工业和信息化普通高等教育“十三五”规划教材立项项目
21世纪高等学校规划教材

高等数学

（上）

颜超 单娟 ◎ 主编
张超 周海青 杜秀清 ◎ 副主编

突出知识重点　凝练核心内容
甄选例题习题　激发学习兴趣
紧贴实际应用　注重创新教育

中国工信出版集团　人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化普通高等教育“十三五”规划教材立项项目
21世纪高等学校规划教材

高等数学
（上）

颜超 单娟 ◎ 主编
张超 周海青 杜秀清 ◎ 副主编

人 民 邮 电 出 版 社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上 / 颜超，单娟主编. -- 北京 : 人民邮电出版社，2017.8
21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-115-45874-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①颜… ②单… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第227036号

内容提要

本书是编者在面向21世纪数学系列课程教学内容与课程体系改革方针的指导下，根据多年的教学实践经验和研究成果，结合"高等数学课程教学基本要求"编写而成的.

本套教材分为上、下两册. 本书为上册，含函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用等内容.

本书作为高等学校非数学专业"高等数学"课程的教材，也可供各类需要提高数学素质和能力的人员使用.

◆ 主　编　颜　超　单　娟
副 主 编　张　超　周海青　杜秀清
责任编辑　李　召
责任印制　陈　犇

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路11号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
三河市海波印务有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：13　2017年8月第1版
字数：306千字　2017年8月河北第1次印刷

定价：39.80元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京东工商广登字20170147号

前 言 Preface

本套教材分为上、下两册. 本书为上册，包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用等内容.

本书是为普通高等学校非数学专业学生编写的，也可供各类需要提高数学素质和能力的人员使用. 针对应用型本科专业学生的特点，本书在编写中尽量做到直观地阐述微积分中的基本概念、基本运算，尽量结合实际问题给出相应的例题，同时为学生运用微积分的基本知识进行数学建模给出范例，考虑到微积分基本知识点对理工科和经济管理学科来说是相同的，只是在应用举例上侧重点不同. 因此，在编写本书时不分理工或经济管理，而是统一起来编写，在举例中既有理工类的例子，也有经济管理类的例子. 这样，可以让学理工的学生了解一些微积分在经济学中的应用，让学经济管理的学生了解一些微积分在自然学科中的应用，对他们来说应该是大有裨益的.

为适应分层次教学的需要，选修内容用 * 号标出. 本书概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程严谨，例题均经过精选，具有代表性和启发性，课后习题分为两组，其中 A 组为基础题，B 组题目供学有余力的学生加深理解、开拓思维.

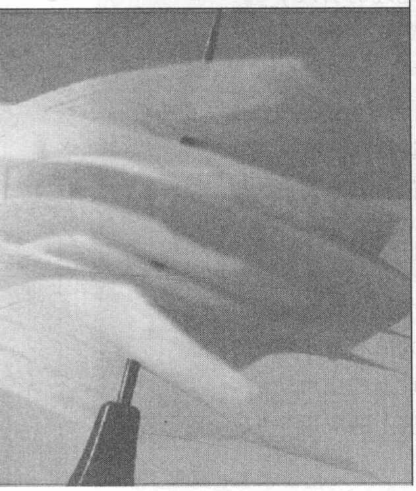
本书由颜超副教授、单娟讲师主编，其中第 1 章由颜超副教授编写，第 2 章由杜秀清副教授编写，第 3 章由张超老师编写，第 4 章由周海青副教授编写，第 5、第 6 章由单娟讲师编写，最后由滕加俊教授统稿；本书的编写得到了南京工业大学浦江学院自编教材项目的支持，在编写过程中也得到了其他教师同仁的大力帮助，在此一并表示感谢!

限于编者的水平，书中难免存在不足之处，我们衷心地希望各位读者能够提出宝贵意见，以期在再版时能进一步完善本书.

编　者

2017 年 8 月

目 录 Contents



第2章 导数与微分

第3章 微分中值定理与导数的应用

第4章 不定积分

函数、极限与连续　第1章

函数是我们研究对象所涉及变量之间关系的数学表达，是高等数学研究的主要对象. 和初等数学不同，高等数学研究的是函数随自变量的变化而变化的行为和性质，即我们称之为分析的方法. 在这一方法中，函数的极限是非常重要的概念和工具. 在高等数学中，几乎所有的概念都建立在"极限"的基础上. 连续是函数的一个重要局部性态，它描述了函数在一点周围变化的不间断性. 本章主要介绍了函数的定义、基本性态、初等函数以及极限的概念、性质和运算，并在此基础上讨论函数连续性的概念和连续函数的性质.

1.1 集合与函数

本节介绍函数的一般概念、表示方法、性质.

1.1.1 集合、区间和邻域

1. 集合

集合是现代数学中最基本的概念，它已经渗透到现代数学的各个分支. 集合不能用更简单的概念来定义，但我们可以通过例子对这个概念加以说明. 例如，自然数的全体、一个学校的全体学生等，都是集合. 一般地，具有某种确定性质的对象的全体称为**集合**或简称**集**，其中的对象称为集合的**元素**，通常用大写拉丁字母 A，B，M 等表示集合，而用小写拉丁字母 a，b，m 等表示集合的元素. 若 a 是 A 的元素，则记作 $a \in A$（读作 a 属于 A）；若 a 不是 A 的元素，则记作 $a \notin A$（读作 a 不属于 A）.

集合的表示方法一般有两种，一种是**列举法**，就是按任意顺序不重复地列出集合的所有元素，并用花括号"{　}"括起来.

例如，方程 $x^2-4=0$ 的根所组成的集合 S，可表示为 $S=\{-2, 2\}$.

还有一种是**描述法**，它的一般形式是

$$A=\{x \mid x \text{ 具有性质 } P\},$$

其中 P 是关于 x 的某个性质，意思是：$x \notin A$ 的充要条件是 x 不满足性质 P.

例如，全体偶数的集合 B，可表示为

$$B=\{x \mid x=2n, n \text{ 为整数}\}.$$

由某些数组成的集合称为**数集**. 例如，全体自然数组成**自然数集**，常用符号 $\mathbf{N}$ 表示；

全体正整数组成**正整数集**，常用符号 $\mathbf{N}_+$ 表示；全体整数组成**整数集**，常用符号 $\mathbf{Z}$ 表示；全体有理数组成**有理数集**，常用符号 $\mathbf{Q}$ 表示；全体实数组成**实数集**，常用符号 $\mathbf{R}$ 表示；等等.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x\in A$，则有 $x\in B$，就说集合 A 是集合 B 的子集，记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)，或 $B\supset A$(读作 B 包含 A).

如果 $A\subset B$，且 $B\subset A$，就说集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A=B$. 不包含任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$. 例如，集合$\{x\,|\,x\in\mathbf{R},\ x^2=-1\}$是空集.

数集是一个常用的集合，即集合中的元素都是数. 如果没有特别说明，本书用到的数均指实数.

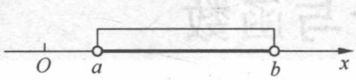
2. **区间**

区间是表示实数集合的一种常用形式. 区间根据长度可以分为两大类：有限区间和无限区间(无穷区间).

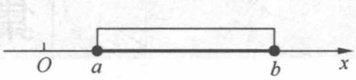
设 a，b 为两个实数，且 $a<b$. 我们定义区间如下.

$(a,\ b)=\{x\,|\,a<x<b\}$为**开区间**，如图 1-1(a)所示.

$[a,\ b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$为**闭区间**，如图 1-1(b)所示.



(a) 开区间



(b) 闭区间

图 1-1

类似地，定义半开半闭区间：

$$(a,\ b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}\text{ 和 }[a,\ b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\},$$

称 a，b 为区间的端点，$b-a$ 为区间的长度. 由此可知，以上区间的长度都为有限数，称它们为**有限区间**. 我们还定义了**无穷区间**：

$$(-\infty,\ b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}$$
$$(-\infty,\ b)=\{x\,|\,x<b\}$$
$$[a,\ +\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$$
$$(a,\ +\infty)=\{x\,|\,x>a\}$$
$$\mathbf{R}=(-\infty,\ +\infty)$$

如图 1-2 所示.

3. **邻域**

下面给出邻域的定义.

定义 1 设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，称开区间$(a-\delta,\ a+\delta)$为点 a 的 δ 邻域，记作

$$U(a,\ \delta)=(a-\delta,\ a+\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\},$$

即到点 a 的距离小于 δ 的点的集合，简称点 a 的**邻域**. 其中 a 为该邻域的中心，δ 为该邻域的半径，如图 1-3 所示.

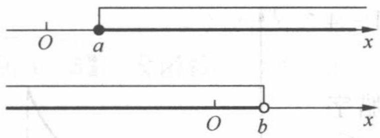


图 1-2

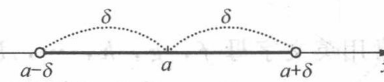


图 1-3

在 $U(a, \delta)$ 中去掉中心点 a，得到集合

$$\mathring{U}(a, \delta)=(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

称为点 a 的**去心邻域**.

1.1.2 函数的概念

1. 函数

【例 1-1】 自由落体运动中，质点下落的距离 s 与下落时间 t 之间的关系由下式确定：

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 $g \approx 9.8\mathrm{m/s^2}$ 为重力作用下自由落体的加速度. 由这个关系式可知，对于任意大于零的 t 值，有唯一的 s 值与之对应.

【例 1-2】 在几何中，圆的面积 S 由半径 r 唯一确定，它们之间的关系由下式给出：

$$S=\pi r^2.$$

对于每个非负的 r 值，由此关系式都可以得到唯一的面积 S 与之对应.

以上两例虽然背景不同，但它们都表达了两个变量之间相互依赖的关系. 这个关系由一个对应法则给出，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，根据这个对应法则，另一个变量有唯一确定的值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系就是函数的概念.

定义 2 设非空数集 $D \subset R$，f 是一个由 D 到 R 的对应法则. 若对于任一 $x \in D$，在 f 的作用下都有唯一一个确定实数 y 与之相对应，则称 f 为 D 上的一个函数，称 y 为 f 在点 x 处的函数值，记作 $y=f(x)$.

函数 f 可以表示为

$$f: D \to R, x \to y,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. 自变量 x 取值的全体即数集 D 称为函数 f 的**定义域**，记作 $D(f)$ 或 D_f. 函数值的全体称为 f 的**值域**，记作 $R(f)$ 或 R_f，也可记作 $f(D)$，即

$$R(f)=f(D)=\{f(x) \mid x \in D\}.$$

由上述定义可以看出，严格意义上，f 和 $f(x)$ 的含义是不同的. f 表示由自变量 x 确定因变量 y 的对应法则即函数关系，而 $f(x)$ 则表示与自变量 x 对应的函数值. 但是为了叙述方便，常将函数简单地表示为 $y=f(x)(x \in D)$.

对于函数 $y=f(x)(x \in D)$，任一 $x \in D$ 都有唯一 $y=f(x)$ 与之相对应，从而可产生有序数组 (x, y) 对应于平面内的一点 $P(x, y)$. 称点集 $\{(x, y) \mid y=f(x), x \in D\}$

形成的轨迹为函数 $y=f(x)(x\in D)$ 的**图像**，如图 1－4 所示.

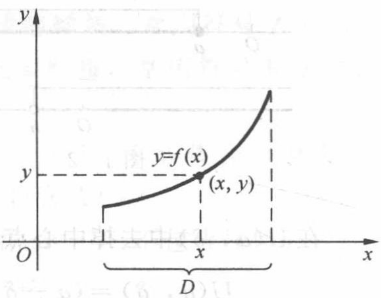


图 1－4

通常用英文字母 f，g，h，…，F，G，…和希腊字母 φ，ψ，…，Φ，Ψ，…作为函数的记号.

确定函数的两个要素是定义域和对应法则. 换言之，一个函数由定义域和对应法则完全确定，而与变量的记号无关.

例如，$s=\pi r^2(r>0)$ 与 $y=\pi x^2(x>0)$ 表达的是同一个函数关系；而 $y=\pi x^2(x>0)$ 与 $y=\pi x^2(x\in\mathbf{R})$ 则是两个不同的函数，因为两者的定义域不同.

2. **分段函数**

在实际应用中，常遇到这样一类函数：在自变量的变化过程中，在不同区域上，对应法则不同，因而函数表达式也不同，将这种函数称为**分段函数**.

【例 1－3】 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 的图像如图 1－5 所示.

【例 1－4】 函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 1,\\ x-1, & x<1\end{cases}$ 的图像如图 1－6 所示.

图 1－5

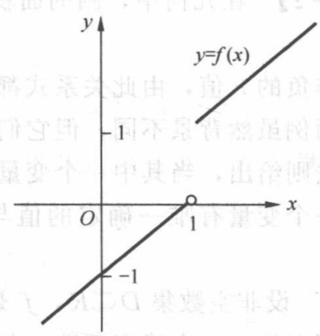


图 1－6

狄里克雷(Dirichlet)函数

$$y=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

其定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，值域是 $\{0,1\}$. 因为数轴上有理点与无理点都是稠密的，所以它的图形不能在数轴上准确地描绘出来.

对于分段函数，应注意到：虽然在自变量的不同变化范围内，计算函数值的表达式不同，但这些表达式定义的是一个函数，这个函数的定义域是各个不同表达式所对应的 x 值的并集. 在计算某个函数值时，要先判断自变量的值在哪个表达式所对应的范围内，再按该表达式求值.

【例 1-5】 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & 0<x<2,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & -2<x<0,\end{cases}$

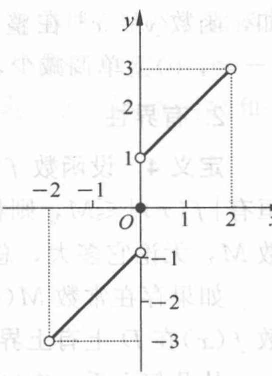


图 1-7

写出它的定义域并求 $f(1)$和 $f(-1)$.

解 它的定义域 $D(f)=(-2,\ 0)\cup\{0\}\cup(0,\ 2)=(-2,\ 2)$.

由于 $x=1\in(0,\ 2)$，所以 $f(1)=1+1=2$；由于 $x=-1\in(-2,\ 0)$，所以 $f(-1)=-1-1=-2$. 此函数的图形如图 1-7 所示.

3. 函数的运算

函数作为一种数学元素，也可以作加减乘除四则运算.

设有函数 $f(x)$和 $g(x)$，它们的定义域分别是 D_1、D_2，且 $D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$，我们可以定义这两个函数的下列运算.

和与差 $f\pm g$：$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$，$x\in D$.

积 $f\cdot g$：$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$，$x\in D$.

商 $\dfrac{f}{g}$：$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$x\in\{x\,|\,x\in D$ 且 $g(x)\neq 0\}$.

1.1.3 函数的性质

研究函数时，常会用到以下几个特性.

1. 单调性

定义 3 设函数 $f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(见图 1-8)，则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调增加的**；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$(见图 1-9)，则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调减少的**. 单调增加和单调减少的函数统称**单调函数**，使函数单调的区间称为函数的单调区间.

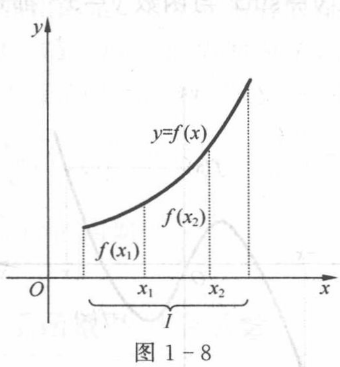


图 1-8

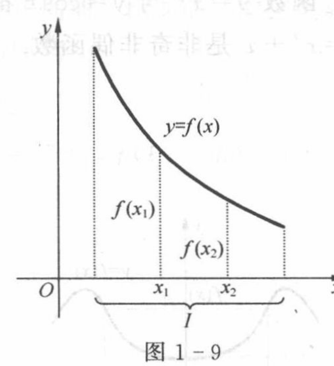


图 1-9

函数的单调性不仅和函数表达式有关，也和定义区间有关. 一般地，如果函数在整个定义域内不单调，我们可以将定义域分成多个子区间，使函数在各个子区间内单调. 例

如，函数 $y=x^2$ 在整个定义域$(-\infty, +\infty)$内不是单调的，但是在定义域的子区间$(-\infty, 0)$上单调减少，而在$(0, +\infty)$上是单调增加的.

2. 有界性

定义 4 设函数 $f(x)$在集合 D 上有定义. 如果存在常数 $M>0$，使得对任意的 $x\in D$ 恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在 D 上**有界**；如果这样的 M 不存在，即对于任意的正数 M，无论它多大，总存在 $x\in D$，使得$|f(x)|>M$，则称函数 $f(x)$在 D 上**无界**.

如果存在常数 M(或 m)，使得对任意的 $x\in D$，恒有 $f(x)<M$(或 $f(x)>m$)，则函数 $f(x)$在 D 上**有上界**(或**有下界**).

从几何上看，在区间$[a, b]$上的有界函数的图形位于两条 x 轴的平行线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间(见图 1-10).

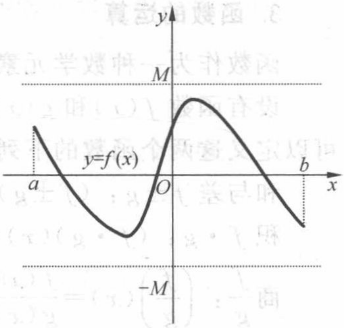


图 1-10

显然，在某区间上有界的函数在此区间上也必有上界和下界；反之，若函数在某区间上既有上界也有下界，则它在此区间上一定是有界的. 而无界函数可能是只有上界而没有下界，或者只有下界而没有上界，或者既没有上界也没有下界.

例如，函数 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$在$(-\infty, +\infty)$上有界，对于$\forall x\in\mathbf{R}$，都有$\left|\dfrac{1}{1+x^2}\right|\leqslant 1$. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$在其定义域$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$上无界，但是如果我们的研究范围是区间$[1, 2]$，显然对任意的 $x\in[1, 2]$，恒有$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，这就是说，$y=\dfrac{1}{x}$在$[1, 2]$上是有界的. 由此可见，一个函数是否有界，与所讨论的区间有关.

3. 奇偶性

定义 5 设函数 $f(x)$的定义域为 D，其中 D 关于原点对称，即当 $x\in D$ 时，有$-x\in D$.

如果对于任一 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$成立，则称 $f(x)$为**偶函数**.

如果对于任一 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$成立，则称 $f(x)$为**奇函数**.

例如，函数 $y=x^2$ 与 $y=\cos x$ 都是偶函数，函数 $y=\sin x$ 与函数 $y=x^3$ 都是奇函数，而函数 $y=x^2+x$ 是非奇非偶函数.

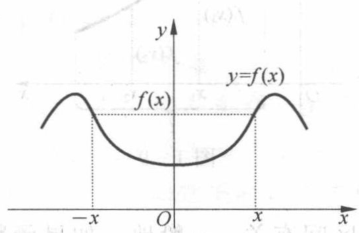


图 1-11

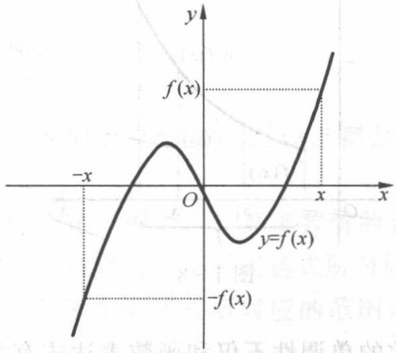


图 1-12

从定义中可以看出，只有定义域关于原点对称的函数才能讨论奇偶性. 显然，偶函数的图形关于 y 轴对称(见图1-11)，而奇函数的图形关于原点对称(见图1-12).

【例1-6】 证明：任何定义域关于原点对称的函数 $f(x)$ 都可表示为一个奇函数和一个偶函数的和.

证 令

$$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],$$

$$h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],$$

则

$$g(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=g(x),$$

$$h(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-h(x),$$

故 $g(x)$ 为偶函数，$h(x)$ 为奇函数. 注意到

$$f(x)=g(x)+h(x),$$

从而命题得证.

4. 周期性

定义6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 T，使得对于任一 $x\in D$ 均有 $(x\pm T)\in D$，且恒有等式

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，正数 T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数，而 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数. 周期函数在每个长度为一个周期的区间上都有相同的形状，自然地，也有相同的单调性等特性.

如果正数 T 是周期函数的周期，那么 T 的正整数倍也是这个函数的周期，即周期函数的周期不唯一. 通常我们所说的周期是指函数的**最小正周期**，即满足上述等式的最小正数. 另外需要指出的是，并不是所有的周期函数都具有最小正周期，比如前述的狄里克雷函数.

【例1-7】 $f(x)$ 的周期为 T，试求 $f(kx+b)$ 的周期.

解 令 $F(x)=f(kx+b)$，则对于任意的 x 都有

$$F\left(x+\frac{T}{k}\right)=f\left(k\left(x+\frac{T}{k}\right)+b\right)=f((kx+b)+T)=f(kx+b)=F(x),$$

故 $f(kx+b)$ 的周期为 $\frac{T}{k}$.

1.1.4 反函数与复合函数

1. 反函数

定义7 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，值域为 $R(f)$. 如果对任一 $y\in R(f)$，

都有唯一确定的满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D(f)$ 与之对应，这时 x 是定义在 $R(f)$ 上以 y 为自变量的函数，称这个函数为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)(y\in R(f))$. 将 $y=f(x)$ 称为 $x=f^{-1}(y)$ 的**原函数**. 例如，函数 $y=x^3+1$ 的反函数 $x=\sqrt[3]{y-1}$，通常记作 $y=\sqrt[3]{x-1}$.

由定义可知，反函数的对应法则完全由原函数的对应法则 f 所确定. 另外，为了保证任一自变量 y 都有唯一确定的 x 与之对应，要求对应法则 f 是一一对应的. 在这种情形下，$x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 互为反函数，而且 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域与值域正好是原函数的值域与定义域.

在反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 为自变量，x 为因变量. 但习惯上，在保持定义域 $R(f)$ 与对应法则 f^{-1} 不变的情形下，仍以 x 记自变量，以 y 记因变量，将此反函数记为 $y=f^{-1}(x)(x\in R(f))$. 所以函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(见图 1-13).

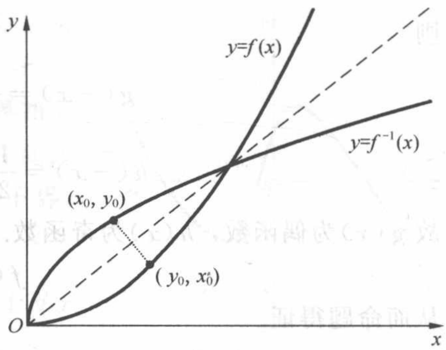


图 1-13

如果 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调，则其对应法则 f 是一一对应的，所以存在反函数，而且其反函数单调性与之一致. 例如，指数函数 $y=e^x$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加的，其值域为 $(0, 1)$；而它的反函数是对数函数 $y=\ln x$，在其定义域 $(0, +\infty)$ 内也是单调增加的.

【例 1-8】 求函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0,\\ x^3, & x<0\end{cases}$ 的反函数.

解 当 $x\geqslant 0$ 时，由 $y=x+1$，可知 $x=y-1$ 且 $y\geqslant 1$；当 $x<0$ 时，由 $y=x^3$，可知 $x=\sqrt[3]{y}$ 且 $y<0$. 因此

$$x=\begin{cases}y-1, & y\geqslant 1\\ \sqrt[3]{y}, & y<0,\end{cases}$$

变量替换得到函数的反函数

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 1,\\ \sqrt[3]{x}, & x<0.\end{cases}$$

2. 复合函数

定义 8 已知函数 $y=f(u)(u\in D(f),\ y\in R(f))$ 与 $u=g(x)(x\in D(g),\ u\in R(g))$. 如果 $D(f)\cap R(g)\neq\varnothing$，则称函数

$$y=(f o g)(x)=f[g(x)],\ x\in\{x\,|\,g(x)\in D(f)\}$$

是由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的**复合函数**. 其中 x 为**自变量**，y 为**因变量**，u 称为**中间变量**，此复合函数的定义域为 $\{x\,|\,g(x)\in D(f)\}$.

【例 1-9】 对于函数 $f(u)=\ln u$，$g(x)=\sin x$，由于 $D(f)=(0, +\infty)$，$R(g)=[-1, 1]$，显然 $D(f)\cap R(g)=(0, 1]\neq\varnothing$，所以这两个函数可以复合成新的函数，其表达式为 $y=\ln\sin x$，定义域为

$D=\{x \mid \sin x \in (0, +\infty)\}=\{x \mid 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$.

可以看出，两个函数要复合成新函数，往往要适当限制原来函数自变量的变化范围才可以. 所以，并不是任何两个函数都可以复合成新函数. 例如，函数 $f(u)=\ln(u-2)$ 与 $g(x)=\sin x$，由于 $D(f)=(2, +\infty)$ 与 $R(g)=[-1, 1]$ 没有公共部分，所以这两个函数不能复合成有意义的新函数.

1.1.5 初等函数

在中学，我们已经学过以下 5 类**基本初等函数**.

幂函数：$y=x^{\mu}$（μ 是常数）.

指数函数：$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），如图 1-14 所示.

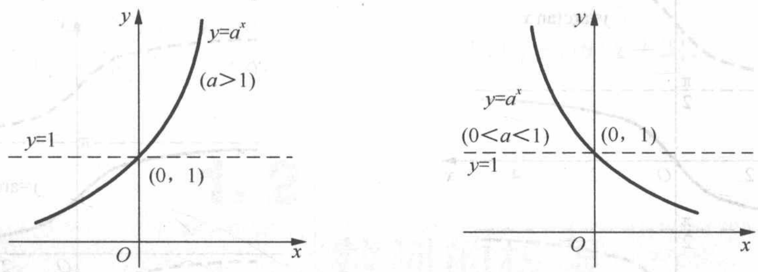


图 1-14

对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），如图 1-15 所示. 特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$.

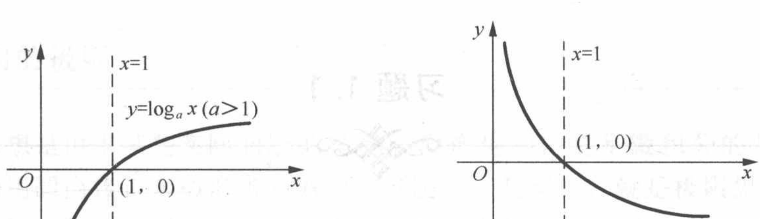


图 1-15

三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$，如图 1-16 所示.

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成并且可以用一个解析式表示的函数，称为**初等函数**. 例如，$y=1+\sin 2x$，$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，$y=\mathrm{e}^{\sin x}$ 等都是初等函数.

初等函数是高等数学研究的主要对象.

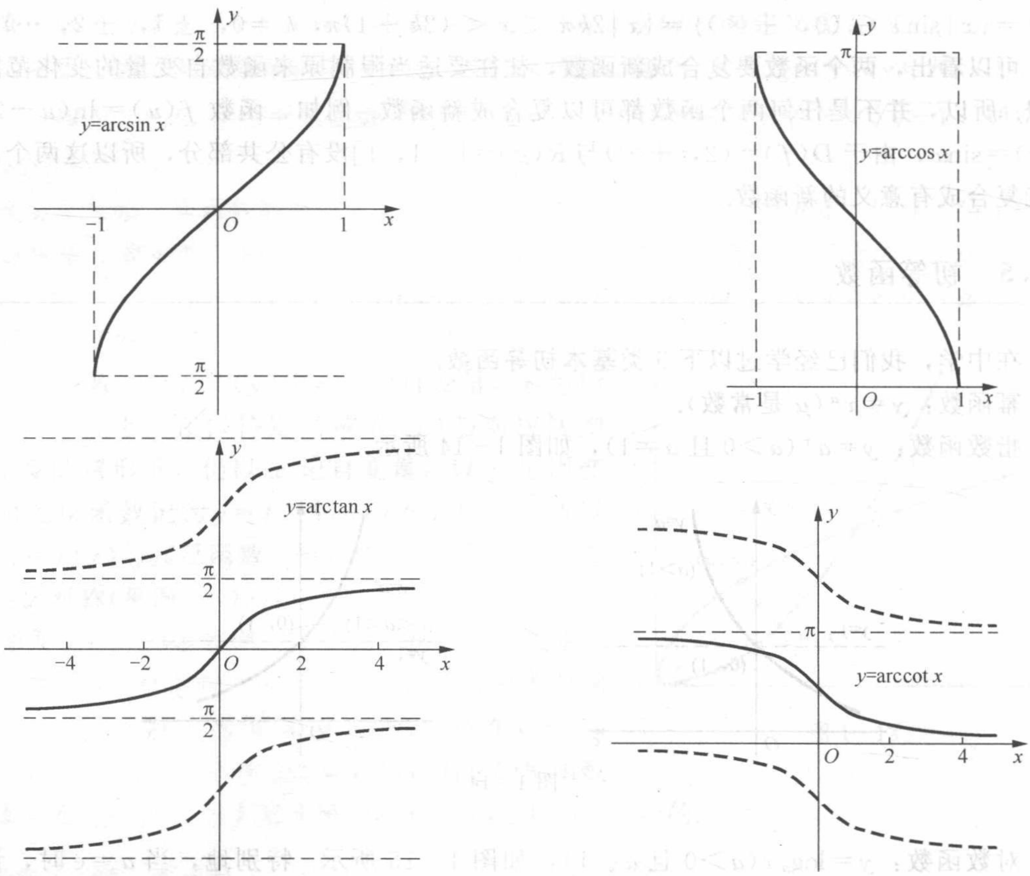


图 1 – 16

习题 1.1

(A)

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}+\sqrt{8+2x-x^2}$；　　(2) $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)}{(x-2)(x-3)}}$；

(3) $y=\ln(1-2^x)$；　　(4) $y=\arcsin\dfrac{x+1}{2}$；

(5) $y=\sqrt{\ln\dfrac{x^2-9x}{10}}$；　　(6) $y=\arccos\ln\sqrt{1-x}$.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2}, & |x|\leqslant 3,\\ x+1, & |x|>3,\end{cases}$ 求 $f(2)$，$f(3)$，$f(-4)$，并作出函数的图形.