

 世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

高等数学（下册）

学习辅导与习题解答

（理工类·第五版）

◎ 吴赣昌 主编

 中国人民大学出版社



主要特色

- ◆学习空间——登录网络学习空间，可与来自全国的良好益友交流互动
- ◆学习系统——与教材配套建设的交互式多媒体在线学习系统为您的高效学习奠定基础
- ◆教学系统——为教师用户专门建设并免费提供与教材配套的多媒体教学软件
- ◆课程平台——为院校单位用户建设了大学数学网络学习平台
- ◆教学服务——有一支专业专职的作者团队为您提供日常的教学服务与技术支持

配套服务

(1) 选用“21世纪数学教育信息化精品教材”的所有数学教师均可免费获得相应教材的“大学数学多媒体教学系统”；

(2) 教材达到一定使用量的院校可与作者团队联系，免费安装相应课程的“大学数学网络学习平台”的基本模块，并可进一步选装题库模块与在线测试模块；

(3) 需要进一步了解本系列教材及其信息化配套建设详情与动态的用户，请登录数苑网“大学数学立体化教材”栏目 (www.sciyard.com/dxsx) 查询。

咨询方式

联系部门：中国人民大学出版社编辑部

联系人：翟然 李丽娜

联系电话：010-62511967, 010-62514545

电子邮箱：zhair@crup.com.cn

投稿邮箱：lilina_35@126.com

技术支持

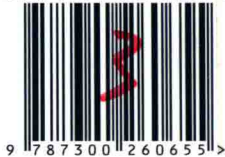
联系部门：作者团队

技术支持：数苑网在线客服 (www.sciyard.com)

联系电话：0757-81019230, 0757-81019231

- ◎策划编辑 李丽娜 潘旭燕
- ◎责任编辑 王美玲
- ◎封面制作 许晶晶

ISBN 978-7-300-26065-5



9 787300 260655 >

定价：42.00元

21 世纪数学教育信息化精品教材



大学数学立体化教材

高等数学（下册）

学习辅导与习题解答

（理工类·第五版）

◎ 吴赣昌 主编

中国人民大学出版社
·北京·

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学 (理工类·第五版) (下册) 学习辅导与习题解答 / 吴赣昌主编.
—北京: 中国人民大学出版社, 2018. 9

21 世纪数学教育信息化精品教材. 大学数学立体化教材

ISBN 978-7-300-26065-5

I. ①高… II. ①吴… III. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 186196 号

21 世纪数学教育信息化精品教材
大学数学立体化教材
高等数学 (下册) 学习辅导与习题解答
(理工类·第五版)

吴赣昌 主编

Gaodeng Shuxue (Xiace) Xuexi Fudao yu Xiti Jieda

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)	010-62511770 (质管部)	
	010-82501766 (邮购部)	010-62514148 (门市部)	
	010-62515195 (发行公司)	010-62515275 (盗版举报)	
网 址	http://www.crup.com.cn http://www.ttrnet.com (人大教研网)		
经 销	新华书店		
印 刷	涿州市星河印刷有限公司		
规 格	148 mm×210 mm 32 开本	版 次	2018 年 9 月第 1 版
印 张	13.75	印 次	2018 年 9 月第 1 次印刷
字 数	521 000	定 价	42.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

前 言

人大版“21世纪数学教育信息化精品教材”（吴赣昌主编）是融纸质教材、教学软件与网络服务于一体的创新型“立体化教材”。教材自出版以来，历经多次升级改版，已形成了独特的立体化与信息化的建设体系，更加适应我国大众化教育在新时代的教育改革要求，受到全国广大师生的好评，迄今已被全国600余所高等院校广泛采用。

作者本次启动的“大学数学立体化教材”（第五版）的改版工作，旨在充分利用移动互联网、移动终端设备与相关信息技术软件，为教材用户提供更优质的学习内容、实验案例与交互环境。

作者本次关于“大学数学立体化教材”（第五版）的改版具体包括：面向普通本科院校的“理工类·第五版”、“经管类·第五版”与“纯文科类·第四版”；面向普通本科少学时或三本院校的“理工类·简明版·第五版”与“经管类·简明版·第五版”；面向专升本或高职本科的“综合类·应用型本科版”；面向高职高专院校的“理工类·高职高专版·第四版”、“经管类·高职高专版·第四版”与“综合类·高职高专版·第三版”。

本次改版的指导思想：为帮助教材用户更好地理解教材中重要的概念、定理、方法及其应用，设计了大量相应的数学实验，包括数值计算实验、函数计算实验、符号计算实验、2D函数图形实验、3D函数图形实验、矩阵运算实验、随机数生成实验、统计分布实验、线性回归实验、数学建模实验等。与教材正文所举示例相比，这些实验设计的复杂程度更高、数据规模更大、实用意义也更大。本系列教材于2017年改版修订的各个版本均包含了针对相应课程内容的数学实验。其中，大部分实验都在教材内容页面上提供了对应的二维码，用户通过微信扫码功能扫描指定的二维码即可进行相应的数学实验，而完整的数学实验内容则呈现在教材配套的网络学习空间中。

为方便同学们使用最新版“大学数学立体化教材”，学好大学数学，作者团队建设与该系列教材同步配套的“学习辅导与习题解答”。该系列教辅书均根据教材章节顺序建设了相应的学习辅导内容，其中每一节的设计中包括了该节的主要知识归纳、典型例题分析与习题解答等内容，而每一章的设计中包括了

该章的教学基本要求、知识点网络图、题型分析与总习题解答。上述设计有助于学生在课后自主研读这些教辅书时，更好更快地掌握所学知识，从而在较短时间内取得好成绩。

在大学数学的学习过程中，要主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变，不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了。事实上，你需要在课后花更多时间主动去做相关训练，才能真正掌握所学知识。而在课后的自学与练习过程中，首先要认真、反复地阅读教材，真正掌握大学数学的基本概念；在做习题时，你应先尝试独立完成习题，尽量不看答案，做完习题后，再参考本书进行分析和比较，这样便于发现哪些知识自己还没有真正理解。

与传统的教材与教辅建设缺乏教学互动不同的是，我们有一支实力雄厚、专业专职的作者团队，通过数苑网（www.sciyard.com）为本系列教材的用户提供在线学习服务。另外，用户还可扫描下方二维码并关注“数苑”公众号，通过在线学习栏目获得相关在线服务。



吴赣昌

2018年2月26日

目 录

第 8 章 空间解析几何与向量代数	1
§ 8.1 向量及其线性运算	1
§ 8.2 空间直角坐标系 向量的坐标	4
§ 8.3 数量积 向量积 *混合积	10
§ 8.4 曲面及其方程	16
§ 8.5 空间曲线及其方程	20
§ 8.6 平面及其方程	25
§ 8.7 空间直线及其方程	31
§ 8.8 二次曲面	38
本章小结	43
第 9 章 多元函数微分学	68
§ 9.1 多元函数的基本概念	68
§ 9.2 偏导数	77
§ 9.3 全微分及其应用	82
§ 9.4 复合函数微分法	88
§ 9.5 隐函数微分法	95
§ 9.6 微分法在几何上的应用	101
§ 9.7 方向导数与梯度	108
§ 9.8 多元函数的极值	113
本章小结	123
第 10 章 重积分	155
§ 10.1 二重积分的概念与性质	155
§ 10.2 二重积分的计算 (一)	160
§ 10.3 二重积分的计算 (二)	171

§ 10.4 三重积分(一)	182
§ 10.5 三重积分(二)	188
本章小结	199
第 11 章 曲线积分与曲面积分	233
§ 11.1 第一类曲线积分	233
§ 11.2 第二类曲线积分	240
§ 11.3 格林公式及其应用	248
§ 11.4 第一类曲面积分	260
§ 11.5 第二类曲面积分	269
§ 11.6 高斯公式 通量与散度	275
§ 11.7 斯托克斯公式 环流量与旋度	282
本章小结	290
第 12 章 无穷级数	324
§ 12.1 常数项级数的概念和性质	325
§ 12.2 正项级数的判别法	335
§ 12.3 一般常数项级数	346
§ 12.4 幂级数	353
§ 12.5 函数展开成幂级数	365
§ 12.6 幂级数的应用	372
§ 12.7 函数项级数的一致收敛性	377
§ 12.8 傅里叶级数	384
§ 12.9 一般周期函数的傅里叶级数	397
本章小结	402

第 8 章 空间解析几何与向量代数

本章中我们先介绍向量的概念及向量的某些运算,然后再介绍空间解析几何,其主要内容包括平面和直线方程、一些常用的空间曲线和曲面的方程以及关于它们的某些基本问题.这些方程的建立和问题的解决是以向量作为工具的.正像平面解析几何的知识对于学习一元函数微积分是不可缺少的一样,本章的内容对以后学习多元函数的微分学和积分学将起到重要作用.

本章教学基本要求:

1. 理解空间直角坐标系,理解向量的概念及其表示;
2. 掌握向量的运算(线性运算、数量积、向量积、混合积),了解两个向量垂直与平行的条件;
3. 掌握单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式及其运算;
4. 掌握平面方程和直线方程及其求法,会利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题;
5. 理解曲线方程的概念,了解常用二次曲面的方程及其图形,会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程;
6. 了解空间曲线的参数方程和一般方程;
7. 了解空间曲线在坐标平面上的投影,并会求其方程。

§ 8.1 向量及其线性运算

一、主要知识归纳

主要知识归纳见表 8-1-1 和表 8-1-2.

表 8-1-1 向量的有关概念

定义	既有大小又有方向的量称为向量.
表示	用空间有向线段来表示向量, $\overrightarrow{M_1M_2}$ 表示以 M_1 为起点、 M_2 为终点的向量, 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段所指方向表示向量的方向.
自由向量	与起点位置无关而只考察其大小和方向的向量.
向量相等	大小与方向都相同的向量, 记为 $a=b$.
向量的模	向量的大小即有向线段的长度称为向量的模, 记为 $ a $.

单位向量	模等于1的向量称为单位向量.
零向量	模等于0的向量称为零向量, 零向量的方向是任意的.
平行向量	方向相同或相反的两个向量, 即两有向线段平行, 则称两向量平行或共线, 记为 $a \parallel b$.
方向角	非零向量 a 与坐标轴的三个夹角 α, β, γ 称为向量 a 的方向角.
方向余弦	非零向量 a 的方向角 α, β, γ 的余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为 a 的方向余弦.
负向量	设 a 为非零向量, 则与 a 大小相同且方向相反的向量称为 a 的负向量, 记为 $-a$.

表 8-1-2 向量的线性运算及性质

加减运算	设 a 与 b 为两个向量, 使 b 的起点与 a 的终点重合, 则以 a 的起点为起点, 以 b 的终点为终点所构成的新的向量称为 a 与 b 的和向量, 记为 $a+b$, 而 $a-b=a+(-b)$.
数乘运算	设 a 为向量, λ 为一实数, 则 λa 为一新的向量, 它的模为 $ \lambda a = \lambda a $; 方向如下规定: 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 方向一致; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 方向相反; 当 $\lambda = 0$ 时, λa 为零向量.
性质	(1) $a+b=b+a$; (2) $(a+b)+c=a+(b+c)$; (3) $\lambda(ua) = u(\lambda a) = (\lambda u)a$; (4) $(\lambda+u)a = \lambda a + ua$, $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$. 设 a 为非零向量, 则 $b \parallel a \Leftrightarrow$ 存在实数 λ , 使 $b = \lambda a$.

二、典型例题分析

例1 设线段 AB 被 P_1, P_2, P_3, P_4 依次分为5等份, 已知 $P_2(2, -2, 2)$, $P_4(-2, 4, -8)$, 求点 A 及点 B 的坐标.

解 根据题意, 可得: $\frac{\overrightarrow{P_2A}}{\overrightarrow{AP_4}} = -\frac{1}{2}$, $\frac{\overrightarrow{P_2B}}{\overrightarrow{BP_4}} = -3$, 分别设点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, 则有

$$\frac{2-x_1}{x_1-(-2)} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{-2-y_1}{y_1-4} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{2-z_1}{z_1-(-8)} = -\frac{1}{2},$$

解得 $x_1=6, y_1=-8, z_1=12$;

同理可建立方程 $\frac{2-x_2}{x_2-(-2)} = \frac{-2-y_2}{y_2-4} = \frac{2-z_2}{z_2-(-8)} = -3$,

解得 $x_2=-4, y_2=7, z_2=-13$

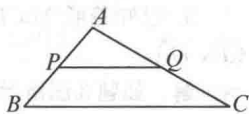
故 $A(6, -8, 12), B(-4, 7, -13)$.

小结: 本例也可以利用两点间的距离公式求解. 利用向量的关系进行求解或证明时, 一定要注意向量的方向, 对应地, 它在数值上表现为正负号.

例 2 利用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边.

证 如例 2 图所示, 设 P, Q 分别为 $\triangle ABC$ 的两边 AB, AC 的中点, 则

$$\overrightarrow{PA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$



例 2 图

且

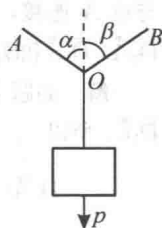
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

所以

$$\overrightarrow{PQ} // \overrightarrow{BC}.$$

例 3 重力为 p 的重物用绳索挂在 A, B 两个钉子上, 如例 3 图所示. 设 $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, 求 A, B 所受的拉力 f_1, f_2 .

解 根据质点 O 在水平方向和垂直方向上的受力平衡知: 在水平方向上, 质点 O 受到钉子 A 的拉力的大小为 $f_1 \sin\alpha$ 的水平向左的分力和钉子 B 对质点 O 的拉力的水平向右的分力 $f_2 \sin\beta$; 在竖直方向上, 竖直向上的力为钉子 A, B 对质点 O 的拉力的竖直向上的分力, 分别为 $f_1 \cos\alpha$ 和 $f_2 \cos\beta$, 竖直向下的力为重力 p . 则



例 3 图

$$\begin{cases} f_1 \cos\alpha + f_2 \cos\beta = p \\ f_1 \sin\alpha - f_2 \sin\beta = 0 \end{cases}, \quad \text{即} \begin{cases} \frac{12}{13}f_1 + \frac{4}{5}f_2 = p \\ \frac{5}{13}f_1 - \frac{3}{5}f_2 = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \quad f_1 = \frac{39}{56}p, \quad f_2 = \frac{25}{56}p.$$

小结: 本例运用了力的平行四边形分解原理, 这与平行四边形合成原理互逆.

三、习题 8-1 解答

1. 填空:

(1) 要使非零向量 a, b 满足 $|a+b| = |a-b|$, 向量 a, b 应满足_____;

(2) 要使非零向量 a, b 满足 $|a+b| = |a| + |b|$, 向量 a, b 应满足_____.

解 (1) a 垂直于 b (利用平行四边形法则判断);

(2) \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 同向 (利用平行四边形法则判断).

2. 设 $\mathbf{u} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$. 试用 \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} 表示向量 $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

解 $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} = 2(\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}) - 3(-\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 5\mathbf{a} - 11\mathbf{b} + 7\mathbf{c}$.

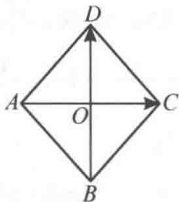
3. 已知菱形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b}$, 试用向量 \mathbf{a} , \mathbf{b} 表示 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{DA} .

解 如题 3 图所示, 利用平行四边形法则.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}),$$

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}),$$

同理, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{a})$.



题 3 图

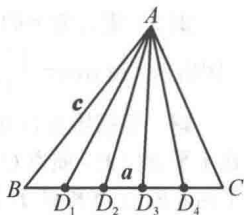
4. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分, 设分点依次为 D_1, D_2, D_3, D_4 , 再把各分点与点 A 连接, 试以 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{D_2A}$, $\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

解 如题 4 图所示, $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{D_1D_2} = \overrightarrow{D_2D_3} = \overrightarrow{D_3D_4} = \overrightarrow{D_4C}$, 所以

$$\overrightarrow{D_1A} = \overrightarrow{D_1B} + \overrightarrow{BA} = -\frac{\mathbf{a}}{5} - \mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{D_2A} = \overrightarrow{D_2B} + \overrightarrow{BA} = -\frac{2}{5}\mathbf{a} - \mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{D_3A} = \overrightarrow{D_3B} + \overrightarrow{BA} = -\frac{3}{5}\mathbf{a} - \mathbf{c}, \quad \overrightarrow{D_4A} = \overrightarrow{D_4B} + \overrightarrow{BA} = -\frac{4}{5}\mathbf{a} - \mathbf{c}.$$



题 4 图

§ 8.2 空间直角坐标系 向量的坐标

一、主要知识归纳

主要知识归纳见表 8-2-1 和表 8-2-2.

表 8-2-1

空间直角坐标系的概念

坐标系	过空间一定点 O , 按右手规则作三条相互垂直的数轴: x 轴 (横轴)、 y 轴 (纵轴)、 z 轴 (竖轴), 这样的三条坐标轴称为一个空间直角坐标系, 点 O 称为坐标原点.
坐标面	由 x 轴与 y 轴确定的平面称为 xOy 坐标面; 由 y 轴与 z 轴确定的平面称为 yOz 坐标面; 由 x 轴与 z 轴确定的平面称为 xOz 坐标面.

卦限	三个坐标面将空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限，分别称为第 I 至第 VIII 卦限。
点的坐标	空间上任意点 M 在三条坐标轴上的投影 P, Q, R 在各自轴上的坐标记为 x, y, z ，则点 M 与有序数组 (x, y, z) 建立了一一对应关系，称 (x, y, z) 为点 M 的坐标，点 M 称为以 (x, y, z) 为坐标的点。
距离公式	<p>设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点，则 M_1 与 M_2 之间的距离为</p> $d = M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$

表 8-2-2 向量的坐标表示

向量的坐标	<p>设向量 \mathbf{a} 在三条坐标轴 x 轴, y 轴, z 轴上的投影分别为 a_x, a_y, a_z，则 \mathbf{a} 与有序数组 $\{a_x, a_y, a_z\}$ 建立了一一对应关系，称有序数组 $\{a_x, a_y, a_z\}$ 为向量 \mathbf{a} 的坐标，并记为</p> $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\} \text{ 或 } (a_x, a_y, a_z),$ <p>这称为向量的坐标表示式。</p>
坐标表示	<p>设 $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$，则</p> <p>(1) $\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}$;</p> <p>(2) $\lambda \mathbf{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$.</p>
向量的模与方向余弦	<p>设 $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$，$\mathbf{a}$ 的方向角为 α, β, γ，则</p> <p>(1) $\mathbf{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$;</p> <p>(2) $a_x = \mathbf{a} \cos \alpha, a_y = \mathbf{a} \cos \beta, a_z = \mathbf{a} \cos \gamma$;</p> <p>(3) 当 $\mathbf{a} \neq 0$ 时，</p> $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos \gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \end{cases}.$ <p>当 $\mathbf{a} \neq 0$ 时，与 \mathbf{a} 同方向的单位向量为</p> $\mathbf{a}^\circ = \frac{\mathbf{a}}{ \mathbf{a} } = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}.$
向量在轴上的投影	<p>设向量 \mathbf{a} 与 u 轴的夹角为 φ，则 $\mathbf{a} \cos \varphi$ 称为向量 \mathbf{a} 在 u 轴上的投影，记为 \mathbf{a}_u 或 $\text{Prj}_u \mathbf{a}$，即</p> $\mathbf{a}_u = \text{Prj}_u \mathbf{a} = \mathbf{a} \cos \varphi.$

二、典型例题分析

例 1 设点 A 位于第 I 卦限，向径 \vec{OA} 与 x 轴、 y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$ ，且 $|\vec{OA}| = 6$ ，求点 A 的坐标。

解 令 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$. 由关系式 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, 得

$$\cos^2\gamma = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

因点 A 在第 I 卦限, 知 $\cos\gamma > 0$, 故

$$\cos\gamma = \frac{1}{2}.$$

于是 $\vec{OA} = |\vec{OA}| \mathbf{e}_{\vec{OA}} = 6 \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right\} = \{3, 3\sqrt{2}, 3\}$,

故点 A 的坐标为 $(3, 3\sqrt{2}, 3)$.

小结: 一个向量 \mathbf{r} 的方向余弦 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 刻画了此向量的方向, 并且向量 \mathbf{r} 分别与方向余弦 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 的乘积即向量 \mathbf{r} 在空间直角坐标系中的坐标, 也即向量 \mathbf{r} 分别在 x 轴, y 轴, z 轴上的投影, 另外, 方向余弦还有一个重要性质:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

例 2 从点 $A(2, -1, 7)$ 沿向量 $\mathbf{a} = \{8, 9, -12\}$ 方向取长为 34 的线段 AB, 求点 B 的坐标.

解 设点 B 的坐标为 (x, y, z) , 则

$$\vec{AB} = \{x-2, y+1, z-7\},$$

且 $\vec{AB} = \lambda \mathbf{a}$, 即

$$x-2=8\lambda, y+1=9\lambda, z-7=-12\lambda,$$

$$34 = |\vec{AB}| = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(8\lambda)^2 + (9\lambda)^2 + (-12\lambda)^2}$$

从而 $\lambda = 2$,

所以点 B 的坐标为 $\{18, 17, -17\}$.

小结: 两向量方向相同, 表明两向量满足数乘关系, 即两向量的对应分坐标成比例.

三、习题 8-2 解答

1. 在空间直角坐标系中, 指出下列各点在哪个卦限:

$$A(2, -2, 3); \quad B(3, 3, -5); \quad C(3, -2, -4); \quad D(-4, -3, 2).$$

解 想象各点及各卦限在空间中的位置, 易知上列各点依次在第 IV, V, VIII, III 卦限.

2. 在坐标面上和坐标轴上的点的坐标各有什么特征? 并指出下列各点的位

置:

$A(2, 3, 0); B(0, 3, 2); C(2, 0, 0); D(0, -2, 0)$.

解 在 xOy 、 yOz 、 zOx 坐标面上的点的坐标中有一个为零, 依次是 $z=0$, $x=0$ 与 $y=0$; 在 x 、 y 、 z 轴上点的坐标中有两个坐标为零, 依次为 $y=z=0$, $x=z=0$ 与 $x=y=0$.

本题所给四点依次在 xOy 面上, yOz 面上, x 轴上, y 轴上.

3. 求点 (a, b, c) 关于 (1) 各坐标面; (2) 各坐标轴; (3) 坐标原点的对称点的坐标.

解 (1) 关于坐标平面的对称点的坐标, 只需将原坐标中的一个坐标改为相反数, 使得两对称点的连线垂直于该坐标平面.

点 (a, b, c) 关于 xOy 、 yOz 、 zOx 面的对称点依次是 $(a, b, -c)$, $(-a, b, c)$, $(a, -b, c)$.

(2) 关于各坐标轴的对称点, 可看成连续对两个坐标面施行了对称变换的结果, 由 (1) 知, 这时需将原三个坐标中的两个改成相反数.

点 (a, b, c) 关于 x 、 y 、 z 轴的对称点依次是 $(a, -b, -c)$, $(-a, b, -c)$, $(-a, -b, c)$.

(3) 关于原点的对称点的坐标, 则需把原坐标的三个数都改成相反数, (a, b, c) 关于原点的对称点的坐标是 $(-a, -b, -c)$.

4. 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面, 问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

解 过点 P_0 且平行于 z 轴的直线上的点的坐标为 (x_0, y_0, z) , 即前两个坐标与 P_0 的坐标相同, 而第三个坐标换成流动坐标 $z \in \mathbf{R}$.

过点 P_0 且平行于 xOy 面的平面上点的坐标为 (x, y, z_0) , 即与 P_0 的第三个坐标相同, 而前两个坐标应换为流动坐标.

5. 求点 $M(5, -3, 4)$ 到各坐标轴的距离.

解 由点 M 向各坐标轴作垂线, 其垂足依次为 $N_1(5, 0, 0)$, $N_2(0, -3, 0)$, $N_3(0, 0, 4)$. 因此 M 到各坐标轴的距离依次为

$$d_x = |N_1M| = \sqrt{0 + (-3)^2 + 4^2} = 5;$$

$$d_y = |N_2M| = \sqrt{5^2 + 0 + 4^2} = \sqrt{41};$$

$$d_z = |N_3M| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 0} = \sqrt{34}.$$

6. 在 yOz 面上, 求与三点 $A(3, 1, 2)$, $B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

解 设该点为 $M(x, y, z)$, 因为 $M \in yOz$, 所以 $x=0$, 故该点的坐标为 $M(0, y, z)$, 而 $|MA| = |MB|$, 即

$$(0-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (0-4)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2,$$

整理得 $3y+4z=-5$;

①

同理, 由 $|MA|=|MC|$, 得

$$9+(y-1)^2+(z-2)^2=0+(y-5)^2+(z-1)^2,$$

即 $4y-z=6$;

②

将式①与式②联立, 解方程组, 得 $y=1, z=-2$, 故所求点为 $(0, 1, -2)$.

7. 设 P, Q 两点的向径分别为 r_1, r_2 , 点 R 在线段 PQ 上, 且 $\frac{|PR|}{|RQ|} = \frac{m}{n}$,

证明点 R 的向径为 $r = \frac{nr_1 + mr_2}{m+n}$.

证 如题 7 图所示, 利用平行四边形法则, $\overrightarrow{RQ} = r_2 - r$, $\overrightarrow{PR} = r - r_1$, 由 $\frac{|PR|}{|RQ|} = \frac{m}{n}$, 且 P, R, Q 共线,

所以 $\overrightarrow{PR} = \frac{m}{n}\overrightarrow{RQ}$,

即 $r - r_1 = \frac{m}{n}(r_2 - r) \Rightarrow r = \frac{nr_1 + mr_2}{m+n}$. 得证.

8. 已知两点 $M_1(0, 1, 2)$ 和 $M_2(1, -1, 0)$, 试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{1-0, -1-1, 0-2\} = \{1, -2, -2\}$;

$$-2\overrightarrow{M_1M_2} = -2\{1, -2, -2\} = \{-2, 4, 4\}.$$

9. 求平行于向量 $a = \{6, 7, -6\}$ 的单位向量.

解 $|a| = \sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} = \sqrt{121} = 11$.

$$a^0 = \frac{a}{|a|} = \left\{ \frac{6}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{6}{11} \right\},$$

平行于 a 的单位向量为 a^0 或 $-a^0$, 即

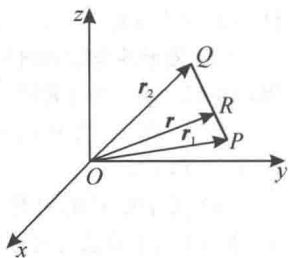
$$\left\{ \pm \frac{6}{11}, \pm \frac{7}{11}, \mp \frac{6}{11} \right\}.$$

10. 已知两点 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$ 和 $M_2(3, 0, 2)$, 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(3-4)^2 + (0-\sqrt{2})^2 + (2-1)^2} = 2$.

设 α, β, γ 为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向角, 则

$$\cos\alpha = \frac{3-4}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} = -\frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \frac{0-\sqrt{2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\gamma = \frac{2-1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} = \frac{1}{2}.$$



题 7 图

从而 $\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{3\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{3}$.

11. 已知向量 \mathbf{a} 的模为 3, 且其方向角 $\alpha = \gamma = 60^\circ, \beta = 45^\circ$, 求向量 \mathbf{a} .

解 已知向量 \mathbf{a} 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}, \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\gamma = \frac{1}{2}.$$

由于 $\cos\alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}$,

所以 $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = |\mathbf{a}| \cos\alpha \mathbf{i} + |\mathbf{a}| \cos\beta \mathbf{j} + |\mathbf{a}| \cos\gamma \mathbf{k} = \frac{3}{2}\mathbf{i} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \frac{3}{2}\mathbf{k}$.

12. 设向量 \mathbf{a} 的方向余弦分别满足

(1) $\cos\alpha = 0$; (2) $\cos\beta = 1$; (3) $\cos\alpha = \cos\beta = 0$.

问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

解 (1) 设该向量为 \mathbf{a} . 因为 $\cos\alpha = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}$, 故 $\mathbf{a} \perp Ox$ 轴, 或 $\mathbf{a} // yOz$ 面;

(2) 因为 $\cos\beta = 1$, 所以 $\beta = 0$, 故 $\mathbf{a} // Oy$ 轴且 \mathbf{a} 与 y 轴正向一致, 或 $\mathbf{a} \perp xOz$ 面并与 y 轴正向一致;

(3) 因为 $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, 所以 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, 故 $\mathbf{a} // Oz$ 轴, 或 $\mathbf{a} \perp xOy$ 面.

13. 已知 $|\mathbf{r}| = 4$, \mathbf{r} 与轴 u 的夹角是 60° , 求 $\text{Prj}_u \mathbf{r}$.

解 $\text{Prj}_u \mathbf{r} = |\mathbf{r}| \cos(u, \mathbf{r}) = |\mathbf{r}| \cos 60^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

14. 一向量的终点为点 $B(2, -1, 7)$, 它在 x 轴, y 轴和 z 轴上的投影依次为 4, -4 和 7, 求该向量的起点 A 的坐标.

解 设 $A(x, y, z)$, 则

$$\overrightarrow{AB} = \{2-x, -1-y, 7-z\}.$$

按题设, 此向量在坐标轴上的投影依次为 4, -4 和 7, 故

$$2-x=4, -1-y=-4, 7-z=7, \text{ 即 } x=-2, y=3, z=0,$$

从而所求起点为 $A(-2, 3, 0)$.

15. 求与向量 $\mathbf{a} = \{16, -15, 12\}$ 平行, 方向相反, 且长度为 75 的向量 \mathbf{b} .

解 设所求向量为 \mathbf{b} , 则

$$\mathbf{b} = -\lambda \mathbf{a} = \{-16\lambda, 15\lambda, -12\lambda\} (\lambda > 0),$$

又 $|\mathbf{b}| = 75 = \sqrt{(-16\lambda)^2 + (15\lambda)^2 + (-12\lambda)^2} = 25|\lambda| \Rightarrow \lambda = 3,$

故所求向量为 $\mathbf{b} = \{-48, 45, -36\}$.