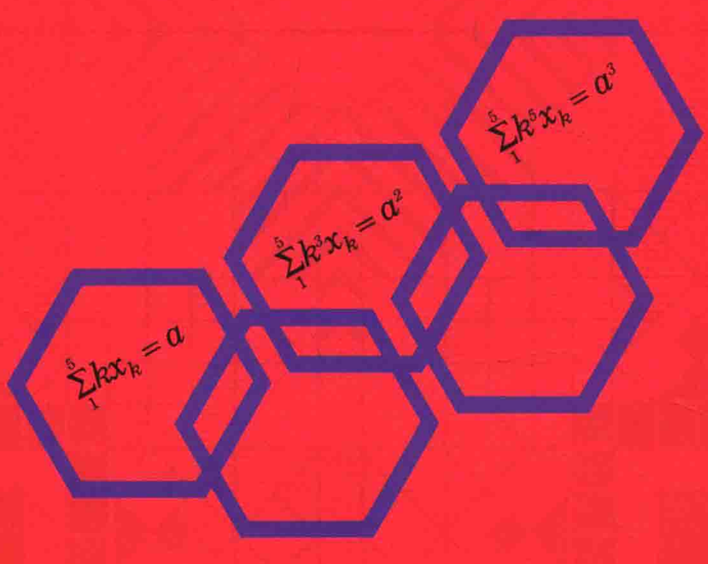
Japan's (Primary) Hironaka Heisuke Cup Maths Competition Test Questions and Answers from the First to the Last (Volume 2)

日本历届(初级)广中杯数学竞赛试题及解答

第2卷

(2008～2015)

甘志国　编著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

刘培杰数学工作室

图片来源：《Area城》

中学生数学竞赛试题系列

- 历届美国数学奥林匹克试题集：多解推广加强
- 历届美国数学邀请赛试题集
- 保加利亚数学奥林匹克
- 历届加拿大数学奥林匹克试题集
- 历届巴尔干数学奥林匹克试题集
- 历届波兰数学奥林匹克试题集
- 历届美国中学生数学竞赛试题及解答
- 全国高中数学联赛试题及解答
- 圣彼得堡数学竞赛试题集
- 数学奥林匹克问题集
- 360 个数学竞赛问题
- 历届 IMO 试题集
- 历届 CMO 试题集
- 匈牙利奥林匹克数学竞赛题解
- 日本历届（初级）广中杯数学竞赛试题及解答

培杰数学国际文化传播中心
www.impj.cn
刘培杰数学工作室网站
http://lpj.hit.edu.cn

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘春雷
封面设计 孙茵艾

哈尔滨工业大学出版社 刘培杰数学工作室
联系地址：哈尔滨市南岗区复华四道街10号
邮　　编：150006
联系电话：0451-86281378 13904613167
E-mail：lpj1378@163.com
微　　信：impjpp

上架建议：数学竞赛

ISBN 978-7-5603-6015-7
9 787
定价

Japan's (Primary) Hironaka Heisuke Cup Maths Competition Test Questions and Answers from the First to the Last (Volume 2)

日本历届（初级）广中杯数学竞赛试题及解答

第2卷

（2008～2015）

甘志国　编著

$\sum_{1}^{5} k^5 x_k = a^3$

$\sum_{1}^{5} k^3 x_k = a^2$

$\sum_{1}^{5} k x_k = a$

哈爾濱工業大學出版社
HITP HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

日本广中杯数学竞赛(包括预赛和决赛,自2000年开始,每年一届)及日本初级广中杯数学竞赛(包括预赛和决赛,自2004年开始,每年一届)都是日本较高级别的初中数学竞赛,难度很大(即使对高中生来说,难度也不小).

本书汇集了第9届至第16届(2008~2015年)日本广中杯数学竞赛试题及解答和第5届至第12届(2008~2015年)日本初级广中杯数学竞赛试题及解答,解答过程均由作者给出,力求详尽.

本书适合于初中生、高中生备战各类数学竞赛时使用,也可供广大数学爱好者选用.

图书在版编目(CIP)数据

日本历届(初级)广中杯数学竞赛试题及解答. 第2卷,2008~2015/甘志国编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.5

ISBN 978-7-5603-6015-7

Ⅰ. ①日… Ⅱ. ①甘… Ⅲ. ①中学数学课-题解
Ⅳ. ①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第102712号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘春雷
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张12.25 字数165千字
版　　次 2016年5月第1版 2016年5月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-6015-7
定　　价 38.00元

目 录 ▎Contest

日本第 5 届初级广中杯预赛试题(2008 年)

Ⅰ. 有若干个七位数, 其和也是七位数, 其平均数为 3 333 333,请问最多有多少个七位数?

Ⅱ. 在所有被 7 整除的三位数中,请求出数字之和最大的一个;若数字之和出现并列最大,则找出其中最大的那个三位数.

Ⅲ. 有四个不超过 10 的正数 a,b,c,d,其中恰有两个大于 π(圆周率),且满足 $a-b-c+d=10$. 请求出 $|a-\pi|+|b-\pi|+|c-\pi|+|d-\pi|$的值.

Ⅳ. 请解出下面的一次方程:$3(3(3(3(3x-1)-1)-1)-1)=\frac{3}{2}$.

Ⅴ. 凸四边形 $ABCD$ 满足$\angle ABC=\angle ADC=90°$,$AB=BC$,面积为 2. 请求出 BD 的长度.

Ⅵ. 一位艺人从 1 开始按照 1,2,3,…的顺序数数,只是在数到 7 的倍数或个位数是 7 的数的时候会做鬼脸. 如果这位艺人从 1 数到 1 000,请问他总共做了多少次鬼脸?(7 本身也是 7 的倍数)

Ⅶ. 有 15 张卡片,每张卡片上各写有一个数字

1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4

从中选出 4 张,排成一行,组成一个四位数(例如 1 324,3 313 等). 请问:一共可以组成多少个四位数?

Ⅷ. 有两张一样大小的硬纸壳如图 1、图 2 所示. 在图 1 中,剪去粗线外的部分,剩下正四棱锥的展开图,能够形成的正四棱锥的表面积的最大值是 7. 请问:在图 2 中,剪去粗线外的部分,剩下正四棱锥的展开图,能够形成的正四棱锥的表面积的最大值是多少?(正四棱锥的底面是正方形,四个侧面是全等的等腰三角形)

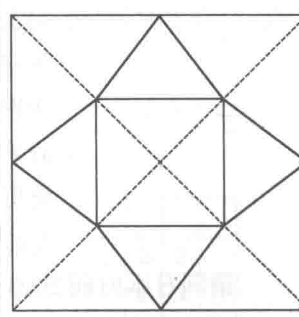


图 1

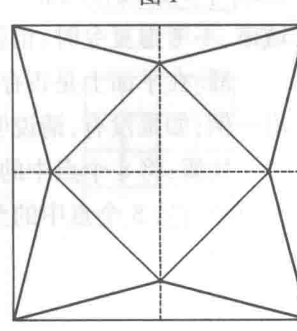


图 2

Ⅸ. 一次国际会议招聘了 3 名同声传译员. 由于这项工作需要集中精力,所以最长只能连续进行 20 min. 译员 A,B,C 按照 $A\to B\to C\to A\to B\to C\to A\to\cdots$的顺序,每人 20 分钟轮流进行. 下面是 3 位译员的会话,请根据此会话来求出会议的时间最长可能是多少小时多少分钟?

注 会议的时间按照分钟计算,薪资以分钟为单位进行支付. 如果时薪为 6 000 日元,则工作 13 分钟得到的薪资为 6 000(日元/时) $\times\frac{13}{60}$(时) =

1 300(日元).

A:“确实是一份很诱人的工作,时薪有 23 400 日元呢!”

B:“嗯,我也听说过,薪资是按照实际工作的时间支付的,休息期间是没有薪资的.”

C:“是吗? 在我们 3 人中,A 是翻译时间最长的,赚钱也最多.”

A:“应该是吧,但如果把休息时间和工作时间都算上,我的时薪就是 8 400 日元了.”

Ⅹ. 正整数 X 的 1.6 倍恰好等于把 X 的首位(最高位)移到最后得到的数,请求出满足条件的 X 的最小值.

(例如,把 123 456 的首位移到最后得到的整数是 234 561,把 102 345 的首位移到最后得到的整数是 23 451)

Ⅺ. 日本和夏威夷的时差,从日本看来是 -19 小时. 例如,日本的时刻是 20:00 的时候,夏威夷的时刻是 1:00;而日本的时刻是 9:00 的时候,夏威夷的时刻是前一天的 14:00. 如果带着能够显示日期的电子表从日本到达夏威夷,则需要往回拨 19 小时,这个 19 小时称为日本和夏威夷的“钟表时差”. 一般来说,两个地区 A 和 B 的“钟表时差”是指在 A 地对准钟表后到达 B 地后,需要将钟表调整的小时数. “钟表时差”可能等于 0 小时到 23 小时中的某一种.

从世界各国中选取 5 个城市:新宿、沙恩、清莱、桑莫塞、克拉克. 它们之间的“钟表时差”如下:

新宿——沙恩:8 小时

沙恩——清莱:6 小时

清莱——桑莫塞:11 小时

桑莫塞——克拉克:3 小时

克拉克——新宿:16 小时

请问日本时间 2008 年 6 月 22 日中午 12 时的时候,桑莫塞是 2008 年 6 月几日几点? (新宿是日本的城市;同一名称表示同一城市,不考虑夏令时,也就是说时差不会变化.)

Ⅻ. 在平面上是否存在具有下列性质的 8 个点:如果有,请找出一例;如果没有,请说明理由.

性质:将 8 个点中的任何两个点用线段联结,该线段的垂直平分线经过这 8 个点中的至少两个点.

日本第 5 届初级广中杯决赛试题(2008 年)

Ⅰ. 在没有说明的情况下,只写出答案即可.

如图 1 所示,在 4×4 的方格表中,每个方格填入↑、↓、←、→四种箭头中的一种,每行每列都是每种箭头恰好出现一次. 然后,在每个方格中填入与其相邻的方格中箭头指向它的方格数. 例如,如果按照图 2 的方式填入箭头,则填数方式如图 3 所示. 图 2 称为"箭头状态",图 3 称为"数值状态".

(i) 请求出数值状态中所有方格填入的数之和可能取到的所有数.

(ii) 当数值状态如图 4 所示时,请填出对应的箭头状态.

(iii) 设数值状态如图 5 所示,中间的 4 个方格里面填的都是 2,请填出一种对应的箭头状态,如果有多种,填出一种即可.

(iv) 在数值状态中,是否可能有某个方格里面填 4? 请说明理由.

(v) 在数值状态中,图 6 中的粗线围成的两个方格里面填的数之和是否可能等于 5? 请说明理由.

Ⅱ. 只回答出结果即可.

(i) 今年(2008 年)在北京举办第 29 届夏季奥运会. 第 1 届夏季奥运会于 1986 年在雅典举行,由于世界大战的原因,第 6 届,第 12 届,第 13 届夏季奥运会中止了,除此之外每 4 年举办一次. 假设以后世界永久和平,总是每 4 年举办一届奥运会,决不再中止. 请问从 2009 年起,举办奥运会的年份(公元纪年)能被奥运会的届数整除的情况还会出现多少次?

(ii) 一个容器的表面展开图如图 7 所示,边长为 6 的正三角形周围连接着三个等腰梯形,它们的上底长均为 4,下底长均为 5,腰长均为 1. 请求出该容器的容积(精确到百分位).

(参考:棱长为 a 的正四面体的体积约为 $0.117\,8a^3$.)

(iii) 已知凸四边形 $ABCD$ 满足下面的条件: $AB=AC$, $\angle ADB=3\angle ABD$, $\angle BAC=\angle DAC$.

请求出 $\angle CBD$ 的度数.

(iv) 正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 16,在边 EF 上取点 G 使得 $GF=5$,此时有 $AG=19$. 设 $\angle BAG$ 的角平分线与直线 CD 交于点

图 1

→	↓	←	↑
↓	↑	→	←
←	→	↑	↓
↑	←	↓	→

图 2

0	3	0	0
0	1	2	1
2	0	1	0
1	0	0	1

图 3

0	0	3	0
1	2	1	0
0	1	0	2
1	0	0	1

图 4

	2	2	
	2	2	

图 5

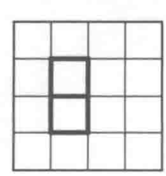


图 6

H,请求出线段 CH 的长度.

(v)$95\ 121^2=9\ 048\ 004\ 641$,它是一个10位数,其前5位90 480和后5位04 641(即4 641)之和为90 480+4 641=95 121.如果 X^2 为10位数,其前5位和后5位之和等于 X,这样的 X 除了95 121以外还有3种,请求出它们.

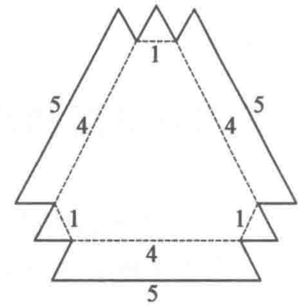


图7

Ⅲ.在某个业余学校里,老师讲完当天的内容后,会进行一次"离校测验"."离校测验"的内容的若干道选择题,不管是谁,不全做对不准回家.学生做完后,要到老师讲台那里交答案.如果有学生没全做对时,老师会告诉他做对的题数,然后让他回到座位上继续思考.例如,"离校测验"有以下3道题,每题有2个选项:

(Ⅰ)在算式3+2=□中,□里应填的数是哪个? A:5;B:6.

(Ⅱ)在算式3×2=□中,□里应填的数是哪个? A:5;B:6.

(Ⅲ)在算式3÷2=□中,□里应填的数是哪个? A:1.5;B:5.1.

太郎做完后,将"(Ⅰ)A,(Ⅱ)A,(Ⅲ)B"的答案交给老师时,老师说"对了1题".

学生 X 君也在这所业余学校里学习,但是由于那天上课的时候一直在睡觉,所以他一道题也不会做.X 君为了能尽早回家,需要在尽可能少的次数之内将题目全部做对.请回答下列问题,并把每次交给老师的答案全部写出.

(i)"离校测验"有3道题目,每题有2个选项,请问 X 君在最不利的情况下需要尝试多少次才能将题目全部做对?

(ii)"离校测验"有3道题目,每题有3个选项,请问 X 君在最不利的情况下需要尝试多少次才能将题目全部做对?

(iii)"离校测验"有4道题目,每题有2个选项,请证明 X 君在最不利的情况下只需要尝试6次就能回家了.

日本第 9 届广中杯预赛试题(2008 年)

Ⅰ. 只写出答案即可.

(i)从 1 到 10 000 的整数中,将被 7 整除(注意 7 本身也是 7 的倍数)且个位是 k 的数的个数记为 a_k.

①请求出 a_7;

②请求出 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9$.

(ii)有 15 张卡片,每张卡片上各写有一个数字

$$1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4$$

从中选出 4 张,排成一行,组成一个四位数(例如 1 324,3 313 等).请问:一共可以组成多少个四位数?

(iii)有四个不超过 10 的正数 a,b,c,d,其中恰有两个大于 π(圆周率),且满足 $a-b-c+d=10$. 请求出 $|a-\pi|+|b-\pi|+|c-\pi|+|d-\pi|$的值.

(iv)在四边形 $ABCD$ 中,有

$$AB>\sqrt{2},BC=\sqrt{3},CD=1,\angle ABC=75^\circ,\angle BCD=120^\circ$$

请求出$\angle CDA$ 的度数.

(v)已知 x 满足下列等式,请求出最接近 x 的整数(将小数部分四舍五入)

$$\frac{1}{10\ 001}+\frac{1}{10\ 002}+\frac{1}{10\ 003}=\frac{1}{10\ 004}+\frac{1}{10\ 005}+\frac{1}{x}$$

Ⅱ. 只写出答案即可.

(i)请求出不超过$\frac{\sqrt{2\ 008}+\sqrt{6}+\sqrt{22}}{5}$的最大整数.

(ii)凸四边形 $ABCD$ 满足$\angle ABC=\angle ADC=90^\circ,AB=BC$,面积为 5. 请求出 BD 的长度.

(iii)x 为正实数,其小数部分为 y,且 $x^2+y^2=8$. 请求出满足条件的所有 x.

(iv)正整数 X 的 1.6 倍恰好等于把 X 的首位(最高位)移到最后得到的数,请求出满足条件的 X 的最小值.

(例如,把 123 456 的首位移到最后得到的整数是 234 561,把 102 345 的首位移到最后得到的整数是 23 451.)

Ⅲ. 直线 $l /\!/ m$,半径分别为 a,b,c 的圆 C_1,C_2,C_3 两两外切,

圆 C_1 和直线 l,m 都相切,圆 C_2 和直线 l 相切,圆 C_3 和直线 m 相切.

a,b,c 为互不相等的整数,请求出 a 可能取值的最小值,以及此时 b 和 c 的值. 其中 $b>c$. 如果有多于一组的答案 (a,b,c),请全部写出.

日本第 9 届广中杯决赛试题(2008 年)

Ⅰ. 在没有说明的情况下,只写出答案即可.

如图 1 所示,在 4×4 的方格表中,每个方格填入↑、↓、←、→四种箭头中的一种,每行每列都是每种箭头恰好出现一次. 然后,在每个方格中填入与其相邻的方格中箭头指向它的方格数. 例如,如果按照图 2 的方式填入箭头,则填数方式如图 3 所示. 图 2 称为"箭头状态",图 3 称为"数值状态".

(i) 请求出数值状态中所有方格填入的数之和可能取到的所有数.

(ii) 当数值状态如图 4 所示时,请填出对应的箭头状态.

(iii) 设数值状态如图 5 所示,中间的 4 个方格里面填的都是 2,请填出一种对应的箭头状态,如果有多种,填出一种即可.

(iv) 在数值状态中,是否可能有某个方格里面填 4? 请说明理由.

(v) 在数值状态中,图 6 中的粗线围成的两个方格里面填的数之和是否可能等于 5? 请说明理由.

Ⅱ. 正 20 面体的各面都是正三角形,每个顶点处有 5 个面汇合. 因此,它有 12 个顶点. 另外,正 20 面体的某五个顶点组成一个正五边形. 根据上面的性质,请回答下面的问题,只需写出答案即可.

(i) 记正 20 面体的 12 个顶点分别为 A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L. 如果从中选取共面的 5 个顶点的话,请问有多少种选取方法?

(ii) 将正 20 面体的 12 个顶点中的 2 个涂黑,10 个涂白,有多少种方法(旋转之后与原来重合的视为同一种方法)?

(iii) 将正 20 面体的 20 个面中的 2 个涂黑,18 个涂白,有多少种方法(旋转之后与原来重合的视为同一种方法)?

(iv) 记正 20 面体中距离最远的 2 个顶点为 A 和 B,经过 A 和 B 的某个平面将正 20 面体切割后的截面为 n 边形,请求出 n 可能取的所有值.

Ⅲ. 设 n 为不小于 3 的整数. 平面上有 n 个半径为 1 的圆,满足下面全部条件的放置方法数为 $f(n)$(旋转后重合的看作同一种

图 1

→	↓	←	↑
↓	↑	→	←
←	→	↑	↓
↑	←	↓	→

图 2

0	3	0	0
0	1	2	1
2	0	1	0
1	0	0	1

图 3

0	0	3	0
1	2	1	0
0	1	0	2
1	0	0	1

图 4

	2	2	
	2	2	

图 5

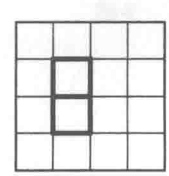


图 6

方法).

(i)每个圆都至少和其他2个圆外切;

(ii)对于任何一个圆 C(圆心为 C 的圆)来说,设与其外切的两个圆分别为圆 D 和圆 E,则 $\angle DCE=60°,120°$ 或 $180°$;

(iii)任取这 n 个圆周上的两点 X 和 Y,则可以从点 X 出发,沿着这些圆的圆周走到点 Y;

(iv)任何两个圆至多有一个公共点.

例如,图7中的3个圆的放置符合条件,而图8中的7个圆不满足条件(ii),图9中的6个圆不满足条件(iii),图10中的6个圆存在相交关系,不满足条件(iv).

①请求出 $f(3)$,$f(4)$,$f(5)$ 的值(只写出答案即可).

②请证明 $f(6)\geqslant 9$.

③请证明 $f(31)\geqslant 1\ 000\ 000$.

Ⅳ.一个数列的前两项都等于1,从第3项起,每一项都等于其前一项的3倍加上再前一项,即1,1,4,13,43,142,….记这个数列的第99项为 a,第100项为 b.

从第1项到第100项的平方和为 $S=1^2+4^2+13^2+43^2+142^2+\cdots+a^2+b^2$,请用 a 和 b 来表示它,并证明之.

Ⅴ.已知四边形 $ABCD$ 满足下面的条件:$AD\parallel BC$,$\angle ABD=30°$,$\angle DBC=70°$,$\angle BCD=40°$,$BC=1$.

(i)请证明:$\angle ACD=10°$;

(ii)请求出四边形 $ABCD$ 的面积,并写出思考过程.

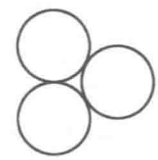


图7

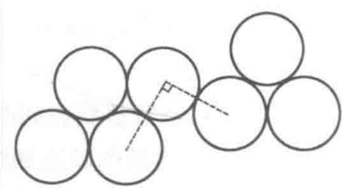


图8

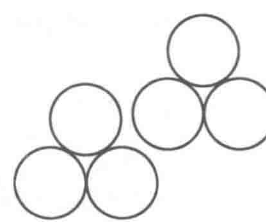


图9

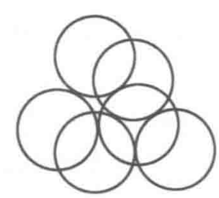


图10

日本第 6 届初级广中杯预赛试题(2009 年)

第 I ~ X 题写出答案即可,第 XI 题需写出答案和思考过程,第 XII 题需写出证明过程.

注 题中的图形不一定准确.

Ⅰ. 请问 2,0,0,9 这四个数字可以组成多少个四位偶数?

Ⅱ. 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle B=90°$. 在边 AC 上取两点 D 和 F,在边 BC 上取两点 E 和 G,使得 $\angle ADB=\angle BED=\angle EFD=\angle EGF=90°$.

如果 $DE=4$,$FG=3$,请求出边 AB 的长度.

Ⅲ. 如图 1 所示,在 10 个方格中,两个人轮流在一个方格中填入"○",已经填入"○"的方格不能再填入"○",且两个"○"不能相邻. 谁先没法填"○"了,谁就输了. 先手为了必胜,第一步应该在哪些方格里面填"○"? 请在 1,3,5,7,9 中选出所有符合条件的.

1		3		5		7		9	

图 1

Ⅳ. 如图 2 所示,沿着网格线从 A 到 B 的最短道路中,请问拐弯次数为偶数的方法有多少种?

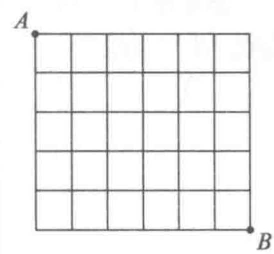


图 2

Ⅴ. 如图 3 所示,将两个正方形 $ABCD$ 和 $DEFG$ 叠放起来. 如果五边形 $ABCED$ 的面积为 4,$\triangle CDE$ 的面积为 1,请求出四边形 $DCFG$ 的面积.

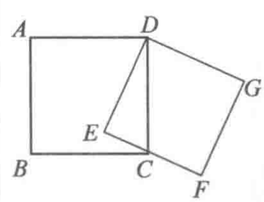


图 3

Ⅵ. 如图 4 所示,在方格中填入 9 个"○",且两个"○"不能相邻,请问共有多少种填法?

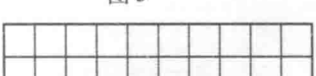


图 4

Ⅶ. 请问满足下列条件的长度为 10 的数列共有多少个?

条件:每一项都是 1,2,3,4,5 中的一个数,且相邻两项之差为 1.

例如,2,3,4,3,4,3,2,1,2,3 是满足条件的一个数列.

Ⅷ. 将 99 以内的不含 0 的正整数从小到大连成一行为:123456789111213l4…979899.

(i) 从中选取连续的 4 个数字(例如 6789,1121 等),共能组成多少个四位数?

(ii) 从中选取连续的 3 个数字(例如 789,911 等),共能组成多少个四位数?

(iii) 从中选取连续的 2 个数字(例如 78,91 等),共能组成多少个四位数?

Ⅸ. 请求出填入□中的数,使得等式成立

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{3\times8}+\frac{1}{5\times13}+\frac{1}{8\times21}+\frac{1}{13\times24}+\frac{1}{21\times55}+\frac{1}{34\times\square}=1$$

Ⅹ. 有5张卡片,每张卡片的正反两面各写有一个数字,且0,1,2,3,4,5,6,7,8,9恰好各出现一次. 把它们排成一行,可以组成若干个五位数(例如32 961等)或者四位数(例如02 159等). 其中,五位数中有768个是5的倍数,四位数中有80个是4的倍数. 请问五位数中有多少个是4的倍数?

注 6和9是不同的数字,不能把6倒过来当作9,也不能把9倒过来当作6.

Ⅺ. 如图5所示,$\triangle ABC$是正三角形,四边形$DECF$是正方形. 请问$\triangle ABG$的面积是正方形$DECF$的面积的多少倍?

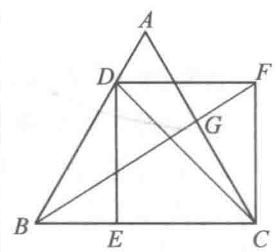


图5

Ⅻ. 已知凸五边形$ABCDE$满足$AB /\!/ EC$, $BC /\!/ AD$, $CD /\!/ BE$, $DE /\!/ CA$.

请证明$EA /\!/ DB$. (图6是满足题设的一个例子. $AB /\!/ EC$表示直线AB与直线EC平行;需要在答题纸上画出图形.)

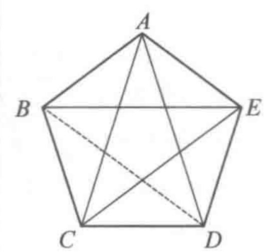


图6