A Beginner's Guide to Mathematical Logic

数理逻辑入门

【美】Raymond M. Smullyan 著

刘新文 张瑜 荣华夏 闫佳亮 张立英 译

中国轻工业出版社 | 全国百佳图书出版单位

作为一位终生思考如何以最好的方式表达数理逻辑问题的学者，作者在本书中由浅入深地介绍了命题逻辑、一阶逻辑、初等算术以及皮亚诺算术的基础知识；特别是以简单易懂的形式阐释了哥德尔不完全性定理，说明了由其本人发展的表列证明方法，并穿插大量习题，于每章末给出所有习题的答案，于结尾处附上术语对照表，使得本书非常适合作为数理逻辑入门教材。

除了学者的身份，作者还是一位趣味谜题专家，致力于面向普通读者写作，将深奥的思想以故事和谜题的形式讲述，这使得本书在介绍任何知识时都不设定专业基础，采取层层递进的方式，同时还有趣味十足的例子，适合作为数理逻辑普及读物。

本书译者还特别邀请作者的学生、美国逻辑学家与计算机科学家梅尔文·菲廷（Melvin Fitting）为中文版撰写了序言，其以简单的语言指出了数理逻辑的关键以及本书的核心所在，便于读者整体把握数理逻辑的基本问题。

上架建议：逻辑学

ISBN 978-7-5184-2183-1

9 787518 421831

定价：68.00元

A Beginner's Guide to Mathematical Logic

数理逻辑入门

【美】Raymond M. Smullyan 著

刘新文 张瑜 荣华夏 闫佳亮 张立英 译

中国轻工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

数理逻辑入门／（美）雷蒙德·M. 斯穆里安（Raymond M. Smullyan）著；刘新文等译. —北京：中国轻工业出版社，2019.4

ISBN 978-7-5184-2183-1

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①雷… ②刘… Ⅲ. ①数理逻辑－教材 Ⅳ. ①O141

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第003763号

版权声明

总 策 划：石 铁

策划编辑：孔胜楠　　责任终审：简延荣

责任编辑：孔胜楠　　责任监印：刘志颖

出版发行：中国轻工业出版社（北京东长安街6号，邮编：100740）

印　　刷：三河市鑫金马印装有限公司

经　　销：各地新华书店

版　　次：2019年4月第1版第1次印刷

开　　本：710×1000　1/16　印张：24.00

字　　数：210千字

书　　号：ISBN 978-7-5184-2183-1　定价：68.00元

读者热线：010-65125990，65262933　传真：010-65181109

发行电话：010-85119832　传真：010-85113293

网　　址：http://www.chlip.com.cn　http://www.wqedu.com

电子信箱：1012305542@qq.com

如发现图书残缺请与我社联系调换

180491Y1X101ZYW

译 者 序

雷蒙德 · M. 斯穆里安（Raymond M. Smullyan，1919—2017）是世界著名的数理逻辑学家，他的著作早在 20 世纪 80 年代初就开始被译介到我国。这本教材在我国的翻译出版具有多方面的意义，略举两方面：第一，逻辑证明中著名的表列证明方法将第一次以中文形式系统地出现在教材中；第二，哥德尔不完全性定理的阐释将以非常简单易懂且正确的方式呈现给读者。这是在翻译出版《逻辑学基础》（Patrick J. Hurley 著，郑伟平、刘新文译，中国轻工业出版社，2017）之后，我们接着考虑翻译这本教材的部分动力。对哥德尔不完全性定理有兴趣又想尽快掌握这一定理的读者，还可以读一读斯穆里安在“牛津逻辑指南”丛书中出版的《哥德尔不完全性定理》（*Gödel's Incompleteness Theorems*，“Oxford Logic Guides 19”，Oxford University Press，1992）一书。

为了尽快让本书与读者见面，我邀请了一些同好一起参与本书的翻译工作，具体分工如下：

序言、第 13—14 章、术语对照表：刘新文（中国社会科学院哲学研究所）

第 1—4、8—9 章：张瑜（北京大学哲学系）

第 5—6 章：荣华夏（中国社会科学院研究生院）

第 7、12 章：闫佳亮（中国社会科学院研究生院）

第 10—11 章：张立英（中央财经大学文化与传媒学院）

应该提到的是，原书没有序言；2018 年 10 月 20 日—10 月 21 日，在清华大学–阿姆斯特丹大学逻辑学联合研究中心举行的“第四届亚洲哲学逻辑研讨会”上，我邀请了会议特邀报告者梅尔文·菲廷（Melvin Fitting，1942— ）教授为中译本写了一个序言。菲廷是斯穆里安的学生，也是世界著名的逻辑学家和计算机科学家，曾获得 2012 年“国际自动推理厄尔布朗杰出成就奖”（The Herbrand Award for Distinguished Contributions to Automated Reasoning），并且最近主持出版了《雷蒙德·斯穆里安论自指》（*Raymond Smullyan on Self Reference*，“Outstanding Contributions to Logic 14”，Springer，2017）一书。他告诉我，我们翻译的这本书，原计划是与斯穆里安的《数理逻辑进阶》（*A Beginner's Further Guide to Mathematical Logic*，World Scientific，2016）合起来出版的，但是限于篇幅，最终分成了两册，所以他建议我考虑将后一本书也翻译出来。在这里提到这个事情，既是致谢，也是为后面的工作做一个预告。

刘新文

于中国社会科学院哲学研究所逻辑学研究室

2018 年 11 月 8 日

序　言

一般来说，数理逻辑有两个引人注目的中心，一个是我们可以证明什么，另一个是我们不能证明什么。它们都来自库尔特·哥德尔（Kurt Gödel）在20世纪30年代的重要工作，互为补充，各具张力。

为了探究我们可以证明什么，我们就必须为称之为“证明”的形式对象创建某种装置。对此，我们还必须运用熟悉的数学方法来证明它确实做到了我们所要求它做的（从技术上说，是要证明这一形式装置是“可靠的”和“完备的”）。为了探究我们不能证明什么，我们也必须建立某种装置来刻画我们所说的“计算”是什么意思。今天，我们在讨论这些主题时，一般会想到计算机。但是，真实的计算机很难精确地进行分析，它们的速度和大小是有限制的。我们需要考虑一个理想化的计算机以忽略实践上的限制，我们想要一个适合于它的形式模型以尽可能简单地工作。然后，使用这一装置，我们可以从数学上建立各种不完备性结果，说明我们使用证明以理解数学真理具有很大的局限性。所有这些内容都在本书中以简单和直接的语言得以阐释，它不是写给专家的，而是写给初学逻辑者的，只需要一些关于数学如何运作的基础知识。

在1961年出版的《形式系统的理论》（*Theory of Formal Systems*）中，雷蒙德·斯穆里安引入了“初等形式系统”这一漂亮却非常简单的装置来刻画“计算”这个概念。这个系统很有力量，但又易于描述、易于使用。随后，在1968年出版的《一阶逻辑》（*First-Order Logic*）中，斯穆里安给了“语义表

列”决定性的现代表述形式，为发现和分析形式的逻辑证明提供了非常简单而直观的装置。事实上，这一装置及其衍生物目前在许多自动定理证明的计算机系统中居于核心地位。这本书既使用了初等形式系统，也使用了表列系统来分析数学逻辑中上述讨论的两个方面。

前述两种装置是本书的基础，在表述上既简单又直观，但完全精确。虽然所说的这两个主题处于中心地位，但随着论述的展开，很多非常有趣的结果也得到了讨论和证明。这本书包含了大量的习题，并且为此还提供了答案。

我们完全可以把本书看成是一个终生思考数理逻辑基本问题并且考虑如何最好地表述它们的人所贡献给我们的杰出成果。

梅尔文·菲廷

于美国纽约城市大学研究生院

2018 年 10 月 31 日

目　录

第一部分　一般背景

第 1 章　起点 / 3

集合论 / 8

集合的布尔运算 / 12

文恩图 / 14

布尔方程 / 14

第 2 章　无穷集 / 21

无穷集的大小 / 22

康托尔的伟大发现 / 25

连续统问题 / 26

伯恩斯坦–施罗德定理 / 28

第 3 章　一些问题出现了！ / 35

悖论 / 35

超游戏 / 37

两种集合论系统 / 39

第 4 章 更多的背景 / 45
关系与函数 / 45
数学归纳 / 47
有穷后继原则 / 49
球类运动 / 52
柯尼希引理 / 52
有穷生成树 / 53
广义归纳 / 54
良基关系 / 56
紧致性 / 57

第二部分 命题逻辑

第 5 章 命题逻辑基础 / 73
重言式 / 80
包含 t 与 f 的公式 / 82
说谎话者、说真话者与命题逻辑 / 83
逻辑联结词的相互依赖性 / 84
合舍 / 85
析舍 / 85
进一步的结果 / 86
16 个逻辑联结词 / 88

第 6 章 命题表列 / 95
加标记公式 / 96
逻辑后承 / 100
使用不加标记公式的表列 / 100

命题逻辑表列中的证明 / 101
一个统一记法 / 102
度 / 106
正确性与完全性 / 106
紧致性 / 109
对偶表列 / 113

第 7 章 命题逻辑的公理系统 / 121
统一记法的系统 / 129
一个统一记法的系统 U_1 / 130
另一个统一记法的系统 U_2 / 138

第三部分 一阶逻辑

第 8 章 一阶逻辑基础 / 161
引入 ∀ 与 ∃ / 162
∀ 与 ∃ 的相互依赖性 / 165
关系符号 / 165
一阶逻辑的公式 / 165
变元的自由出现与约束出现 / 167
解释与赋值 / 169
重言式 / 171
一阶逻辑的公理系统 / 172

第 9 章 一阶逻辑的主要论题 / 181
一阶表列 / 181
量词的表列规则 / 183

统一记法 / 184
表列的完全性 / 188
辛迪卡集 / 189
有穷域中的可满足性 / 192
楼文汉姆–斯科伦定理与紧致性定理 / 193
布尔赋值与一阶赋值 / 194
正则定理 / 196
公理系统 $\mathcal{S}_1$ 的完全性 / 199

第四部分　不完全性现象

第 10 章　不完全性的一般概述 / 209
哥德尔机器 / 210
一些基本的一般结果 / 211
句法不完全性定理 / 214
可分离性 / 217
欧米伽一致性 / 218
一阶系统 / 219
哥德尔证明的本质 / 222
欧米伽不完全性 / 223
罗瑟构造 / 224

第 11 章　初等算术 / 235
二元哥德尔编码 / 248
塔尔斯基定理 / 255

第 12 章 形式系统 / 269

初等形式系统 / 270

数字集合与关系 / 280

初等形式系统的算术化 / 281

衍生结果 / 284

第 13 章 皮亚诺算术 / 291

皮亚诺算术的公理模式与推理规则 / 293

第 14 章 进一步的主题 / 313

对角化与不动点 / 313

一致性的不可证性 / 318

参考文献 / 329

术语对照表 / 333

第一部分

一般背景

- 第 1 章　起点
- 第 2 章　无穷集
- 第 3 章　一些问题出现了！
- 第 4 章　更多的背景

第1章
起　点

什么是数理逻辑？或者更一般地说，什么是逻辑，数理逻辑是逻辑吗？在刘易斯·卡罗尔（Lewis Carroll）的《爱丽丝镜中奇遇记》（*Through the Looking Glass*）中，叮当弟（Tweedledee）说："如曾是，或许是；倘若是，就会是；不过既然并不是，那就不是了。这就是逻辑。"

在《13只钟》（*The 13 Clocks*）中，作者詹姆斯·瑟伯（James Thurber）写道："因为触碰一个钟可能不会使它停止，这意味着一个人可以在不触碰它的情况下启动它。正如我所理解，这就是逻辑。"

安布罗斯·比尔斯（Ambrose Bierce）在他的《魔鬼词典》（*The Devil's Dictionary*）一书中提出了逻辑的一个特别好的特征。这真的是一本我强烈推荐的精彩的书，其中包含了一些好的定义，比如对利己主义者的定义："利己主义者考虑他自己比考虑我更多"。他对逻辑的定义是：

> 逻辑；名词。严格按照人类误解的界限和无能进行思考和推理的一门艺术。逻辑的基础是三段论，由大前提、小前提和结论组成。
>
> 大前提：60个人可以像一个人一样快地完成一项工作60次。
>
> 小前提：一个人可以在60秒内挖一个浅井。因此：

结论：60 个人可以在一秒内挖一个浅井。

哲学家和逻辑学家伯特兰·罗素（Bertrand Russell）将数理逻辑定义为："在这个学科中，没有人知道一个人在谈论什么，也不知道一个人说的是不是对的。"

很多人问过我数理逻辑是什么以及它的目的是什么。遗憾的是，没有一个简单的定义可以给出这个学科是关于什么的最深远的意义。只有走进这个学科，它的本质才会显现出来。至于目的，则有很多目的，但是，只有研究了这个学科，才可以理解它们。无论如何，我现在可以告诉你们其中的一个目的，那就是可以使证明的定义精确化。

我想阐述这一点的必要性如下：假设一个几何课的学生交给他的老师一篇论文，其中要求他给出毕达哥拉斯定理的证明。老师归还这篇论文并评论道："这里没有证明！"如果这个学生很有经验，他会跟老师说："你怎么知道这不是证明呢？你从来没有定义过证明的含义！是的，根据令人赞叹的精确度，你已经给出过三角形、全等、垂直等几何概念的定义，但你从未在课程中定义过证明的含义。你怎么能证明我交给你的不是证明呢？"

这个学生的观点很好！证明这个词到底意味着什么？据我了解，一方面它有一个流行的含义，另一方面，它有一个非常精确的含义，但这只是相对于一个所谓的形式的数学系统来说的，因此证明的意思会随着形式系统的改变而改变。在我看来，在日常流行的意义上，证明只是一个带有说服力的论据。然而，这个定义是相当主观的，因为不同的人会被不同的论据所说服。我记得有人曾对我说："我可以证明自由主义是错误的政治哲学！"我回答道："我相信你能证明这一点，令你以及那些分享你价值观的人满意，但是在没有听到你的证明的情况下，我确定你所谓的证明对那些持自由哲学的人来说没有丝毫的说服力！"然后他给出了他的"证明"，事实上，那对他来说似乎完全有效，但显然不会对自由派产生丝毫影响。

说到逻辑，这里有些问题你可以考虑：我曾在一个餐厅看到一句标语，上面写道，"好的食物不便宜；便宜的食物不好"。