数学奥林匹克大集新编

黄宣国 / 编著

中国科学技术大学出版社

数学奥林匹克大集新编

黄宣国 / 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书将中学阶段的数学内容进行了较系统的归类和介绍.阅读本书可以开拓读者在不等式、方程与多项式、数论、组合数学、平面几何等方面的视野,提高对这些内容的认知和解决同类问题的能力.本书适合中学数学教师和学有所长的高中学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克大集新编/黄宣国编著.—合肥:中国科学技术大学出版社,2016.7
ISBN 978-7-312-03977-5

Ⅰ.数… Ⅱ.黄… Ⅲ.中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 133114 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷 合肥市宏基印刷有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 787 mm×1092 mm 1/16
印张 52
字数 1 467 千
版次 2016 年 7 月第 1 版
印次 2016 年 7 月第 1 次印刷
定价 128.00 元

前　言

1997 年由上海教育出版社出版的《数学奥林匹克大集 1994》迄今已近二十年.这本书在高中数学教师群中有一定的影响.近年,有两个出版社联系我,表示愿意再版此书.

我花了约半年时间,对原书的个别例题简化了证明,精简了多处叙述,删除了个别我认为不妥的例题,也对原书的极少量小疏忽进行了修改.现呈现在读者面前的这部书,比原书增加了约二分之一的篇幅,对将近二十年来我假期在天津、长沙、杭州、上海、广州等地的讲课内容进行了挑选,从中选择若干材料作为增补例题写入了本书.

本书的第一部分为讲座精选,共五章,包含不等式、方程与多项式、数论、组合数学、平面几何等内容,约占全书三分之二的篇幅,其中超过一半的内容是新增的.讲座精选部分材料来自两个方面:首推《美国数学月刊》(*The American Mathematical Monthly*),其次是加拿大中等数学杂志(*Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem*).另外,还查阅了一些国外数学竞赛方面的书籍,包括英文版的组合数学习题集、不等式论文集等,从中选取了若干题目作为例题.当然书中有一些例题是我自编的,其中包含我与中学生的互动内容.第二部分为资料汇编,共三章,前两章内容基本源于原书,最后一章是新增的,我查阅了 2001 年至 2011 年上述提及的加拿大中等数学杂志,从中挑选了近 400 道各国数学竞赛题目,供读者选用.

1995 年暑假,我每天写 500 字的稿纸 20 页,原书的绝大部分内容就是在当时没有空调的家里完成的.八十多岁高龄的老母亲天天张罗三顿饭,使我能专心写作.因为悲苦的童年,母亲没有进过一天学堂,但凡认得她的人都赞她聪明.待原书 1997 年夏天出版时,她已离世几个月了.本书的新版,也是我对她老人家的纪念.

我希望本书对有志于中等数学研究、数学竞赛辅导的高中数学教师有所帮助,特别是希望对近年进入中学数学教师行列的青年才俊有益.另外,我也希望本书能开拓数学特别优秀的高中学生的视野.

我年轻时,在 1973 年 8 月写过一首五律.学习、研究数学需要这首诗描绘的心境,现献给读者.

往来绝尘嚣,众鸟竞相飞,
高树独幽境,细风迎素衣.
怜云何处去,广宇随心移,
青石正堪坐,静闻蝉曲稀.

另外,本书中的第6章有当时许多国内教授、副教授的工作,也有金牌获得者姚健钢的解答,在此深表谢意.

最后,感谢中国科学技术大学出版为对这部书的出版做了大量的工作.

复旦大学数学科学学院

黄宣国

2015年6月

目　录

第二部分 资料汇编

第一部分 讲座精选

第1章 不 等 式

1.1 凸函数与基本不等式

大家知道,不等式是数学竞赛中很重要的一个部分.本节向读者介绍一些基本的不等式.

大家都知道下面一些不等式.

(1) 当 $0\leqslant x_1, x_2\leqslant\pi$(这表明 x_1, x_2 两个实数都大于等于零,而小于等于 π)时,

$$\frac{1}{2}(\sin x_1+\sin x_2)=\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cos\frac{1}{2}(x_1-x_2)\leqslant\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)\tag{1.1.1}$$

因而,有

$$-\frac{1}{2}(\sin x_1+\sin x_2)\geqslant-\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)\tag{1.1.2}$$

(2) 当 x_1, x_2 全是正实数时,

$$\sqrt{x_1x_2}\leqslant\frac{1}{2}(x_1+x_2)\tag{1.1.3}$$

上式两端取对数,并且两端乘以 -1 有

$$-\frac{1}{2}(\lg x_1+\lg x_2)=-\lg\sqrt{x_1x_2}\geqslant-\lg\frac{1}{2}(x_1+x_2)\tag{1.1.4}$$

(3) 当 p 是正整数, $x_1>0$ 和 $x_2>0$ 时,有

$$\frac{1}{2}(x_1^p+x_2^p)\geqslant\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]^p\tag{1.1.5}$$

对 p 用数学归纳法,容易证明上式.

当 $p=1$ 时,(1.1.5)是等式.当 $p=2$ 时,由于

$$\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)-\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2=\frac{1}{4}(x_1-x_2)^2\geqslant0\tag{1.1.6}$$

不等式(1.1.5)也是正确的.

设当 $p=k$ 时,(1.1.5)成立,当 $p=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x_1^{k+1}+x_2^{k+1}) &= \frac{1}{4}(x_1^k+x_2^k)(x_1+x_2)+\frac{1}{4}(x_1^k-x_2^k)(x_1-x_2)\\ &\geqslant \frac{1}{4}(x_1^k+x_2^k)(x_1+x_2) \geqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]^k(x_1+x_2)\text{(利用归纳假设)}\\ &= \left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]^{k+1} \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

所以,不等式(1.1.5)对任意正整数 p 成立.

(4) 当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x_1, x_2\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,

$$\frac{1}{2}(\cos x_1+\cos x_2)=\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cos\frac{1}{2}(x_1-x_2)\leqslant\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2) \tag{1.1.8}$$

上式两端乘以 -1,有

$$-\frac{1}{2}(\cos x_1+\cos x_2)\geqslant-\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2) \tag{1.1.9}$$

(5) 当 $0\leqslant x_1, x_2<\frac{\pi}{2}$ 时,

$$\tan x_1+\tan x_2=\frac{\sin x_1}{\cos x_1}+\frac{\sin x_2}{\cos x_2}=\frac{\sin(x_1+x_2)}{\cos x_1\cos x_2} \tag{1.1.10}$$

由于

$$\sin(x_1+x_2)=2\sin\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cos\frac{1}{2}(x_1+x_2) \tag{1.1.11}$$

$$\begin{aligned}\cos x_1\cos x_2 &= \frac{1}{2}[\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)]\\ &\leqslant\frac{1}{2}[\cos(x_1+x_2)+1]=\cos^2\frac{1}{2}(x_1+x_2)\end{aligned} \tag{1.1.12}$$

利用(1.1.10),(1.1.11)和(1.1.12),有

$$\tan x_1+\tan x_2\geqslant 2\tan\frac{1}{2}(x_1+x_2) \tag{1.1.13}$$

(6) 当 $0<x_1, x_2\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,

$$\cot x_1+\cot x_2=\frac{\cos x_1}{\sin x_1}+\frac{\cos x_2}{\sin x_2}=\frac{\sin(x_1+x_2)}{\sin x_1\sin x_2} \tag{1.1.14}$$

将

$$\begin{aligned}\sin x_1\sin x_2 &= \frac{1}{2}[-\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)]\\ &\leqslant\frac{1}{2}[1-\cos(x_1+x_2)]=\sin^2\frac{1}{2}(x_1+x_2)\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

和(1.1.11)应用于(1.1.14),可以得到

$$\cot x_1+\cot x_2\geqslant 2\cot\frac{1}{2}(x_1+x_2) \tag{1.1.16}$$

(7) 当 x_1, x_2 是任意实数时,可以看到

$$\begin{aligned}(1+10^{x_1})(1+10^{x_2}) &= 1+(10^{x_1}+10^{x_2})+10^{x_1+x_2}\\ &\geqslant 1+2\cdot 10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}+10^{x_1+x_2}\text{(利用(1.1.3))}\\ &= (1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)})^2\end{aligned} \tag{1.1.17}$$

上式两端取对数,有

$$\frac{1}{2}[\lg(1+10^{x_1})+\lg(1+10^{x_2})]\geqslant\lg(1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)})\tag{1.1.18}$$

(8) 当 h 是一个正常数,x_1,x_2 是实数时,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}(\sqrt{h^2+x_1^2}+\sqrt{h^2+x_2^2})^2-\left[h^2+\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2\right]\\&=\frac{1}{4}[2h^2+x_1^2+x_2^2+2\sqrt{(h^2+x_1^2)(h^2+x_2^2)}]-\left[h^2+\frac{1}{4}(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)\right]\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(h^2+x_1^2)(h^2+x_2^2)}-\frac{1}{2}(h^2+x_1x_2)\end{aligned}\tag{1.1.19}$$

明显地,有

$$\begin{aligned}(h^2+x_1^2)(h^2+x_2^2)&=h^4+h^2(x_1^2+x_2^2)+x_1^2x_2^2\\&\geqslant h^4+2h^2x_1x_2+x_1^2x_2^2=(h^2+x_1x_2)^2\end{aligned}\tag{1.1.20}$$

利用(1.1.19)和(1.1.20),有

$$\frac{1}{4}(\sqrt{h^2+x_1^2}+\sqrt{h^2+x_2^2})^2\geqslant h^2+\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2\tag{1.1.21}$$

上式两端开方,有

$$\frac{1}{2}(\sqrt{h^2+x_1^2}+\sqrt{h^2+x_2^2})\geqslant\sqrt{h^2+\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2}\tag{1.1.22}$$

上面已举了八个不等式的例子.现在,我们静心分析一下,立刻发现一个规律.在(1)中,令 $f(x)=-\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$,当 $0\leqslant x_1,x_2\leqslant\pi$ 时,有

$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\geqslant f\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)\tag{1.1.23}$$

在(2)中,令 $f(x)=-\lg x(x>0)$ 也有不等式(1.1.23),唯一不同之处是定义域不同.从(3)到(8)中,分别令 $f(x)=x^p$(x 是正实数,p 是正整数且 $p\geqslant2$),$f(x)=-\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,$f(x)=\tan x\left(0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right)$,$f(x)=\cot x\left(0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,$f(x)=\lg(1+10^x)$($x$ 是实数)和 $f(x)=\sqrt{h^2+x^2}$(h 是一个正常数,x 是实数),同样有不等式(1.1.23),只不过 x_1,x_2 的定义域有所不同.从(1)到(8)还可以看出,当且仅当 $x_1=x_2$ 时,(1.1.23)变为等式.这就是我们发现的规律.

还有许多函数满足不等式(1.1.23),当然自变量 x 的定义域可能各不相同.在这个基础上加以研究,建立了凸函数理论.我们把满足不等式(1.1.23)(等号成立当且仅当 $x_1=x_2$)的函数 $f(x)$ 称为某个定义域区间内的凸函数.例如,对于(1),我们就称 $f(x)=-\sin x$ 是闭区间 $[0,\pi]$ 内的一个凸函数.对于(2),称 $f(x)=-\lg x$ 是开区间 $(0,\infty)$(这表明实数 $x>0$,∞ 为无穷大)内的一个凸函数等等.

下面再举几个凸函数的例子.

(9) $f(x)=\lg\left(a+\frac{b}{x}\right)$,这里 a,b 是正常数,$x\in(0,\infty)$(这表明 x 属于开区间 $(0,\infty)$).

当 $x_1,x_2\in(0,\infty)$ 时,有

$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]=\frac{1}{2}\left[\lg\left(a+\frac{b}{x_1}\right)+\lg\left(a+\frac{b}{x_2}\right)\right]=\lg\sqrt{\left(a+\frac{b}{x_1}\right)\left(a+\frac{b}{x_2}\right)}\tag{1.1.24}$$

$$f\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)=\lg\left(a+\frac{2b}{x_1+x_2}\right)\tag{1.1.25}$$

$$\left(a+\frac{b}{x_1}\right)\left(a+\frac{b}{x_2}\right)-\left(a+\frac{2b}{x_1+x_2}\right)^2$$
$$=ab\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-\frac{4}{x_1+x_2}\right)+b^2\left[\frac{1}{x_1x_2}-\frac{4}{(x_1+x_2)^2}\right]\geqslant 0 \tag{1.1.26}$$

这里利用

$$(x_1+x_2)^2\geqslant 4x_1x_2 \tag{1.1.27}$$

知道(1.1.26)右端的中括号内部分是非负的,又利用

$$(x_1+x_2)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=2+\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)\geqslant 4 \tag{1.1.28}$$

这里最后一个不等式利用(1.1.3).于是,(1.1.26)右端的小括号内部分也是非负的.而且(1.1.26)的右端等于零当且仅当 $x_1=x_2$.于是 $f(x)=\lg\left(a+\dfrac{b}{x}\right)$是$(0,\infty)$内一个凸函数.

(10) $0<a\leqslant 4, f(x)=\lg\left(ax+\dfrac{1}{x}\right), 0<x\leqslant 1$.

当 $0<x_1,x_2\leqslant 1$ 时,有

$$\left(ax_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(ax_2+\frac{1}{x_2}\right)-\left[\frac{a(x_1+x_2)}{2}+\frac{2}{x_1+x_2}\right]^2$$
$$=a^2x_1x_2+a\left(\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}\right)+\frac{1}{x_1x_2}-\frac{1}{4}a^2(x_1+x_2)^2-2a-\frac{4}{(x_1+x_2)^2}$$
$$=a(x_1-x_2)^2\left(\frac{1}{x_1x_2}-\frac{a}{4}\right)+\left[\frac{1}{x_1x_2}-\frac{4}{(x_1+x_2)^2}\right] \tag{1.1.29}$$

由于 $0<x_1,x_2\leqslant 1, 0<a\leqslant 4$,那么,有

$$\frac{1}{x_1x_2}\geqslant 1,\quad 0<\frac{a}{4}\leqslant 1,\quad \frac{1}{x_1x_2}\geqslant\frac{4}{(x_1+x_2)^2} \tag{1.1.30}$$

从而(1.1.29)的右端是非负的.那么,可以得到

$$\left(ax_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(ax_2+\frac{1}{x_2}\right)\geqslant\left[\frac{a(x_1+x_2)}{2}+\frac{2}{x_1+x_2}\right]^2 \tag{1.1.31}$$

明显地,上式等号成立当且仅当 $x_1=x_2$.上式两端取对数,有

$$\frac{1}{2}\left[\lg\left(ax_1+\frac{1}{x_1}\right)+\lg\left(ax_2+\frac{1}{x_2}\right)\right]\geqslant\lg\left(\frac{a(x_1+x_2)}{2}+\frac{2}{x_1+x_2}\right) \tag{1.1.32}$$

于是 $f(x)=\lg\left(ax+\dfrac{1}{x}\right)$是$(0,1]$内的一个凸函数,这里 $0<a\leqslant 4$.

(11) $f(x)=\lg\dfrac{x^p+1}{x^p-1}$,这里 p 是一个正整数,$x\in(1,\infty)$.当 $x_1,x_2\in(1,\infty)$时,有

$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]-f\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\lg\frac{x_1^p+1}{x_1^p-1}+\lg\frac{x_2^p+1}{x_2^p-1}\right)-\lg\frac{\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p+1}{\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p-1}$$
$$=\frac{1}{2}\lg\frac{(x_1^p+1)(x_2^p+1)}{(x_1^p-1)(x_2^p-1)}-\lg\frac{\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p+1}{\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p-1} \tag{1.1.33}$$

可以看到

$$\frac{(x_1^p+1)(x_2^p+1)}{(x_1^p-1)(x_2^p-1)}-\left[\frac{\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p+1}{\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p-1}\right]^2$$

$$=\frac{1}{(x_1^p-1)(x_2^p-1)\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p-1\right]^2}\left\{(x_1^p+1)(x_2^p+1)\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p-1\right]^2\right.$$

$$\left.-(x_1^p-1)(x_2^p-1)\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p+1\right]^2\right\} \tag{1.1.34}$$

$$(x_1^p+1)(x_2^p+1)\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p-1\right]^2-(x_1^p-1)(x_2^p-1)\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p+1\right]^2$$

$$=(x_1^px_2^p+x_1^p+x_2^p+1)\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{2p}-2\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p+1\right]$$

$$-(x_1^px_2^p-x_1^p-x_2^p+1)\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{2p}+2\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p+1\right]$$

$$=2(x_1^p+x_2^p)\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{2p}+1\right]-4(x_1^px_2^p+1)\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p$$

$$=2\left\{\left[(x_1^p+x_2^p)-2\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p\right]+\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p\right.$$

$$\left.\cdot\left[(x_1^p+x_2^p)\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p-2x_1^px_2^p\right]\right\} \tag{1.1.35}$$

由于

$$(x_1^p+x_2^p)\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p\geqslant 2\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{2p}\text{（利用不等式(1.1.5)）}$$

$$\geqslant 2(\sqrt{x_1x_2})^{2p}=2x_1^px_2^p \tag{1.1.36}$$

利用(1.1.35)和上式，知道(1.1.34)的右端是非负的，且(1.1.34)的右端等于零当且仅当 $x_1=x_2$．再利用(1.1.33)，可以知道 $f(x)=\lg\frac{x^p+1}{x^p-1}$ 是 $(1,\infty)$ 内一个凸函数．

(12) $f(x)=\frac{1}{x^p-x}$，这里正整数 $p\geqslant 2$，$x\in(1,\infty)$．

当 $x_1,x_2\in(1,\infty)$ 时，

$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]-f\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1^p-x_1}+\frac{1}{x_2^p-x_2}\right)-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p-\frac{1}{2}(x_1+x_2)}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x_1^p-1)(x_2^p-1)\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p-\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]}$$

$$\cdot\left\{[(x_2^p-x_2)+(x_1^p-x_1)]\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p-\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]-2(x_1^p-x_1)(x_2^p-x_2)\right\} \tag{1.1.37}$$

$$[(x_2^p-x_2)+(x_1^p-x_1)]\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p-\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]-2(x_1^p-x_1)(x_2^p-x_2)$$

$$=(x_2^p-x_2)\left\{\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p-x_1^p\right]+\frac{1}{2}(x_1-x_2)\right\}$$

$$+(x_1^p-x_1)\left\{\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^p-x_2^p\right]+\frac{1}{2}(x_2-x_1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(x_2-x_1)[(x_1^p-x_1)-(x_2^p-x_2)]+(x_2^p-x_2)\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)-x_1\right]$$

$$\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{p-1}+\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{p-2}x_1\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{p-3}x_1^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)x_1^{p-2}+x_1^{p-1}\right\}$$

$$+(x_1^p-x_1)\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)-x_2\right]\left\{\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{p-1}+\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{p-2}x_2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{p-3}x_2^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)x_2^{p-2}+x_2^{p-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1^p-x_2^p)+\frac{1}{2}(x_2-x_1)^2+\frac{1}{2}(x_2-x_1)\left\{\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{p-1}\right.$$

$$\cdot[(x_2^p-x_2)-(x_1^p-x_1)]+\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{p-2}[x_1(x_2^p-x_2)-x_2(x_1^p-x_1)]$$

$$+\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{p-3}[x_1^2(x_2^p-x_2)-x_2^2(x_1^p-x_1)]+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)[x_1^{p-2}(x_2^p-x_2)-x_2^{p-2}(x_1^p-x_1)]$$

$$\left.+[x_1^{p-1}(x_2^p-x_2)-x_2^{p-1}(x_1^p-x_1)]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2^p-x_1^p)\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{p-1}-1\right]+\frac{1}{2}(x_2-x_1)^2\left[1-\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{p-1}\right]$$

$$+\frac{1}{2}(x_2-x_1)\left\{\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{p-2}x_1x_2(x_2^{p-1}-x_1^{p-1})\right.$$

$$+\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{p-3}[x_1^2x_2^2(x_2^{p-2}-x_1^{p-2})+x_1x_2(x_2-x_1)]+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)[x_1^{p-2}x_2^{p-2}(x_2^2-x_1^2)+x_1x_2(x_2^{p-3}-x_1^{p-3})]$$

$$\left.+[x_1^{p-1}x_2^{p-1}(x_2-x_1)+x_1x_2(x_2^{p-2}-x_1^{p-2})]\right\} \tag{1.1.38}$$

由于

$$\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2^p-x_1^p)\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{p-1}-1\right]+\frac{1}{2}(x_2-x_1)^2\left[1-\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{p-1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(x_2-x_1)\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{p-1}-1\right][(x_2^p-x_1^p)-(x_2-x_1)]$$

$$=\frac{1}{2}(x_2-x_1)^2\left[\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^{p-1}-1\right]$$

$$\cdot[(x_2^{p-1}+x_2^{p-2}x_1+x_2^{p-3}x_1^2+\cdots+x_2x_1^{p-2}+x_1^{p-1})-1] \tag{1.1.39}$$

利用$\frac{1}{2}(x_1+x_2)>1$，$x_1>1$ 和 $x_2>1$，知道上式右端是非负的，从而(1.1.38)的右端前两项之和是非负的.(1.1.38)的右端其他各项显然都是非负的，而且(1.1.38) 右端等于零当且仅当 $x_1=x_2$. 因此，$f(x)=\frac{1}{x^p-x}$是$(1,\infty)$内一个凸函数，这里正整数 $p\geqslant 2$.

(13) $f(x)=\frac{1}{(1+10^x)^p}$，这里 p 是一个正整数. $x\in(0,\infty)$.

下面对 p 用归纳法，证明上述 $f(x)$ 是一个凸函数. 当 $p=1$，且 $x_1,x_2\in(0,\infty)$ 时，有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+10^{x_1}}+\frac{1}{1+10^{x_2}}\right)-\frac{1}{1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}}=\frac{1}{2(1+10^{x_1})(1+10^{x_2})(1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)})}$$
$$\cdot\{[(1+10^{x_2})+(1+10^{x_1})](1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)})-2(1+10^{x_1})(1+10^{x_2})\}\tag{1.1.40}$$

$$\begin{aligned}&[(1+10^{x_2})+(1+10^{x_1})](1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)})-2(1+10^{x_1})(1+10^{x_2})\\&\quad=(1+10^{x_1})[(1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)})-(1+10^{x_2})]\\&\qquad+(1+10^{x_2})[(1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)})-(1+10^{x_1})]\\&\quad=(1+10^{x_1})10^{\frac{1}{2}x_2}(10^{\frac{1}{2}x_1}-10^{\frac{1}{2}x_2})+(1+10^{x_2})10^{\frac{1}{2}x_1}(10^{\frac{1}{2}x_2}-10^{\frac{1}{2}x_1})\\&\quad=(10^{\frac{1}{2}x_2}-10^{\frac{1}{2}x_1})^2(10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}-1)\geqslant 0\end{aligned}\tag{1.1.41}$$

这里利用 $\frac{1}{2}(x_1+x_2)>0$，有 $10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}>1$. (1.1.41)的右端等于零当且仅当 $x_1=x_2$.

于是，不等式

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+10^{x_1})^p}+\frac{1}{(1+10^{x_2})^p}\right]\geqslant\frac{1}{(1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)})^p}\tag{1.1.42}$$

当 $p=1$ 时成立，这里 x_1,x_2 是任意正实数. 设(1.1.42)对某个正整数 p 成立，且等号成立当且仅当 $x_1=x_2$. 考虑 $p+1$ 情况，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+10^{x_1})^{p+1}}+\frac{1}{(1+10^{x_2})^{p+1}}\right]-\frac{1}{(1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)})^{p+1}}\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+10^{x_1}}+\frac{1}{1+10^{x_2}}\right)\left[\frac{1}{(1+10^{x_1})^p}+\frac{1}{(1+10^{x_2})^p}\right]\\&\quad+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+10^{x_1}}-\frac{1}{1+10^{x_2}}\right)\left[\frac{1}{(1+10^{x_1})^p}-\frac{1}{(1+10^{x_2})^p}\right]-\frac{1}{(1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)})^{p+1}}\\&\geqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+10^{x_1}}+\frac{1}{1+10^{x_2}}\right)\left[\frac{1}{(1+10^{x_1})^p}+\frac{1}{(1+10^{x_2})^p}\right]-\frac{1}{(1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)})^{p+1}}\\&\geqslant\frac{1}{1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}}\frac{1}{(1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)})^p}\text{(利用已证明的(1.1.42)在 }p=1\text{ 时成立，以及归纳假设)}\\&\quad-\frac{1}{(1+10^{\frac{1}{2}(x_1+x_2)})^{p+1}}=0\end{aligned}\tag{1.1.43}$$

因此，不等式(1.1.42)对 $p+1$ 成立(用 $p+1$ 代替 p)，且等号成立时，不等式(1.1.43)中一切不等式皆取等号，必有 $x_1=x_2$.

因此，$f(x)=\frac{1}{(1+10^x)^p}$ 是 $(0,\infty)$ 内一个凸函数，这里 p 是一个正整数.

在介绍下一个例题之前，先对一个组合概念进行推广. 设 m 是一个正整数. 知道组合数

$$C_x^m=\frac{1}{m!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)\tag{1.1.44}$$

这里 x 是区间 $[m,\infty)$ 内正整数. 现定义推广组合数 C_x^m，由公式(1.1.44)给出，这里 x 是 $[m,\infty)$ 内任意一个正实数.

(14) $f(x)=C_x^m$，这里 C_x^m 是由公式(1.1.44)定义的推广组合数，$x\in[m,\infty)$. 由公式(1.1.44)首先可以看出 $f(x)$ 是区间 $[m,\infty)$ 内一个单调递增函数.

下面证明推广组合数的一个有趣性质.

如果 $x>y\geqslant m$，d 是一个正实数，有

$$f(x+d)-f(x)>f(y+d)-f(y) \tag{1.1.45}$$

由上述 $f(x)$的定义,以及(1.1.44),有

$$\begin{aligned}
f(x+d)-f(x) &= \frac{1}{m!}[(x+d)(x+d-1)(x+d-2)\cdots(x+d-m+1) \\
&\qquad -x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)] \\
&= \frac{1}{m!}\{[(x+d)(x+d-1)(x+d-2)\cdots(x+d-m+1) \\
&\qquad -x(x+d-1)(x+d-2)\cdots(x+d-m+1)] \\
&\qquad +[x(x+d-1)(x+d-2)\cdots(x+d-m+1) \\
&\qquad -x(x-1)(x+d-2)\cdots(x+d-m+1)] \\
&\qquad +[x(x-1)(x+d-2)(x+d-3)\cdots(x+d-m+1) \\
&\qquad -x(x-1)(x-2)(x+d-3)\cdots(x+d-m+1)]+\cdots \\
&\qquad +[x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+2)(x+d-m+1) \\
&\qquad -x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+2)(x-m+1)]\} \\
&= \frac{d}{m!}[(x+d-1)(x+d-2)\cdots(x+d-m+1) \\
&\qquad +x(x+d-2)\cdots(x+d-m+1) \\
&\qquad +x(x-1)(x+d-3)\cdots(x+d-m+1)+\cdots \\
&\qquad +x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+2)] \\
&> \frac{d}{m!}[(y+d-1)(y+d-2)\cdots(y+d-m+1) \\
&\qquad +y(y+d-2)\cdots(y+d-m+1) \\
&\qquad +y(y-1)(y+d-3)\cdots(y+d-m+1)+\cdots \\
&\qquad +y(y-1)(y-2)\cdots(y-m+2)] \\
&= f(y+d)-f(y)\text{(类似前面的推导,将 } x \text{ 全换成 } y\text{)}
\end{aligned} \tag{1.1.46}$$

当 $x_1 \neq x_2$ 时,这里 x_1, x_2 皆取自区间$[m,\infty)$,不妨设 $x_1>x_2$,于是,有 $x_1>\frac{1}{2}(x_1+x_2)>x_2$,在已证明的不等式(1.1.45)中,令

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\quad d=\frac{1}{2}(x_1-x_2),\quad y=x_2,\quad x+d=x_1,\quad y+d=x \tag{1.1.47}$$

于是,当 $x_1>x_2$ 时,有

$$C_{x_1}^m - C_{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}^m > C_{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}^m - C_{x_2}^m \tag{1.1.48}$$

从上式,当 $x_1>x_2$ 时,有

$$C_{x_1}^m + C_{x_2}^m > 2C_{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}^m \tag{1.1.49}$$

当 $x_2>x_1$ 时,将上式中 x_1, x_2 互换,(1.1.49)仍然成立.当 $x_1=x_2$ 时,(1.1.49)左、右两端应相等.

因此,$f(x)=C_x^m$(推广的组合数)是$[m,\infty)$内一个凸函数,这里 m 是一个正整数.

到目前为止,已举了 14 个凸函数的例子.不等式(1.1.23)能否推广到具有 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的情况呢?这是我们关心的一个问题.下面的定理回答了这个问题.

定理 1(Jensen 不等式) $f(x)$是开区间(a,b)(这里 a 可以是 $-\infty$,b 也可以是∞)内一个凸函数,那么,对于(a,b)内任意 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,有

$$\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)] \geqslant f\left(\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right)$$

等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

注：(a,b)也可以被$[a,b]$，$(a,b]$或$[a,b)$代替.

证明：对 n 用数学归纳法.当 $n=1$ 时，Jensen 不等式左、右两端都是 $f(x_1)$，Jensen 不等式当然成立.

假设当 $n=k$ 时，定理 1(Jensen 不等式)成立.考虑 $n=k+1$ 情况.记

$$A=\frac{1}{k+1}(x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}) \tag{1.1.50}$$

显然，有

$$\begin{aligned}A&=\frac{2kA}{2k}=\frac{1}{2k}[(k+1)A+(k-1)A]\\&=\frac{1}{2k}(x_1+x_2+\cdots+x_k)+\frac{1}{2k}[x_{k+1}+(k-1)A]\end{aligned} \tag{1.1.51}$$

又记

$$B=\frac{1}{k}(x_1+x_2+\cdots+x_k),\quad C=\frac{1}{k}[x_{k+1}+(k-1)A] \tag{1.1.52}$$

A，B 和 C 仍是(a,b)内实数，利用凸函数性质，有

$$f(A)=f\left(\frac{1}{2}(B+C)\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(B)+f(C)] \tag{1.1.53}$$

利用归纳法假设，有

$$\left.\begin{aligned}&f(B)\leqslant\frac{1}{k}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)]\\&f(C)\leqslant\frac{1}{k}[f(x_{k+1})+f(A)+\cdots+f(A)](k-1\text{ 个 }f(A))\\&\quad=\frac{1}{k}[f(x_{k+1})+(k-1)f(A)]\end{aligned}\right\} \tag{1.1.54}$$

将上两个不等式代入(1.1.53)，可以得到

$$f(A)\leqslant\frac{1}{2k}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)+f(x_{k+1})+(k-1)f(A)] \tag{1.1.55}$$

上式两端乘以 $2k$，再移项，可以得到

$$f(A)\leqslant\frac{1}{k+1}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{k+1})] \tag{1.1.56}$$

Jensen 不等式当 $n=k+1$ 时成立，所以 Jensen 不等式是正确的.当(1.1.56)取等号时，上面一切不等式都应取等号.特别不等式(1.1.54)(两个不等式)都应取等号，依照归纳法假设，有 $x_1=x_2=\cdots=x_k$，$x_{k+1}=A$.再利用公式(1.1.50)A 的定义，可以得到 $x_{k+1}=x_1=x_2=\cdots=x_k$.那么，当 $n=k+1$ 时，定理 1 成立，所以定理 1(Jensen 不等式)得证.

把上述开区间(a,b)全部换成$[a,b]$，或$(a,b]$，或$[a,b)$，显然一切推导仍然成立.

利用定理 1(Jensen 不等式)，我们立即可以将前面 14 个不等式加以推广.

例 1 当 $0\leqslant x_1,x_2,\cdots,x_n\leqslant\pi$ 时，

$$\frac{1}{n}(\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n)\leqslant\sin\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n) \tag{1.1.57}$$

例 2 当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 全是正实数时，

$$-\frac{1}{n}(\lg x_1+\lg x_2+\cdots+\lg x_n)\geqslant-\lg\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n) \tag{1.1.58}$$

从上式，有

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n) \tag{1.1.59}$$

习惯上,记

$$A_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n),\quad G_n=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \tag{1.1.60}$$

A_n 称为 n 个正实数的算术平均值,G_n 称为 n 个正实数的几何平均值,$A_n\geqslant G_n$. 又记

$$H_n=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \tag{1.1.61}$$

H_n 称为 n 个正实数的调和平均值. 在不等式(1.1.59)中,用 $\frac{1}{x_1}$ 代替 x_1, $\frac{1}{x_2}$ 代替 x_2, $\cdots$, $\frac{1}{x_n}$ 代替 x_n,有

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) \tag{1.1.62}$$

上式两端取倒数,再利用(1.1.61)和(1.1.60),有

$$H_n\leqslant G_n\leqslant A_n \tag{1.1.63}$$

利用 $H_n\leqslant A_n$,兼顾公式(1.1.60)和(1.1.61),有

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2 \tag{1.1.64}$$

这是一个非常有用的不等式.

$A_n\geqslant G_n$ 是一个很重要的不等式,历史上有许许多多不同的证明. 我在国外数学杂志上看到一个直接证明,对 n 用数学归纳法,很简洁,现将它介绍给读者.

当 $n=2$ 时,对于 2 个正实数 x_1, x_2,显然,有 $\frac{1}{2}(x_1+x_2)\geqslant\sqrt{x_1x_2}$,即 $A_2\geqslant G_2$,等号成立当且仅当 $x_1=x_2$. 假设 $n=k-1$(正整数 $k\geqslant3$)时,有 $A_{k-1}\geqslant G_{k-1}$. 当 $n=k$ 时,由于 A_k, G_k 关于 x_1, x_2, $\cdots$, x_k 的地位是对称的,任意对调 x_i 与 x_j($i\neq j$),即把 x_i 写成 x_j, x_j 写成 x_i, A_k, G_k 值并未变化. 因此,不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_k$. 显然 $x_1\leqslant A_k\leqslant x_k$,这里 $A_k=\frac{1}{k}(x_1+x_2+\cdots+x_k)$,

$$A_k(x_1+x_k-A_k)-x_1x_k=(x_1-A_k)(A_k-x_k)\geqslant0 \tag{1.1.65}$$

对 $k-1$ 个正实数 x_2, x_3, $\cdots$, x_{k-1}, $x_1+x_k-A_k$,利用归纳法假设,有

$$\frac{1}{k-1}[x_2+x_3+\cdots+x_{k-1}+(x_1+x_k-A_k)]\geqslant\sqrt[k-1]{x_2x_3\cdots x_{k-1}(x_1+x_k-A_k)} \tag{1.1.66}$$

而上式左端显然是 A_k.

上式两端 $k-1$ 次方,可以得到

$$A_k^{k-1}\geqslant x_2x_3\cdots x_{k-1}(x_1+x_k-A_k) \tag{1.1.67}$$

上式两端乘以 A_k,并且利用不等式(1.1.65),有

$$A_k^k\geqslant x_2x_3\cdots x_{k-1}A_k(x_1+x_k-A_k)\geqslant x_2x_3\cdots x_{k-1}(x_1x_k)=G_k^k \tag{1.1.68}$$

于是,有 $A_k\geqslant G_k$,归纳法完成.

利用(3),以及定理 1(Jensen 不等式),有

例 3 当 p 是正整数,x_1, x_2, $\cdots$, x_n 全是正实数时,有

$$\frac{1}{n}(x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p)\geqslant\left[\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right]^p \tag{1.1.69}$$

特别当 $p=2$ 时,有

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\leqslant n(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^n) \tag{1.1.70}$$

从前述(4)～(14)的内容和定理 1(Jensen 不等式),有