

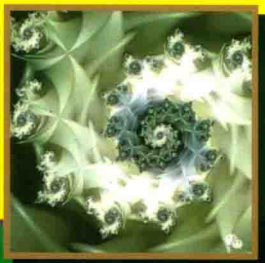
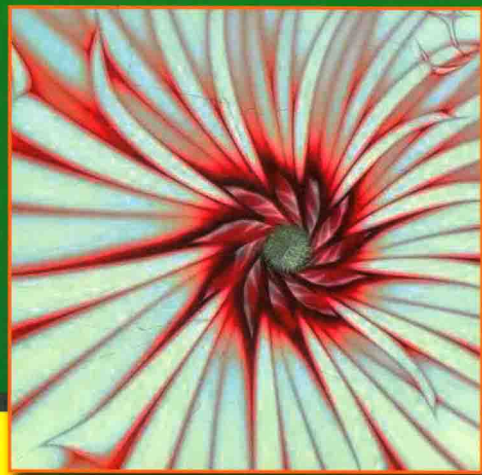


中学数学拓展丛书

数学竞赛采风

Shuxue Jingsai Caifeng

沈文选 杨清桃 著



数学竞赛，许多青少年喜爱的一种数学活动！
这种数学活动有深远的教育价值！数学竞赛专题培
训内容展示竞赛数学某些侧面亮丽的风景！



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

● 中学数学拓展丛书

本册书是湖南省教育厅科研课题“教育数学的研究”（编号06C310）成果之九

数学竞赛采风

Shuxue Jingsai Caifeng

沈文选 杨清桃 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书共分9章:第1章 数学竞赛活动的教育价值,第2章 从数学竞赛到竞赛数学,第3章 竞赛数学研究采风,第4章 专题培训1:三角形的垂心图,第5章 专题培训2:角的内切圆图,第6章 专题培训3:完全四边形,第7章 专题培训4:卡尔松不等式,第8章 专题培训5:一类三元不等式,第9章 专题培训6:利用函数特性证明不等式.

本书可作为高等师范院校、教育学院、教师进修学院数学专业及国家级、省级中学数学骨干教师培训班的教材或教学参考书,也可作为高中数学竞赛培训班的教材或教学参考书,还可作为广大中学数学教师及数学爱好者的数学视野拓展读物.

图书在版编目(CIP)数据

数学竞赛采风/沈文选,杨清桃著. —哈尔滨:

哈尔滨工业大学出版社,2018.1

(中学数学拓展丛书)

ISBN 978-7-5603-6734-7

I. 数… II. ①沈… ②杨… III. ①中学教学课—
教学参考资料 IV. G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第147364号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 李广鑫

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006

传真 0451-86414749

网址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开本 787mm×1092mm 1/16 总印张 29 总字数 705千字

版次 2018年1月第1版 2018年1月第1次印刷

书号 ISBN 978-7-5603-6734-7

定价 68.00元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

● 序

我和沈文选教授有过合作,彼此相熟。不久前,他发来一套数学普及读物的丛书书目,内容涉及数学眼光、数学思想、数学应用、数学模型、数学方法、数学史话等,洋洋大观。从论述的数学课题来看,该丛书的视角新颖,内容充实,思想深刻,在数学科普出版物中当属上乘之作。

阅读之余,忽然觉得公众对数学的认识很不相同,有些甚至是彼此矛盾的。例如:

一方面,数学是学校的主要基础课,从小学到高中,12年都有数学;另一方面,许多名人在说“自己数学很差”的时候,似乎理直气壮,连脸也不红,好像在暗示:数学不好,照样出名。

一方面,说数学是科学的女王,“大哉数学之为用”,数学无处不在,数学是人类文明的火车头;另一方面,许多学生说数学没用,一辈子也碰不到个函数,解不了一个方程,连相声也在讽刺“一边向水池注水,一边放水”的算术题是瞎折腾。

一方面,说“数学好玩”,数学具有和谐美、对称美、奇异美,歌颂数学家的“美丽的心灵”;另一方面,许多人又说,数学枯燥、抽象、难学,看见数学就头疼。

数学,我怎样才能走近你,欣赏你,拥抱你?说起来也很简单,就是不要仅仅埋头做题,要多多品味数学的奥秘,理解数学的智慧,抛却过分的功利,当你把数学当作一种文化看待的时候,数学就在你心中了。

我把学习数学比作登山,一步步地爬,很累,很苦,但是如果你能欣赏山林的风景,那么登山就是一种乐趣了。

登山有三种意境。

首先是初识阶段。走入山林,爬得微微出汗,坐拥山色风光,体

会“明月松间照，清泉石上流”的意境。当你会做算术，会记账，能够应付日常生活中的数学的时候，你会享受数学给你带来的便捷，感受到好似饮用清泉那样的愉悦。

其次是理解阶段。爬到山腰，大汗淋漓，歇足小坐。环顾四周，云雾环绕，满目苍翠，心旷神怡。正如苏轼名句：“横看成岭侧成峰，远近高低各不同。不识庐山真面目，只缘身在此山中。”数学理解到一定程度，你会感觉到数学的博大精深，数学思维的缜密周全，数学的简洁之美，你对符号运算有爱不释手的感受。不过，理解了，还不能创造。“采药山中去，云深不知处。”对于数学的伟大，还莫测高深。

最后是登顶阶段。攀岩涉水，越过艰难险阻，到达顶峰的时候，终于出现了“会当凌绝顶，一览众山小”的局面。这时，一切疲乏劳顿、危难困苦，全部抛到九霄云外。“雄关漫道真如铁”，欣赏数学之美，是需要代价的。当你破解了一道数学难题，“蓦然回首，那人却在灯火阑珊处”的意境，是语言无法形容的快乐。

好了，说了这些，还是回到沈文选先生的丛书。如果你能静心阅读，它会帮助你一步步攀登数学的高山，领略数学的美景，最终登上数学的顶峰。于是劳顿着，但快乐着。

信手写来，权作为序。

张奠宙

2017年11月13日

于沪上苏州河边

附 文

（文选先生编著的丛书，是一种对数学的欣赏。因此，再次想起数学思想往往和文学意境相通，曾在《文汇报》发表一篇短文，附录于此，算是一种呼应。）

数学和诗词的意境

张奠宙

数学和诗词，历来有许多可供谈资的材料。例如：

一去二三里，烟村四五家；

亭台六七座，八九十枝花。

把十个数字嵌进诗里，读来琅琅上口。郑板桥也有咏雪诗：

一片二片三四片，五片六片七八片；

千片万片无数片，飞入梅花总不见。

诗句抒发了诗人对漫天雪舞的感受。不过，以上两诗中尽管嵌入了数字，却实在和数学没有什么关系。

数学和诗词的内在联系，在于意境。李白的题为《送孟浩然之广陵》诗云：

故人西辞黄鹤楼，烟花三月下扬州。

孤帆远影碧空尽，唯见长江天际流。

数学名家徐利治先生在讲极限的时候，总要引用“孤帆远影碧空尽”这一句，让大家体会一个变量趋向于0的动态意境，煞是传神。

近日与友人谈几何,不禁联想初唐诗人陈子昂的题为《登幽州台歌》中的名句:

前不见古人,后不见来者;
念天地之悠悠,独怆然而涕下。

一般的语文解释说:上两句俯仰古今,写出时间绵长;第三句登楼眺望,写出空间辽阔;在广阔无垠的背景中,第四句描绘了诗人孤单寂寞、悲哀愁闷的情绪,两相映照,分外动人。然而,从数学上看来,这是一首阐发时间和空间感知的佳句。前两句表示时间可以看成是一条直线(一维空间)。陈老先生以自己为原点,前不见古人指时间可延伸到负无穷大,后不见来者则意味着未来的时间是正无穷大。后两句则描写三维的现实空间:天是平面,地是平面,悠悠地张成三维的立体几何环境。全诗将时间和空间放在一起思考,感到自然之伟大,产生了敬畏之心,以至怆然涕下。这样的意境,数学家和文学家是可以彼此相通的。进一步说,爱因斯坦的四维时空学说,也能和此诗的意境相衔接。

贵州六盘水师专的杨老师告诉我他的一则经验。他在微积分数学中讲到无界变量时,用了宋朝叶绍翁《游园不值》中的诗句:

满园春色关不住,一枝红杏出墙来。

学生每每会意而笑。实际上,无界变量是说,无论你设置怎样大的正数 M ,变量总要超出你的范围,即有一个变量的绝对值会超过 M 。于是, M 可以比喻成无论怎样大的园子,变量相当于红杏,结果是总有一枝红杏越出园子的范围。诗的比例如此恰切,其意境把枯燥的数学语言形象化了。

数学研究和学习需要解题,而解题过程需要反复思索,终于在某一时刻出现顿悟。例如,做一道几何题,百思不得其解,突然添了一条辅助线,豁然开朗,欣喜万分。这样的意境,想起了王国维用辛弃疾的词来描述的意境:“众里寻它千百度,蓦然回首,那人却在,灯火阑珊处。”一个学生,如果没有经历过这样的意境,数学大概是学不好的了。

音乐能激发或抚慰情怀,绘画使人赏心悦目,诗歌能动人心弦,哲学使人获得智慧,科技可以改善物质生活,但数学却能提供以上的一切。

——Klein

数学就是对于模式的研究。

——A. N. 怀特海

甚至一个粗糙的数学模型也能帮助我们更好地理解一个实际情况,因为我们在试图建立数学模型时被迫考虑了各种逻辑可能性,不含混地定义了所有的概念,并且区分了重要的和次要的因素。一个数学模型即使导出了与事实不符合的结果,它也可能是有价值的,因为一个模型的失败可以帮助我们去寻找更好的模型。应用数学和战争是相似的,有时一次失败比一个胜利更有价值,因为它帮助我们认识到我们的武器或战略的不适当之处。

——A. Renyi

人们喜爱音乐,因为它不仅有神奇的乐谱,而且有悦耳的优美韵律!

人们喜爱画卷,因为它不仅描绘出自然界的壮丽,而且可以描绘人间美景!

人们喜爱诗歌,因为它不仅是字词的巧妙组合,而且有抒发情怀的韵律!

人们喜爱哲学,因为它不仅是自然科学与社会科学的浓缩,而且使人更加聪明!

人们喜爱科技,因为它不仅是一个伟大的使者或者桥梁,而且是现代物质文明的标志!

而数学之为德,数学之为用,难以用旋律、美景、韵律、聪明、标志等词语来表达!

你看,不是吗?

数学精神,科学与人文融合的精神,它是一种理性精神,一种求简、求统、求实、求美的精神!数学精神似一座光辉的灯塔,指引数学发展的航向!数学精神似雨露阳光滋润人们的心田!

数学眼光,使我们看到世间万物充满着带有数学印记的奇妙的科学规律,看到各类书籍和文章的字里行间有着数学的踪迹,使我们看到满眼绚丽多彩的数学洞天!

数学思想,使我们领悟到数学是用字母和符号谱写的美妙乐曲,充满着和谐的旋律,让人难以忘怀,难以割舍;让我们在思疑中启悟,在思辨中省悟,在体验中领悟!

数学方法,人类智慧的结晶,它是人类的思想武器;它像画卷一样描绘着各学科的异草奇葩般的景象,令人目不暇接;它的源头又是那样地寻常!

数学解题,人类学习与掌握数学的主要活动,它是数学活动的一个兴奋中心;数学解题理论博大精深,提高其理论水平是永远的话题!

数学技能,在数学知识的学习过程中逐步形成并发展的一种大脑操作方式。它是一种智慧,是数学能力的一种标志!操握数学技能是我们追求的一种基础性目标!

数学应用,给我们展示出了数学的神通广大,在各个领域与角落闪烁着人类智慧的火花!

数学建模,呈现出了人类文明亮丽的风景,特别是那呈现出的抽象彩虹——一个个精巧的数学模型,璀璨夺目,流光溢彩!

数学竞赛,是许多青少年喜爱的一种活动,这种数学活动有着深远的教育价值,它是选拔和培养数学英才的重要方式之一。这种活动可以激励青少年对数学学习的兴趣,可以扩大他们的数学视野,促进创新意识的发展。数学竞赛培训中的专题培训内容展示了数学竞赛亮丽的风采!

数学测评,检验并促进数学学习效果的重要手段。测评数学的研究是教育数学研究中的一朵奇葩。测评数学的深入研究正期待着我们!

数学史话,充满了前辈们创造与再创造的诱人的心血机智,让我们可以从中汲取丰富的营养!

数学欣赏,是对数学喜爱情感的流淌。这是一种数学思维活动的崇高情感表达。数学欣赏,引起心灵震撼!真、善、美在欣赏中得到认同与升华!从数学欣赏中领略数学智慧的美妙!从数学欣赏走向数学鉴赏!从数学文化欣赏走向文化数学研究!

因此,我们可以说,你可以不信仰上帝,但不能不信仰数学。

从而,提高我国每一个人的数学文化水平及数学素养,是提高我国各个民族整体素质的重要组成部分,这也是数学基础教育中的重要目标。为此,笔者构思了这套《中学数学拓展丛书》。

这套书是笔者学习张景中院士的教育思想,对一些数学素材和数学研究成果进行再创造并以此为指导思想来撰写的;是献给中学师生,试图为他们扩展数学视野、提高数学素养以响应张奠宙教授的倡议:建构符合时代需求的数学常识、数学智慧的书籍。

不积跬步,无以至千里;不积小流,无以成江河;没有积累便没有丰富的素材,没有整合创新便没有鲜明的特色。这套书的写作,是笔者在多年资料的收集、学习笔记的整理及笔者

已发表的文章的修改并整合的基础上完成的。因此,每册书末都列出了尽可能多的参考文献,在此,衷心地感谢这些文献的作者。

这套书,作者试图以专题的形式,对中小学中典型的数学问题进行广搜深掘来串联,并以此为线索来写作。

本册是《数学竞赛采风》。

数学竞赛活动是起步最早,规模最大,种类、层次较多的学科竞赛活动。在我国有各省市的初、高中竞赛,有全国的初、高中联赛,还有西部竞赛、女子竞赛、希望杯邀请赛等各种各样的邀请赛、通讯赛。

世界上一些文化比较发达的国家和地区,除了举办本国或本地区的各类各级的数学奥林匹克外,越来越多地积极参加国际数学奥林匹克。这是一种有着深刻内涵的全球文化现象,这是一种深厚文化品质的反映。

数学竞赛活动的教育价值是十分深远的,该书在这方面做了较深入的探讨。

在解决数学竞赛问题中所体现出来的能力,其实质是能根据问题情景重组已有的数学知识,能正确、迅速地检索、选择和提取相关数学内容知识并及时转化为适当的操作程序,从而使问题从初始状态转变为目的状态。显然,如果一个长时记忆中缺乏相关的数学内容知识,那么,相应的知识检索、选择、提取、重组等活动就失去了基础。丰富、系统的数学知识不仅是解题创新所不可或缺的材料,而且还能直接激发解题创新的直觉或灵感。

抓好数学竞赛培训是开展数学竞赛活动的关键环节。培训有各种方式方法,但专题培训在关键时刻能发挥重要作用。为此,该书在这方面进行了一些尝试,介绍了几个典型的专题培训内容。这是《数学竞赛采风》的重点内容。由于数学竞赛涉及的数学内容比较广,我们只是进行了某些侧面介绍,更多的方面可参见作者的其他著作(如由湖南师范大学出版社出版的《分级精讲与测试系列》《初级教程系列》《专题研究系列》《解题金钥匙系列》《解题思路方法系列》《专家讲坛系列》以及浙江大学出版社出版的《解题策略系列》等)。

开展好数学竞赛活动的另一重要方面,就是进行竞赛数学研究。竞赛数学是基础性的综合数学,是发展性的教育数学,是创造性的问题数学,是富于挑战的活数学。本书在这方面也做了一些探讨。当然,深入地探讨也有待于与同行的继续努力。

忠心感谢张奠宙教授在百忙中为本书作序!

忠心感谢刘培杰数学工作室,感谢刘培杰老师、张永芹老师、责任编辑老师等诸位老师,是他们的大力支持,精心编辑,使得本书以这样的面目展现在读者面前!

忠心感谢我的同事邓汉元教授,我的朋友赵雄辉、欧阳新龙、黄仁寿,我的研究生们:羊明亮、吴仁芳、谢圣英、彭熹、谢立红、陈丽芳、谢美丽、陈森君、孔璐璐、邹宇、谢罗庚、彭云飞等对本书编写工作的大力协助,还要感谢我的家人对我们写作的大力支持!

从事竞赛数学研究也是进行数学教育研究中的一个方面。在这套书中,作者撰写此书也想表明这个观点,本书对竞赛数学的研究只展现了小小的层面,以望读者谅解。

沈文选 杨清桃

2017年11月于岳麓山下

第1章 数学竞赛活动的教育价值

1.1 数学竞赛活动有利于发现和培养青少年数学人才	2
1.2 数学竞赛活动有利于激发学生形成锲而不舍的钻研精神和科学态度	5
1.3 数学竞赛活动有利于学生人性品质的完善	9
1.4 数学竞赛活动有利于促进学生创新意识的全面发展	10
1.5 数学竞赛活动有利于学生数学能力的提高	20
1.6 数学竞赛活动有利于中学数学教育的改革和发展	26

第2章 从数学竞赛到竞赛数学

2.1 竞赛数学的体系特点	30
2.1.1 竞赛数学是基础性的综合数学	30
2.1.2 竞赛数学是发展性的教育实验数学	30
2.1.3 竞赛数学是创造性的问题数学	31
2.1.4 竞赛数学是富于挑战性的活数学	31
2.2 竞赛数学的主要内容	31
2.3 竞赛数学的问题特征	32
2.3.1 竞技性和艺趣性	32
2.3.2 新颖性和挑战性	38
2.3.3 开放性和创造性	40
2.3.4 背景性和探索性	41

第3章 竞赛数学研究采风

3.1 探索研究竞赛数学的着眼点	49
3.1.1 着眼于教材数学	49
3.1.2 着眼于趣味数学	51
3.1.3 着眼于生活数学	52
3.1.4 着眼于高等数学	52
3.2 竞赛试题的命制原则	53
3.2.1 科学性原则	53
3.2.2 新颖性原则	54
3.2.3 甄别性原则	56

目录

CONTENTS

目录

CONTENTS

3.2.4	能力性原则	56
3.2.5	界定性原则	57
3.3	竞赛试题的命制方法、方式	57
3.3.1	演绎深化	57
3.3.2	名题扮演	60
3.3.3	陈题改造	62
3.3.4	模型变换	64
3.4	平面几何竞赛题的命制途径探寻	68
3.4.1	基于基本图形,深入挖掘性质	69
3.4.2	立足基本性质,巧妙构造图形	71
3.5	竞赛试题的求解破题寻究	72
3.5.1	分析题设特点,发掘条件探究	72
3.5.2	探析题设背景,联想有关模型	74
3.5.3	剖析题设结构,试验提炼缩围	79
3.6	竞赛数学的教学与专题培训探讨	89

第4章 专题培训1:三角形的垂心图

4.1	三角形垂心图的特性	91
4.2	三角形垂心图性质的应用	107
4.3	三角形垂心图的演变及应用	125
4.3.1	垂心演变为高线上任一点	125
4.3.2	三角形的高线及高线对应的边的演变	133
4.3.3	三角形垂心图的反演	137

第5章 专题培训2:角的内切圆图

5.1	角的内切圆图的特性	152
5.2	角的内切圆性质的应用	171
5.3	角的内切圆图的切变及应用	193
5.3.1	角的内切圆图的反演	193
5.3.2	角的内切圆图中角的两边可视为共点的两条根轴	194
5.3.3	角的内切圆的外接圆与角内的外切圆	198
5.3.4	邻补角的内切圆与对顶角的内切圆	202
5.3.5	角内的多个内切圆	205

第6章 专题培训3:完全四边形

6.1	完全四边形的特性	217
6.2	完全四边形性质的应用	248
6.2.1	应用完全四边形性质解题	248
6.2.2	蕴含完全四边形性质的问题	263
6.3	完全四边形的特点及应用	271
6.3.1	完全四边形图的反演	271

6.3.2 残缺的完全四边形图问题·····	272
6.3.3 有约束条件的完全四边形图·····	277

第7章 专题培训4:卡尔松不等式

7.1 卡尔松不等式及推论·····	300
7.2 卡尔松不等式的应用·····	304
7.2.1 构造矩阵或应用推论1 处理问题·····	304
7.2.2 不构造矩阵或应用推论2 处理问题·····	313

第8章 专题培训5:一类三元不等式

8.1 舒尔不等式及一类三元不等式·····	335
8.2 舒尔不等式及其变形式的应用·····	337
8.3 舒尔不等式变形式的演变及应用·····	352
8.4 一类三元不等式的综合应用·····	359

第9章 专题培训6:利用函数特性证明不等式

9.1 利用二次函数的非负性·····	371
9.2 利用函数的单调性·····	375
9.3 利用函数的凹凸性·····	386
9.4 利用切线函数·····	398
9.5 利用函数取最(极)值的策略·····	410
9.6 利用构造的预测函数的性质·····	413

参考文献·····	425
作者出版的相关书籍与发表的相关文章目录·····	427
编后语·····	430

目 录

CONTENTS

第1章 数学竞赛活动的教育价值

学数学需要解题,早期的数学著作,如古巴比伦的泥板文书、古埃及的草纸书、中国的《九章算术》等,均无一例外地用问题及其解决的形式记录人们研究数学的成果.进行解题比赛的活动也由来已久,古希腊有解几何难题比赛的记载;16世纪,有意大利塔尔塔利亚(Tartaglia)求解三次方程的激烈竞争;17世纪,有不少数学家喜欢提出一些问题向其他数学家挑战,如法国的费马(Fermat)提出的费马大定理,向人类的智慧挑战了三百多年;18世纪,法国曾经进行过独立的数学比赛;19世纪,法国科学院以悬赏的方式征求对数学难题的解答,常常获得一些重要的数学发现,数学王子高斯(Gauss)就是比赛的优胜者.解难题的比赛在数学的发展史上,留下了光辉的一页.

公开的解题竞赛无疑会引起数学家们的注意和激发更多人的兴趣.随着学校教育的发展,教育工作者开始考虑在中学生中间举办解数学难题的竞赛,以激发中学生对数学的兴趣和及早发现有数学才能的学生.1894年,匈牙利数学界为了纪念著名数学家、匈牙利数学会主席埃特沃斯(von Etövs)荣任匈牙利教育部部长而开了中学生数学竞赛之先河.匈牙利的数学竞赛造就了一批与其国土面积和人口数量都不成比例的数学大师,在早期的优胜者中,有大名鼎鼎的费耶(Fejér)、冯·卡门(von Kármán)、柯尼希(König)、哈尔(Haar)、里斯(Riesz)、塞格(Szegö)、拉多(Radó)……这些大师的纷纷登台,引起了欧洲和其他国家的强烈兴趣,分别于20世纪初叶至中叶,争相仿效.于是,第一届国际数学奥林匹克竞赛(IMO)1959年7月在罗马尼亚拉开了帷幕.

数学竞赛已成为国际公认的教育活动,从小学、中学到大学,参赛人数之多、范围之广、试题难度之高等均不比奥运会逊色.在国际数学奥林匹克竞赛中,中国学生的成绩已得到举世公认,这优异的成绩,是中华民族精神的体现,是国人潜质的反映,它突显民族的希望,折射国家的未来.进入新世纪,面临新挑战!如何继续使中国的数学奥林匹克事业漫步在繁荣发展的康庄大道上?这是摆在有志于这一事业的同仁面前的一个重要课题.苏淳教授指出:“……除了应吸引越来越多的人加入到这一事业中来,加强其群众性、组织和管理上的科学性之外,还应当努力地开展奥林匹克数学这一‘已逐渐形成的特殊的数学学科’的广泛而深入的科学研究工作,应当花力气组织起一支既有广泛的群众基础又有其中坚力量的科学研究队伍,努力提高其研究水平.”笔者是非常赞同如上观点的,同时也认为:事业要发展,一方面是整体有序性的加强,另一方面是局部自主性的发挥.数学奥林匹克事业整体有序性得以加强要靠奥林匹克数学理论的深入研究并使其体系更加完善,其自主性的积极发挥也要以卓有成效的数学奥林匹克教育为基础^①.

① 沈文选.奥林匹克数学研究与数学奥林匹克教育[J].数学教育学报,2002(3):21-25.

1.1 数学竞赛活动有利于发现和培养青少年数学人才

数学竞赛活动对发现人才、选拔人才、培养人才发挥了重要的作用. 数学既是基础学科又是应用学科, 对人类社会有着广泛而深刻的影响. 当今所有经济大国和科技大国, 无一例外地都是数学强国. 中国是个具有优秀文化传统的国家, 在“改革开放”的新形势下, 要建设有中国特色的社会主义, 提高全民族数学文化素养是重大战略任务. 而数学竞赛的开展, 肩负着发现和培养优秀人才的重任. 要使中国成为数学强国, 培养数学优秀人才的任务更加重大. 一个数学人才的培养一般分为两个阶段: 一个是早期的未定型阶段, 另一个是选定数学为职业后的学习和研究阶段. 这两个阶段的培优教育都是重要的, 一些世界著名的数学家, 除了他们的天赋之外, 早期得到“伯乐”的指引的例子是很多的.

数学竞赛的最初目的就是及时发现和选拔具有优秀数学才能的青少年, 并通过适当的方式加以特殊培养, 因材施教, 促进其健康成长. 正如国际数学教育委员会(the International Commission on Mathematical Institution, ICMI)在其研究系列丛书之二——《九十年代的中小学数学》中所述:“中学生能够像数学家一样地从事活动, 这一点已经由国际数学奥林匹克选手证明. 如果给予机会, 就是极为普通的学生也可以证明这一点. 在国际数学奥林匹克中, 选手们作为问题的解决者在活动, 这是杰出的天才最容易显露的地方.”

著名数学大师陈省身教授在《九十初度说数学》一书中指出:“中国在国际数学奥林匹克竞赛中, 连续多年取得了很好的成绩. 这项竞赛考察的是高中阶段的知识, 不包括微积分, 但题目需要思考. 我相信我是考不过这些小孩子的. 因此有人觉得, 好的数学家未必长于这种考试, 竞赛胜利者也未必是将来的数学家. 这个意见似是而非. 数学竞赛大约是百年前在匈牙利开始的, 匈牙利产生了同它的人口数量不成比例的许多大数学家!”数学竞赛为匈牙利造就了一大批世界著名学者. 美国航天之父冯·卡门在《航空航天时代的科学奇才》一书中指出:“据我所知, 目前在国外的匈牙利著名科学家当中, 有一半以上都是数学竞赛的优胜者, 在美国的匈牙利科学家, 如爱德华·泰勒、列夫·西拉得、G. 波利亚、冯·诺伊曼等几乎都是数学竞赛的优胜者. 我衷心希望美国和其他国家都能倡导这种数学竞赛.”

在历届 IMO 的优胜者中, 有 8 位获得过相当于诺贝尔奖的数学界最高荣誉——菲尔兹奖(Fields Medal), 他们是:

1959 年银牌得主 Gregory Margulis(俄罗斯)于 1978 年获得菲尔兹奖;

1969 年金牌得主 Valdimir Drinfeld(乌克兰)于 1990 年获得菲尔兹奖;

1974 年金牌得主 Jean-Christophe Yoccoz(法国)于 1994 年获得菲尔兹奖;

1977 年银牌得主、1978 年金牌及特别奖得主 Richard Borcherds(英国)于 1998 年获得菲尔兹奖;

1981 年金牌得主 Timothy Gowers(英国)于 1998 年获得菲尔兹奖;

1982 年金牌得主 Grigori Perelman(俄罗斯)于 2006 年获得菲尔兹奖;

1985 年银牌得主 Laurant Lafforgue(法国)于 2002 年获得菲尔兹奖;

1986 年铜牌、1987 年银牌、1988 年金牌得主 Terence Tao(陶哲轩, 澳大利亚)于 2006 年获得菲尔兹奖.

还有多位 IMO 优胜者获得其他数学大奖, 如:

1963~1966年金、银牌得主 Laszlo Lovasz 于1999年获得数学最高奖——沃尔夫奖(Wolf Prize), Lovasz 于1965年及1966年连续两年获得IMO特别奖;

1977年银牌得主 Peter Shor 于1998年获得与计算机和信息科学有关的数学大奖——奈瓦林纳奖(Nevanlinna Prize);

1979年金牌得主 A. Razborow 于1990年获得奈瓦林纳奖(Nevanlinna Prize);

1986年金牌得主 S. Smirnov 获得2001年Clay数学研究奖;

1990年金牌得主 V. Lafforgue 获得2000年欧洲数学联盟数学奖.

我国自1986年开始派选手参加IMO,相信若干年以后,这批选手也可以大放异彩.

美国普特南大学数学竞赛的优胜者,大多数成为杰出的数学家、物理学家和工程师.如:

Richard Feynman 获得1965年诺贝尔物理奖;

Kenneth Wilson 获得1982年诺贝尔物理奖;

John Milnor 获得1962年菲尔兹奖;

David Mumford 获得1974年菲尔兹奖;

Dannid Quillen 获得1978年菲尔兹奖.

上面这些事实足以说明数学竞赛教育确实具有良好的发现人才、培养人才的功能,是引导具有数学天赋的青少年步入科学殿堂的阶梯,是发现和培养新一代学者和科技人才的重要手段.连任两届IMO主席的全苏数理化奥林匹克中心委员会主席、苏联科学院通信院士雅科夫列夫教授说:“现在参赛的学生,10年后将成为世界上握着知识、智慧金钥匙的劳动者,未来属于他们.”

和奥运会不同的是,IMO绝不是找出“世界上最优秀的数学家”,而是强调参与精神,希望借以鼓励更多的有数学才能的青少年成长.这是一项十分广泛的群众性活动^①.

这也正如陶哲轩在致中国的数学奥林匹克活动爱好者的一封信中所说的:

“我很高兴自己有参加中学数学竞赛的经历(这个经历要追溯至20世纪80年代了!),与一群兴趣相同、水平相当的人一起竞赛,就像学校里任何其他的体育赛事一样,而且参加奥赛还可以有机会去国内外旅行,这种经历我想对所有的中学生强力推荐.”

数学竞赛还证明一点:数学并不只是分数和考试.但是数学竞赛同数学学习或者数学研究又迥然不同.比如说,你不要指望在研究生学习阶段所遇到的问题会像奥数问题一样单纯.(尽管受过奥数训练的人也许能很快完成解题的一些步骤.但是大部分解题步骤可能还是得经过阅读文献、运用已知技巧、尝试例题或特例、寻找反例等这样更需要耐心、更冗长的过程.)

此外,你在做奥数题时所学到的这种“传统”数学(例如,欧几里得几何、初等数论,等等).看起来可能迥异于你在本科生和研究生阶段所学习的“现代”数学.虽然当你稍稍深入研究下去,你会发觉传统数学其实依旧陷含于现代数学的基础之中.例如,欧氏几何学的传统定理提供了绝佳范例,开现代代数几何或微分几何之先河;同样,传统数论则为近世代数和数论之先端,等等诸如此类.所以,在学习现代数学时,你得做好准备要大大改变你的数学视角.(但组合数学领域可能是一个例外,该领域还是有很多内容接近其传统根源,但这一块也在不断改变.)

① 朱华伟.试论数学奥林匹克的教育价值[J].数学教育学报.2007(2):12-15.

总而言之:要享受这些竞赛的乐趣,但不要忽视了你们数学教育中更为“枯燥”的内容,因为这些内容最终会显得更有用途.

附 陶哲轩致中国奥数爱好者的信:

To Chinese International Math Olympiad Enthusiasts:

I greatly enjoyed my experiences with high school mathematics competitions (all the way back in the 1980!). Like any other school sporting event, there is a certain level of excitement in participating with peers with similar interests and talents in a competitive activity. At the olympiad levels, there is also the opportunity to travel nationally and internationally, which is an experience I strongly recommend for all high-school students.

Mathematics competitions also demonstrate that mathematics is not just about grades and exams. But mathematical competitions are very different activities from mathematical learning or mathematical research; don't expect the problems you get in, say, graduate study, to have the same cut-and-dried, neat flavour that an Olympiad problem does. (While individual steps in the solution might be able to be finished off quickly by someone with Olympiad training, the majority of the solution is likely to require instead the much more patient and lengthy process of reading the literature, applying known techniques, trying model problems or special cases, looking for counterexamples, and so forth.)

Also, the “classical” type of mathematics you learn while doing Olympiad problems (e. g. Euclidean geometry, elementary number theory, etc.) can seem dramatically different from the “modern” mathematics you learn in undergraduate and graduate school, though if you dig a little deeper you will see that the classical is still hidden within the foundation of the modern. For instance, classical theorems in Euclidean geometry provide excellent examples to inform modern algebraic or differential geometry, while classical number theory similarly informs modern algebra and number theory, and so forth. So be prepared for a significant change in mathematical perspective when one studies the modern aspects of the subject. (One exception to this is perhaps the field of combinatorics, which still has large areas which closely resemble its classical roots, though this is changing also.) In summary: enjoy these competitions, but don't neglect the more “boring” aspects of your mathematical education, as those turn out to be ultimately more useful.



陶哲轩 IMO 三次奖牌获得者, 获得金牌年龄最小的一位, 31 岁获得国际数学最高奖——菲尔兹奖。现为美国洛杉矶加利福尼亚大学教授。

Terence Tao 陶哲轩
James and Carol Collins Professor of Math
University of California Los Angeles
<http://terrytao.wordpress.com/>

1.2 数学竞赛活动有利于激发学生形成 锲而不舍的钻研精神和科学态度

数学竞赛活动强化了能力培养的教育导向,培养了学生开拓探索型的智力和能力. 数学教育中,能力的培养早已引起重视,而数学竞赛的崛起更强化了这种教育导向. 开拓探索型的智力和能力依赖于开拓探究型思维习惯的养成和开拓探究型思维方法的掌握,竞赛数学的内容是以研究解决问题为主的开拓探究型认知体系,要求人们注重智力的开发与能力的发展.

数学竞赛内容从本质上激发了学生对科学的浓厚兴趣. 兴趣是事业成功的起点和动力,兴趣是成就事业的沃土. 数学竞赛题从结构到解法都充满着艺术的魅力和诱人的趣味,它吸引人们去进行积极的探索,而在探索中又亲自体验到数学思想的智慧光辉和数学方法的创造力量,更进一步产生向往感. 数学竞赛采用“问题与解答”的方式,具有公开的竞争性,使它具有良好而鲜明的激励功能.

例1 (2014年全国初中数学联赛试题) 设 n 为整数. 若存在整数 x, y, z 满足 $n = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, 则称 n 具有性质 P .

A卷: 在 1, 5, 2 013, 2 014 这四个数中, 哪些数具有性质 P , 哪些数不具有性质 P ? 说明理由.

B卷: (1) 试判断 1, 2, 3 是否具有性质 P ;

(2) 在 1, 2, \dots , 2 014 这 2 014 个连续整数中, 不具有性质 P 的数有多少个?

解析 **A卷:** 取 $x = 1, y = z = 0$, 得

$$1 = 1^3 + 0^3 + 0^3 - 3 \times 1 \times 0 \times 0$$

于是, 1 具有性质 P .

取 $x = y = 2, z = 1$, 得

$$5 = 2^3 + 2^3 + 1^3 - 3 \times 2 \times 2 \times 1$$

因此, 5 具有性质 P .

接下来考虑具有性质 P 的数.

记 $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, 则

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x+y)^3 + z^3 - 3xy(x+y) - 3xyz \\ &= (x+y+z)^3 - 3z(x+y)(x+y+z) - 3xy(x+y+z) \\ &= (x+y+z)^3 - 3(x+y+z)(xy+yz+zx) \\ &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2 - xy - yz - zx) \\ &= \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]$$

不妨设 $x \geq y \geq z$.

若 $x - y = 1, y - z = 0, x - z = 1$, 即