学府考研
十年专注·只做考研

高·等·数·学
30年真题超精解

◎ 屈海亮 主编

（数学一）

数学全程答疑

下载答疑APP

刷真题·做学霸

1988—2017年考研数学真题分类详解

西北工業大學出版社

GAODENG SHUXUE 30 NIAN ZHENTI CHAO JINGJIE

高等数学30年真题超精解

SHUXUE YI

（数学一）

主　编　屈海亮

副主编　王　喆　王　涛

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书汇集了1988—2017年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题中的所有高等数学题目，并按照考研数学考试大纲规定的章节和题型进行分类编写，将不同年份、相同考点和题型的试题归纳在一起，内容翔实，栏目设计合理，且做到一题多解，具有独到之处．本书涵盖了历年考题中所有的题型和解题方法，并针对每类题型，给出相应的知识要点和解题思路，做到知识点融会贯通，使考生在复习过程中做到有的放矢，心中有数．

本书可作为备战2018年研究生入学考试的学生、提前备战2019年研究生入学考试的学生的辅导用书，也可供从事本专业教学的教师参考．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学30年真题超精解．数学一 / 屈海亮主编．—西安 ：西北工业大学出版社，2017.4

ISBN 978-7-5612-5324-3

Ⅰ．①高… Ⅱ．①屈… Ⅲ．①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ．①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第098776号

策划编辑：杨　军

责任编辑：张珊珊

出版发行：西北工业大学出版社

通信地址：西安市友谊西路127号　　**邮编：**710072

电　　话：(029)88493844　88491757

网　　址：www.nwpup.com

印 刷 者：西安新华印务有限公司

开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16

印　　张：19.75

字　　数：439千字

版　　次：2017年4月第1版　　2017年4月第1次印刷

定　　价：46.80元

风雨考研路　学府伴你行

“学府考研”是学府教育旗下专业从事考研辅导的品牌！

“学府考研”是一个为实现人生价值和理想而欢聚一堂的团队。2006年从30平方米办公室起步，历经十年，打造了一个考研培训行业的领军品牌。如今学府考研已发展成为集考研培训、图书编辑、在线教育为一体的综合性教育机构，扎根陕西，服务全国。

学府考研的辅导体系满足了考研学子不同层面的需求，主要以小班面授教学、全日制考研辅导、网络小班课为核心，兼顾大班教学、专业课一对一辅导等多层次辅导。学府考研在教学中的“讲、练、测、评、答”辅导体系，解决了考研辅导“只管教，不管学”的问题，保证学员在课堂上听得懂，课下会做题。通过定期测试，掌握学员的学习进度，安排专职教师答疑，保证学习效果。总结多年教学实践经验，学府考研逐渐形成了稳定的辅导教学体系，尽量做到一个学员一套学习计划、一套辅导方案，大大降低了学员考取目标院校的难度。在公共课教学方面实现零基础教学，在专业课方面，建立了遍及全国各大高校的研究生专业信息资源库，解决考生跨院校、跨专业造成的信息不对称、复习资料缺乏等难题。

“学府考研”的使命是帮助每一个信任学府的学员都能考上理想院校。

学府文化的核心是“专注文化”。

“十年专注，只做考研”。因为专业，所以深受万千考研学子信赖！

“让每一个来这里的考研学子都成为成功者”。正是这种责任，让学府考研快速成为考生心目中当仁不让的必选品牌。

人生能有几回搏，三十年太长，只争朝夕！

同学们，春华秋实，为了实现理想，努力吧！

学府考研总部　全国统一客服电话 | 400-090-8961
陕西·西安友谊东路75号新红锋大厦三层

学府官方微博

学府官方微信

致学府图书用户

亲爱的学府图书用户：

您好！欢迎您选择学府图书，感谢您信任学府！

“学府图书”是学府考研旗下专业从事考研教辅图书研发的图书公司！

为了更好地为您提供“优质教学、始终如一”的服务，对于您所提出的宝贵意见与建议，我们向您深表感谢！

若我们的图书质量或服务未达到您的期望，敬请您通过以下联系方式进行告知。我们珍视并诚挚地感谢您的反馈，谢谢您！

在此祝您学习愉快！

学府图书全国统一客服电话：400-090-8961

学府图书质量及服务监督电话：15829918816

学府图书总经理投诉电话：张城 18681885291 投诉必复！

您也可将信件投入此邮箱：34456215@qq.com 来信必回！

图书微博　　图书微信　　图书微店

前言

在考研复习的过程中，同学们都听过这样一句话，“得数学者得天下”．从这句话中就能反映出来考研数学在考研科目中举足轻重的地位，因为在统考的三门科目（数学、英语、政治）中数学的满分分值最高，为 150 分．不仅如此，数学也是复习周期最长、难度最大、技巧性最强的一门课程．因此数学成绩的高低，在很大程度上决定着考生能否考上理想的名校．

在漫长的考研数学复习过程中，很多考生比较关心的是如何选择合适的复习参考书．众所周知，历年真题是所有考研复习资料中最重要的，也是必不可少的，其重要性主要体现在下述几方面．

1. 真题是历届考试命题组老师们集体智慧的结晶，题目经典，又有规律可循，通过复习历年真题我们可以掌握命题规律，把握复习重难点．

2. 真题蕴含着命题的指导思想、基本原则和命题趋势，反映出《考研数学大纲》对考生的基本概念、基本理论和基本方法掌握水平的要求．

3. 真题帮助考生明确复习的基本方向以及把握复习过程中做题的难易程度．通过真题我们不难发现历年真题题目的难易程度是相对稳定的，尤其是从 2003 年以后，考研数学满分从原来的 100 分增至 150 分；试卷从结构、知识点覆盖面和题目难易程度上都保持了很好的稳定性，这也使得考生在复习过程中更要注重历年真题的研究．

本书汇集 1987 年至今 30 多年数学一真题题目，这些题目是考生了解、分析和研究考研数学最宝贵、最直接的渠道．虽然市面上关于考研数学真题的复习参考书有很多品种，但这其中大部分书不能和考生复习数学大纲考点的顺序保持一致．为了方便考生对考研数学大纲知识点的系统复习，我们根据多年的考研辅导经验精心编写了 30 年真题超精解系列书，其中，本书具有以下几大特点．

1. 全　本书汇集自 1987 年以来全国硕士研究生入学统一考试数学一试题中的所有高等数学题目，通过全面复习真题可帮助考生总结出考研数学命题的规律和方向，掌握复习的重点和难点，为考生取得高分打下坚实的基础．

2. 广　本书是按照数学考试大纲规定的章节和题型进行分类解析的，将不同年份、相同的考点和题型的试题归纳在一起，并给出详细的解答．本书涵盖历年考题中所有的题型和解题方法，这样便于考生在复习过程中，通过真题超精解把握考研数学的常考题型、解题方法和技巧；做到知识点之间的融会贯通，进而掌握试题的广度和深度，并在复习过程中做到有的放矢、心中有数．

3. 精　本书中每类题型都给出了知识要点和解题思路，所有的试题都给出了详细的解答过

程，并尽量做到一题多解，其中很多试题的解法是编者根据多年的考研辅导和教学经验总结出来的，具有独到之处．本书在每道题详解的基础之上，都给出名师评注，这样可以培养考生独立思考和解决问题的能力，达到举一反三，触类旁通的效果．

由于笔者水平有限，书中的疏漏和不足之处在所难免，恳请读者和同行批评指正．

最后希望本书能对大家在考研高等数学的复习中有所帮助．祝考生备考顺利，考研成功！

编　者

2017 年 1 月

目　录

第一章 函数、极限、连续

考情分析

考试概况

函数是高等数学的重要研究对象；极限是建立微积分理论和方法的基础，又是研究微积分的基本理论工具；连续性是函数的基本性态，是函数可导和可积的基本条件，且连续函数是微积分所讨论的函数的主要类型. 因此，本章内容是整个高等数学的基础，也是每年考研数学的必考知识点，尤其是极限的计算，考研大纲规定了以下考试内容.

(1) 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

(3) 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

(4) 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

(5) 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

(6) 掌握极限的性质及四则运算法则.

(7) 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限；掌握利用两个重要极限求极限的方法.

(8) 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.

(9) 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

(10) 了解连续函数的性质和初等函数的连续性；理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

命题分析

本章是考研数学命题的重点及必考章节，且由于本章的概念和理论非常之多，因此考查的重点就在于这些基本概念和基本理论. 从历年考研情况来看，本章的失分率比较高. 造成失分的原因主要是考生没有将基本概念和基本理论理解透彻，导致在做题的时候想当然. 本章的三大常考题型是：极限的计算、无穷小量及其比较、函数间断点类型的判定. 而无穷小量的比较实际就是求“$\frac{0}{0}$”型的极限，而间断点类型判定的关键也是求极限，所以本章三种常考题型的核心是极限的计算.

趋势预测

2018 年考研数学一将会注重本章理论基础和应用性的考查，并且对本章基础知识的考查

会全面且突出重点、注意层次，并有如下特点：

(1) 以选择题的形式为主考查考生对极限概念与性质的理解；

(2) 以解答题的形式为主考查考生对极限计算方法的掌握，重点是函数未定式的极限的计算方法的掌握.

复习建议

考生在复习过程中应该注重对本章的基本概念和基本理论的理解，特别是要掌握各种求极限的方法，其中以洛必达法则、等价无穷小代换、泰勒公式最为重要，此外还有夹逼定理和单调有界定理求解数列极限.

本章也会与其它章节内容结合进行综合性考查，所以建议考生在复习的过程中注意前后贯通，灵活应用.

考点清单

1. 求分段函数的复合函数	31 年 2 考
2. 函数的四种性质	31 年 5 考
3. 极限的概念与性质	31 年 2 考
4. 数列极限的计算	31 年 6 考
5. 未定式极限的计算	31 年 18 考
6. 无穷小阶的比较	31 年 3 考
7. 确定极限式中的参数	31 年 8 考
8. 函数的连续性与间断点的类型	31 年 3 考
9. 讨论方程根(或函数零点)的存在性	31 年 5 考

真题全解

一 求分段函数的复合函数(31 年 2 考)

1. 知识要点

(1) 分段函数：在自变量的不同范围中，对应法则用不同式子表示的函数称为分段函数.

注：分段函数的定义域为自变量不同范围的并集.

(2) 复合函数：

定义 1：设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g，且其值域 $R_g \subset D_f$，则函数 $y=f[g(x)]$，$x \in D_g$，称为由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数，它

的定义域为 D_g，变量 u 称为中间变量.

定义 2：设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g，且其值域为 R_g，若 $R_g \cap D_f \neq \varnothing$，则函数 $y=f[g(x)]$ 称为由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数，变量 u 称为中间变量.

由此可见，并非任意两个函数都能构成复合函数，两个函数构成复合函数要求内函数的值域与外函数的定义域交集非空.

2. 解题思路

分段复合函数 $y=f[g(x)]$ 的表达式求法的思路是由内到外的分层确定法，即先写出 $u=g(x)$ 在相应区间上的表达式，再确定 $f(u)$ 的表达式.

真题 1（1988 年，5 分）设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

【分析】求复合函数中内层函数的解析式，关键是求其定义域.

【详解】先求 $\varphi(x)$ 的表达式. 由 $f(x)=e^{x^2}$ 可得 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$，即有 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$，解得 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$. 因为 $\varphi(x)\geqslant 0$，故 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.

再求 $\varphi(x)$ 的定义域. 由 $1-x>0$ 得 $x<1$. 又由 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 可得 $x\leqslant 0$. 由 $x<1$ 与 $x\leqslant 0$ 求交集可得 $\varphi(x)$ 的定义域为 $x\leqslant 0$. 于是 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，$x\leqslant 0$.

名师评注

本题求解表达式比较容易，但是求定义域难度较大，很多考生由于没有弄清楚复合函数定义域的求解方法而出错.

真题 2（1990 年，3 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$______.

【分析】求分段函数的复合函数的思路为由内到外的分层确定法.

【详解】应填 1.

由 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，得 $\quad f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1\\ 0, & |f(x)|>1\end{cases}$

可知对于一切的 x 有 $|f(x)|\leqslant 1$，于是有 $f[f(x)]=1$.

名师评注

本题是求复合函数表达式的基本题目，比较简单. 考生做错的原因是没有弄清楚复合后 $f[f(x)]$ 取不到数值 0.

二　函数的四种特性（31 年 5 考）

1. 知识要点

(1) 有界性：设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果 $\exists M>0$，使对 $\forall x\in I$ 都有 $|f(x)|\leqslant$

M,则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界.

(2) 奇偶性:设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义且 I 关于原点对称,若 $\forall x \in I$,有 $f(-x)=f(x)$ $[f(-x)=-f(x)]$,则称 $f(x)$ 为偶(奇)函数.偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称.

(3) 单调性:设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果对于 $\forall x_1,x_2$ 且 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)(\text{或 } f(x_1)>f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(减少)的.

(4) 周期性:设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果存在一个正数 T,使得对于任一 $x \in I$, $x+T \in I$,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

2. 解题思路

在考研真题中关于函数性质的考查往往会与导数及积分相结合起来,这就需要考生加强练习综合性题目.除此之外,考生还需要熟记一些关于四种性质的结论,以便于提高解题的效率和准确性.

真题 3 (1995 年,3 分) 设在$[0,1]$上 $f''(x)>0$,则 $f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是(　　).

(A) $f'(1)-f'(0)>f(1)-f(0)$　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

【分析】怎样将函数之差 $f(1)-f(0)$ 与导数联系起来?自然可以想到用拉格朗日中值定理.其次由二阶导函数大于零联想到了一阶导函数单调递增.这样就将函数的单调性与拉格朗日中值定理联系起来了,本题也迎刃而解.

【详解】应选(B).

由 $f''(x)>0$,可得 $f'(x)$ 在$[0,1]$上单调递增,又由拉格朗日中值定理,可得

$$f(1)-f(0)=f'(c)(0<c<1)$$

则由 $f'(x)$ 在$[0,1]$上单调递增,可得 $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

名师评注

本题考查函数单调性的判定及拉格朗日中值定理的应用,属于综合性的题目.在做题过程中如果遇到函数之差 $f(b)-f(a)$,可以考虑用拉格朗日中值定理进行处理.

真题 4 (1999 年,3 分) 设 $f(x)$ 是连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则(　　).

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时 $F(x)$ 必是偶函数

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时 $F(x)$ 必是奇函数

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时 $F(x)$ 必是周期函数

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时 $F(x)$ 必是单调增函数

【分析】本题考查判定函数与其原函数的奇偶性、周期性和单调性之间的关系.此类题型常采用的方法为举反例排除法.

【详解】应选(A).

$f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,于是

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C \xlongequal{u=-t} \int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)+C$$

当 $f(x)$ 为奇函数时,$f(-u)=-f(u)$,从而有

$$F(-x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C=F(x)$$

即 $F(x)$ 为偶函数. 故(A)为正确选项.

(B)(C)(D)可分别举反例如下:

$f(x)=x^2$ 是偶函数,但其原函数 $F(x)=\frac{1}{3}x^3+1$ 不是奇函数,排除(B);

$f(x)=\cos x+1$ 是周期函数,但其原函数 $F(x)=\sin x+x+1$ 不是周期函数,排除(C);

$f(x)=x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增函数,但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内非单调增函数,排除(D).

名师评注

本题主要考查函数与原函数性质的关系,此类题目通常用举反例排除法.举反例排除法只能说明某个选项是错的,由于举反例具有特殊性,因此不能去论证选项是否正确,这一点考生务必牢记.

真题5 (2005年,4分)设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,"$M\Leftrightarrow N$"表示 M 的充分必要条件是 N,则必有(　　).

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数　　(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数　　(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

【分析】本题考查判定函数与其原函数的奇偶性、周期性和单调性之间的关系.本题可以直接论证,但最简单的方法还是通过举反例排除找到答案.

【详解】应选(A).

应用函数奇偶性的定义判定:

函数 $f(x)$ 的任一原函数可表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,且 $F'(x)=f(x)$.

当 $F(x)$ 为偶函数时,有 $F(-x)=F(x)$,于是 $F'(-x)\cdot(-1)=F'(x)$,即 $-f(-x)=f(x)$,亦即 $f(-x)=-f(x)$,可见 $f(x)$ 为奇函数;

反过来,若 $f(x)$ 为奇函数,则 $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C$,令 $t=-k$,则有 $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}k$,所以

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C=-\int_0^x f(-k)\mathrm{d}k+C=\int_0^x f(k)\mathrm{d}k+C=F(x)$$

从而 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$ 为偶函数，可见(A) 为正确选项.

(B)(C)(D) 可分别举反例如下：

令 $f(x)=1$，则取 $F(x)=x+1$，排除(B)(C)；

令 $f(x)=x$，则取 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$，排除(D).

名师评注

函数与其原函数的奇偶性、周期性和单调性已多次考查过，大部分考生也较为熟悉. 请大家思考它们之间的有界性有何关系.

真题 6 (2008 年，10 分) 设 $f(x)$ 是连续函数.

(1) 利用定义证明：函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$.

(2) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时，证明：函数 $G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 2 为周期的周期函数.

【分析】(1) 利用导数定义式求解，进而转化为求极限的问题. (2) 利用周期函数的定义判定变上限积分函数的周期.

【详解】(1) 对任意的 x，由于 f 是连续函数，则有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_0^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)$$

其中 ξ 介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间.

由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(x)$，可知函数 $F(x)$ 在 x 处可导，且 $F'(x)=f(x)$.

(2) **方法一**：由于 f 是以 2 为周期的连续函数，所以对任意的 x，有

$$G(x+2)-G(x)=2\int_0^{x+2}f(t)\,\mathrm{d}t-(x+2)\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+x\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=2\left[\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_2^{x+2}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$=2\left[-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x f(u+2)\,\mathrm{d}u\right]=2\int_0^x[f(t+2)-f(t)]\mathrm{d}t=0$$

即 $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

方法二：要证明 $G(x)$ 以 2 为周期，即要证明对任意的 x，都有 $G(x+2)=G(x)$.

令 $H(x)=G(x+2)-G(x)$，则

$$H'(x)=\left(2\int_0^{x+2}f(t)\,\mathrm{d}t-(x+2)\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right)'-\left(2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right)'$$

$$=2f(x+2)-\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t-2f(x)+\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

又因为 $$H(0)=G(2)-G(0)=\left(2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right)-0=0$$

所以 $H(x)=0$,即 $G(x+2)=G(x)$.

名师评注

本题第(1)问利用导数定义求导数,进而转化为求极限,此极限为"$\frac{0}{0}$"型,但是此处不能利用洛必达法则进行求解,原因是不满足洛必达法则的条件,因此采用积分中值定理去掉积分号,这也是处理极限中积分号的一种常见方法.第(2)问考查了周期函数的变上限积分,方法一利用周期函数的定义证明,其中也用到了定积分的换元法和定积分的性质.

真题7 (2014年,4分)设 $f(x)$ 是周期为4的可导奇函数,且 $f'(x)=2(x-1)$,$x\in[0,2]$,则 $f(7)=$________.

【分析】由 $f'(x)$ 在$[0,2]$上的表达式求出 $f(x)$ 的表达式,再利用周期性和奇偶性求解.

【详解】应填1.

由 $f(x)$ 是周期为4的可导奇函数,可得

$$f(7)=f(3)=f(-1)=-f(1),f(0)=0$$

对 $f'(x)=2(x-1)$ 两边积分,且 $f(0)=0$,则有 $f(x)=x^2-2x,x\in[0,2]$.于是,$f(7)=-f(1)=1$.

名师评注

本题主要考查函数的奇偶性和周期性以不定积分的计算,其中用到了结论:若 $f(x)$ 为奇函数且在 $x=0$ 处有定义,则 $f(0)=0$.

三 极限的概念与性质(31年2考)

1.知识要点

(1)极限的概念:数列极限的概念与函数极限的概念.

(2)极限的性质:

数列极限的性质(唯一性、有界性、保号性).

函数极限的性质(唯一性、局部有界性、局部保号性).

2.解题思路

(1)熟练掌握极限的概念,重点是理解数列极限的$\varepsilon-N$定义和函数极限的$\varepsilon-\delta$及$\varepsilon-X$定义.对于用定义证明极限考研数学大纲是不做要求的.

(2) 极限性质中的保号性是考研考查的一个重点，可以与其它章节结合起来考查. 并且应用极限性质时一定要注意性质的前提条件.

真题 8 (2003 年，4 分) 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有(　　).

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

【分析】已知某些抽象数列极限的存在性，要讨论这些数列的关系或运算之后的极限是否存在，应该按照极限定义、基本性质来处理. 由于本题中的数列是抽象数列，所以有一定的难度，如果能举出反例，则可以逐个排除错误的选项.

【详解】应选(D).

方法一：推理法

由题设$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，假设$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 存在并记为A，则$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_nc_n}{b_n}=A$，这与$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ 矛盾，故假设不成立，$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在. 所以选项(D) 正确.

方法二：排除法

取 $a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=\dfrac{n-1}{n}$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，而 $a_1=1$，$b_1=0$，$a_1>b_1$，(A) 不正确；

取 $b_n=\dfrac{n-1}{n}$，$c_n=n-2$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，而 $b_1=0>-1=c_1$，(B) 不正确；

取 $a_n=\dfrac{1}{n}$，$c_n=n-2$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，而$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=1$，(C) 不正确.

名师评注

本题考查数列极限的概念与性质(保号性及乘法法则的推广)，应该特别注意极限保号性的条件.

真题 9 (1992 年，3 分) 当 $x\to1$ 时，函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限(　　).

(A) 等于 2　　(B) 等于 0

(C) 为 ∞　　(D) 不存在但不为 ∞

【分析】本题考查考生对极限的唯一性与无穷大概念的理解. 若函数在一点处左右极限不相等则此处极限就不存在.

【详解】应选(D).

应当分别考虑 $x\to1^-$ 与 $x\to1^+$ 时的极限. 则有

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0,\ \lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$$