(-7))$.

【思路探索】 运用函数的定义.

解:由 $3-x>0$,$3-x\neq1$,$49-x^2\geqslant0$,解得 $x\in[-7,2)\cup(2,3)$,从而可知,$f(x)$ 的定义域为 $[-7,2)\cup(2,3)$.

又
$$f(-7)=\frac{1}{\lg 10}=1,$$

$\therefore f(f(-7))=f(1)=\dfrac{1}{\lg 2}+4\sqrt{3}$.

3. (海军工程大学) 设 $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}(-\infty<x<+\infty)$,

$$g(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant0.\end{cases}\text{求 } f(g(x)).$$

解:
$$f(g(x))=\frac{g(x)+|g(x)|}{2}=\begin{cases}\dfrac{x+(-x)}{2}=0, & x<0,\\[2mm] \dfrac{x^2+x^2}{2}=x^2, & x\geqslant0.\end{cases}$$

4. (华中理工大学) 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,试验证 $f(f(f(f(x))))=x$,并求 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$,$x\neq0$,$x\neq1$.

解:
$$f(f(x))=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=x.$$

$\therefore f(f(f(f(x))))=f(f(x))=x$.

$$\text{又 } f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}-1}=1-x.$$

5. (合肥工业大学) 证明:定义在对称区间 $(-l,l)$ 内的任何函数 $f(x)$,必可以表示成偶函数 $H(x)$ 与奇函数 $G(x)$ 之和的形式,且这种表示法是唯一的.

证明:令 $H(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$,$G(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$,则 $f(x)=H(x)+G(x)$,且容易证明 $H(x)$ 是偶函数,$G(x)$ 是奇函数.

下证唯一性.

若还存在偶函数 $H_1(x)$ 和奇函数 $G_1(x)$,满足 $f(x)=H_1(x)+G_1(x)$,则有
$$H(x)-H_1(x)=G_1(x)-G(x). \quad ①$$

用 $-x$ 代入 ① 式有
$$H(x)-H_1(x)=G(x)-G_1(x). \quad ②$$

由 ①+② 可得 $H(x)=H_1(x)$,再代入 ① 式可得 $G(x)=G_1(x)$.