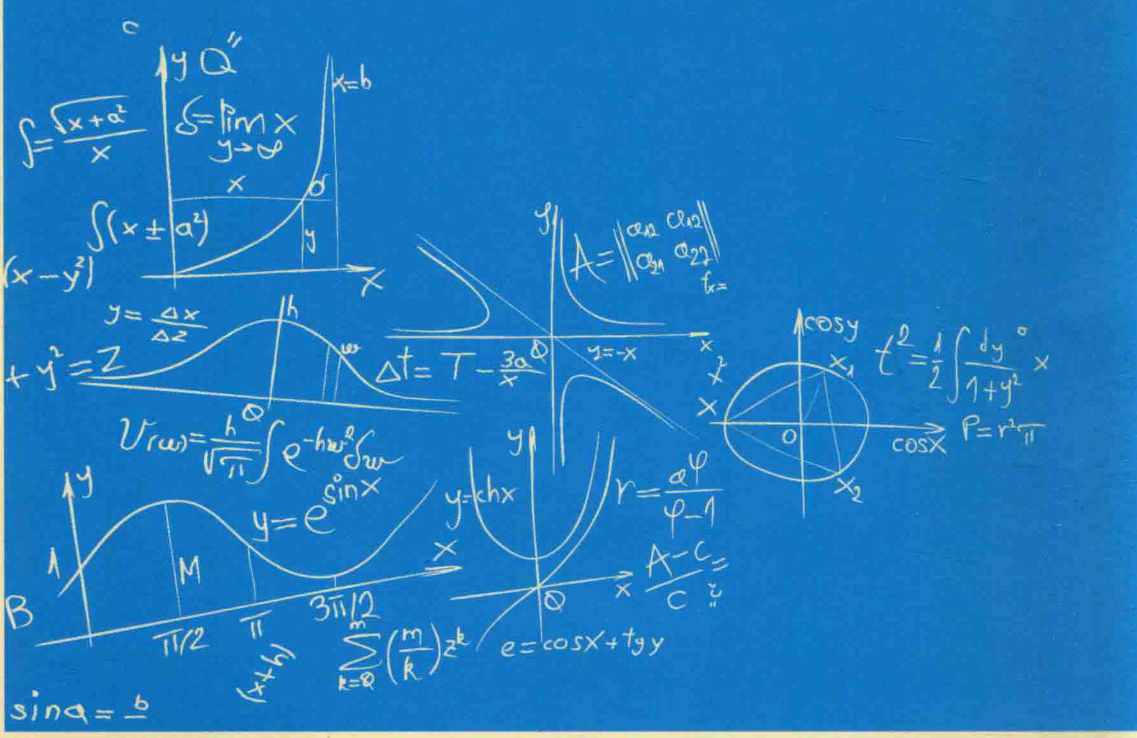
ADVANCED MATHEMATICS

高等数学

下册

张金辉　林建伟　主编



厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

ADVANCED
MATHEMATICS

高等数学 下册

主　编：张金辉　林建伟
副主编：林美琳　林永华

厦门大学出版社 XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册 / 张金辉，林建伟主编. —厦门 ：厦门大学出版社，2018.8

ISBN 978-7-5615-7039-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… ②林… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 151289 号

出 版 人 郑文礼
责任编辑 郑 丹
封面设计 蒋卓群
技术编辑 许克华

出版发行 厦门大学出版社
社　　址 厦门市软件园二期望海路 39 号
邮政编码 361008
总 编 办 0592-2182177 0592-2181406(传真)
营销中心 0592-2184458 0592-2181365
网　　址 http://www.xmupress.com
邮　　箱 xmup@xmupress.com
印　　刷 三明市华光印务有限公司

开本 787 mm×1 092 mm 1/16
印张 12.5
字数 306 千字
版次 2018 年 8 月第 1 版
印次 2018 年 8 月第 1 次印刷
定价 37.00 元

厦门大学出版社
微信二维码

厦门大学出版社
微博二维码

前　言

为了推进高等数学教学改革，充分体现基础课以应用为目的，编者根据教育部最新制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，在广泛调查研究的基础上，借鉴当前的教学实践和教改成果，组织编写了本书，以满足普通高等学校理工类专业高等数学课程教学的需要.本书可作为高等院校各相关专业数学课程的教材，也可作为相关工程人员及数学爱好者的阅读参考用书.

本书分为上、下两册.上册主要内容包括函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程等.下册主要内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等.本书内容丰富，叙述清楚、透彻，逻辑严谨.

本册由张金辉、林建伟主编.具体编写分工如下：林永华编写第8、12章；张金辉编写第9、10章；林美琳编写第11章.

本书在编写过程中，参考了其他作者的相关内容，并得到了许多专家的大力支持与帮助，在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，成书仓促，书中难免会存在错漏之处，敬请专家和读者批评指正，以帮助我们不断改进.

编者

2018年5月

目　录

第8章　向量代数与空间解析几何

解析几何的基本思想是用代数的方法来研究几何的问题，为了把代数运算引入几何中来，最根本的做法就是设法把空间的几何结构有系统地代数化、数量化.平面解析几何使一元函数微积分有了直观的几何意义，所以为了更好地学习多元函数微积分，空间解析几何的知识就有着非常重要的地位.

本章首先给出空间直角坐标系，然后介绍向量的基础知识，以向量为工具讨论空间的平面和直线，最后介绍空间曲面和空间曲线的部分内容.

8.1　空间直角坐标系

8.1.1　空间直角坐标系

用代数的方法来研究几何的问题，我们需要建立空间的点与有序数组之间的联系，为此我们通过引进空间直角坐标系来实现.

1. 空间直角坐标系

过定点 O，作三条互相垂直的数轴，这三条数轴分别叫作 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），它们都以 O 为原点且具有相同的长度单位.通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线；它们的正方向要符合右手规则：右手握住 z 轴，当右手的四指从 x 轴的正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 角度指向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，这样就建立了一个空间直角坐标系（图 8-1），称为 ***Oxyz* 直角坐标系**，点 ***O*** 叫作**坐标原点**.

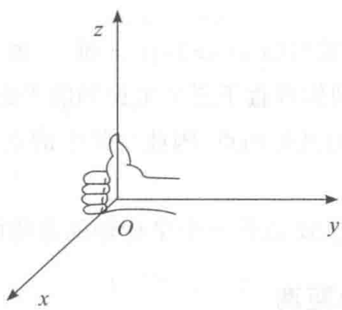


图 8-1

在 $Oxyz$ 直角坐标系下，数轴 Ox，Oy，Oz 统称为坐标轴，三条坐标轴中每两条可以确定

一个平面,称为坐标面,分别为 xOy,yOz,zOx,三个坐标平面将空间分为八个部分,每一部分叫作一个卦限(图 8-2),分别用 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 表示.

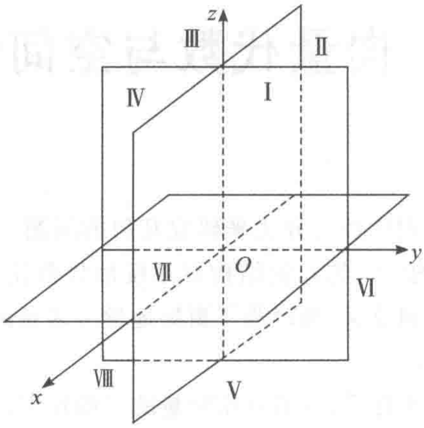


图 8-2

2. 空间点的直角坐标

设 M 为空间中的任一点,过点 M 分别作垂直于三个坐标轴的三个平面,与 x 轴、y 轴和 z 轴依次交于 A、B、C 三点,若这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x,y,z,于是点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x,y,z),则称该数组 (x,y,z) 为点 M 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的**坐标**,如图 8-3 所示. x,y,z 分别称为点 M 的**横坐标、纵坐标和竖坐标**.

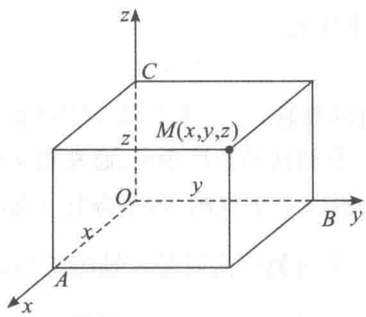


图 8-3

反之,若任意给定一个有序数组 (x,y,z),在 x 轴、y 轴、z 轴上分别取坐标为 x,y,z 的三个点 A、B、C,过这三个点分别作垂直于三个坐标轴的平面,这三个平面只有一个交点 M,该点就是以有序数组 (x,y,z) 为坐标的点,因此空间中的点 M 就与有序数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应的关系.

注:A、B、C 这三点正好是过 M 点作三个坐标轴的垂线的垂足.

8.1.2 空间中两点之间的距离

设两点 $M(x_1,y_1,z_1)$,$N(x_2,y_2,z_2)$,则 M 与 N 之间的距离为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{8-1}$$

事实上，过点 M 和 N 作垂直于 xOy 平面的直线，分别交 xOy 平面于点 M_1 和 N_1，则 $MM_1 \parallel NN_1$，显然，点 M_1 的坐标为 $(x_1, y_1, 0)$，点 N_1 的坐标为 $(x_2, y_2, 0)$（如图 8-4）.

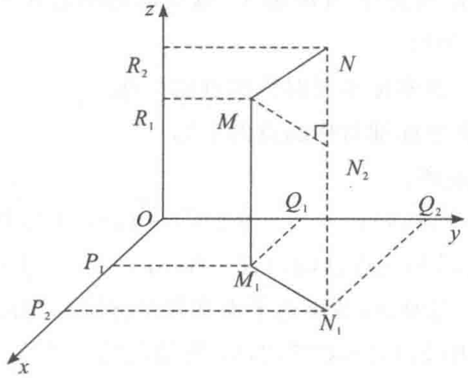


图 8-4

由平面解析几何的两点间距离公式知，M_1 和 N_1 的距离为：

$$|M_1N_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

过点 M 作平行于 xOy 平面的平面，交直线 NN_1 于 N_2，则 $M_1N_1 \parallel MN_2$，因此 N_2 的坐标为 (x_2, y_2, z_1)，且

$$|MN_2| = |M_1N_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

在直角三角形 MN_2N 中，

$$|N_2N| = |z_2 - z_1|,$$

所以点 M 与 N 间的距离为

$$d = \sqrt{|MN_2|^2 + |N_2N|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

例 1　设 $A(-1,2,0)$ 与 $B(-1,0,-2)$ 为空间两点，求 A 与 B 两点间的距离.

解　由公式(8-1)可得，A 与 B 两点间的距离为

$$d = \sqrt{[-1-(-1)]^2 + (0-2)^2 + (-2-0)^2} = 2\sqrt{2}.$$

例 2　在 z 轴上求与点 $A(3,5,-2)$ 和 $B(-4,1,5)$ 等距的点 M.

解　由于所求的点 M 在 z 轴上，因而 M 点的坐标可设为 $(0,0,z)$，又由于

$$|MA| = |MB|,$$

由公式(8-1)，得

$$\sqrt{3^2 + 5^2 + (-2-z)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (5-z)^2}.$$

从而解得 $z = \dfrac{2}{7}$，即所求的点为 $M\left(0,0,\dfrac{2}{7}\right)$.

习题 8.1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限？

$A(1,-2,3)$，$B(2,3,-4)$，$C(2,-3,-4)$，$D(-2,-3,1)$

2. 在坐标面上和坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列点的位置：

$$A(1,-2,0),B(0,3,-4),C(2,0,0),D(0,-3,0)$$

3. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求它各顶点的坐标.

4. 求点 $(-1,2,3)$ 关于各坐标平面对称的点的坐标.

5. 求点 $(1,2,3)$ 关于各坐标轴对称的点的坐标.

6. 求下列各对点间的距离：

(1) $A(0,-1,3)$ 与 $B(2,1,4)$；　　(2) $C(-1,4,2)$ 与 $D(2,7,3)$.

7. 在坐标平面 yOz 上求与三点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距的点.

8. 求点 $A(12,-3,4)$ 与原点、各坐标平面和各坐标轴的距离.

9. 证明以 $A(4,3,1)$,$B(7,1,2)$,$C(5,2,3)$ 为顶点的 $\triangle ABC$ 是一等腰三角形.

8.2　空间向量的代数运算

8.2.1　空间向量的概念

在日常生活中，我们经常会遇到一些量，如质量、时间、面积、温度等，它们在取定一个度量单位后，就可以用一个数来表示.这种只有大小没有方向的量，叫作**数量**(或**标量**).但有一些量，如力、位移、速度、电场强度等，仅仅用一个实数无法将它们确切表示出来，因为它们不仅有大小，而且还有方向，这种既有大小又有方向的量，叫作**向量**(或**矢量**).

在数学上，我们用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示向量，A 称为**向量的起点**，B 称为**向量的终点**，有向线段的长度就表示向量的大小，有向线段的方向就表示向量的方向.通常在印刷时用黑体小写字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 来表示向量，手写时用带箭头的小写字母 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\cdots$ 来记向量.

向量的长度称为向量的**模**，记作 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$，模为 1 的向量叫作**单位向量**，模为 0 的向量叫作**零向量**，记作 $\mathbf{0}$，规定：零向量的方向可以是任意的.

本章我们讨论的是自由向量，即只考虑向量的大小和方向，而不考虑向量的起点，因此，我们把大小相等，方向相同的向量叫作**相等向量**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.**规定**：所有的零向量都相等.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等，方向相反的向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**(或**反向量**)，记作 $-\boldsymbol{a}$.

平行于同一直线的一组向量称为**平行向量**(或**共线向量**).

平行于同一平面的一组向量，叫作**共面向量**，零向量与任何共面的向量组共面.

8.2.2　向量的线性运算

1. 向量的加法

我们在物理学中知道力与位移都是向量，求两个力的合力用的是平行四边形法则，我们可以类似地定义两个向量的加法.

定义 8.1　对向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$，从同一起点 A 作有向线段 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$ 分别表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，然后以 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$，则我们把从起点 A 到顶点 C 的向量 $\overrightarrow{AC}$ 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**

和(图 8-5),记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.这种求和方法称为**平行四边形法则**.

若将向量 $\boldsymbol{b}$ 平移,使其起点与向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,则以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点,$\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(图 8-6),该法则称为**三角形法则**.

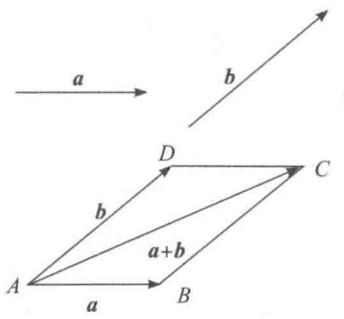


图 8-5

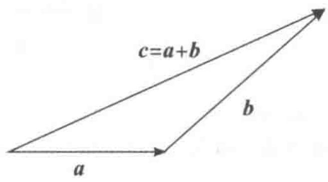


图 8-6

多个向量,如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 首尾相接,则从第一个向量的起点到最后一个向量的终点的向量就是它们的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$(图 8-7).

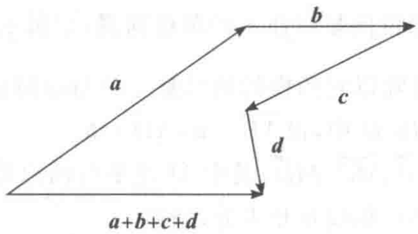


图 8-7

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,满足以下运算法则:

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(交换律).

(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(结合律).

(3)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$.

2. 向量的减法

定义 8.2　向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的负向量 $-\boldsymbol{b}$ 的和,称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差**,即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

特别地,当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时,有 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

由向量减法的定义,我们从同一起点 O 作有向线段 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 分别表示 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,则

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+(-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}.$$

也就是说,若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起,则 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的差向量就是以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点,以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量(图 8-8).

3. 数乘向量

定义 8.3　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量,记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模是 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$,方向:当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 以及任意实数 λ,μ,有运算法则:

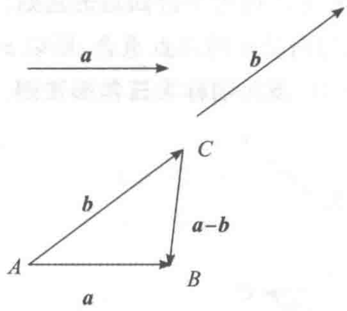


图 8-8

(1)$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$.

(2)$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

(3)$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加法、减法及数乘向量运算统称为**向量的线性运算**,$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 称为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的一个线性组合($\lambda,\mu\in\mathbf{R}$).

特别地,与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 的**单位向量**,记做 $\boldsymbol{e}_a$,即 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

上式表明:一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

例 1 在平行四边形 $ABCD$ 中,设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$.
试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$,其中 M 是平行四边形对角线的交点.

解 由于平行四边形的对角线互相平分,所以

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$,即 $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}$,

于是$\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

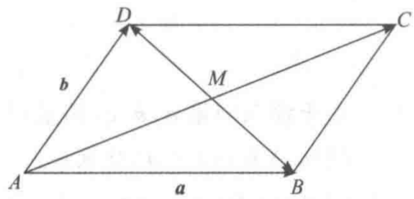


图 8-9

因为$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$,所以 $\overrightarrow{MC}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

又因 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$,所以$\overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

由于$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$,所以$\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

定理 8.1 向量 $\boldsymbol{a}$ 与非零向量 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是存在一个实数 λ,使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

8.2.3 向量的坐标表示

1. 向量在坐标轴上的投影

设 A 为空间中一点,过点 A 作轴 u 的垂线,垂足为 A',则 A' 称为**点 A 在轴 u 上的投影**(图 8-10).

若 M 为空间直角坐标系中的一点,则 M 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影为 A、B、C,如图 8-11 所示.

设向量$\overrightarrow{AB}$ 的始点 A 与终点 B 在轴 u 的投影分别为 A'、B',那么轴 u 上的有向线段$\overrightarrow{A'B'}$

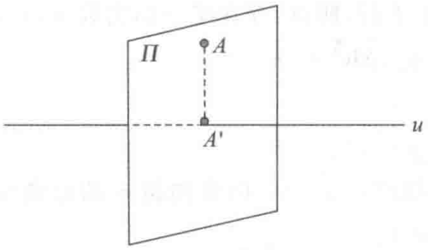


图 8-10

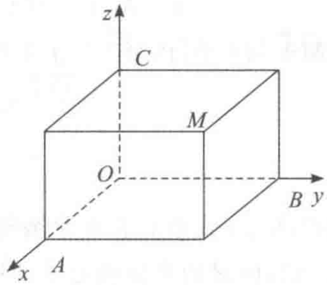
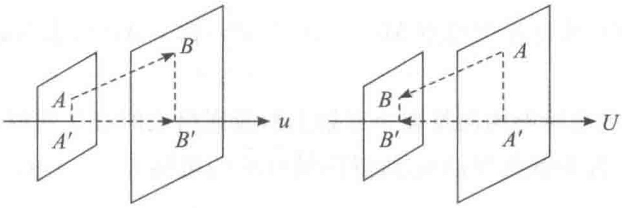


图 8-11

的值 $A'B'$ 叫作向量$\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{AB}=A'B'$，轴 u 称为投影轴.



$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}>0$　　　$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}<0$

图 8-12

当$\overrightarrow{A'B'}$ 与轴 u 同向时，投影取正号，当$\overrightarrow{A'B'}$ 与轴 u 反向时，投影取负号.

注　(1) 向量在轴上投影是标量.

(2) 设$\overrightarrow{MN}$ 为空间直角坐标系中的一个向量，点 M 的坐标为(x_1,y_1,z_1)，点 N 的坐标为(x_2,y_2,z_2)，显然，向量$\overrightarrow{MN}$ 在三个坐标轴上的投影分别为 x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1.

2. 向量的坐标表示

取空间直角坐标系 $Oxyz$，在 x 轴、y 轴、z 轴上各取一个与坐标轴同向的单位向量，依次记作 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，它们称为**坐标向量**.

空间中任一向量 $\boldsymbol{a}$，它都可以唯一地表示为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的数乘之和.

事实上，设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{MN}$，过 M、N 作坐标轴的投影，如图 8-13 所示.

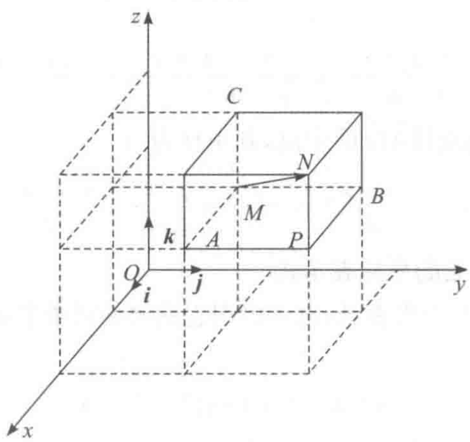


图 8-13

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.$$

由于$\overrightarrow{MA}$与$\boldsymbol{i}$平行，$\overrightarrow{MB}$与$\boldsymbol{j}$平行，$\overrightarrow{MC}$与$\boldsymbol{k}$平行，所以，存在唯一的实数x,y,z，使得

$$\overrightarrow{MA}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{MB}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{MC}=z\boldsymbol{k},$$

即

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{8-2}$$

我们把(8-2)式中$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$系数组成的有序数组$(x,y,z)$叫作**向量$\boldsymbol{a}$的直角坐标**，记为$\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$，向量的坐标确定了，向量也就确定了.

显然，(8-2)中的x,y,z是向量$\boldsymbol{a}$分别在x轴、y轴、z轴上的投影.

因此，在空间直角坐标系中的向量$\boldsymbol{a}$的坐标就是该向量在三个坐标轴上的投影组成的有序数组.

例 2 在空间直角坐标系中设点$M(-3,1,5)$，$N(2,-3,1)$，求向量$\overrightarrow{MN}$及$\overrightarrow{NM}$的直角坐标.

解 由于向量的坐标即为向量在坐标轴上的投影组成的有序数组，而向量的各投影即为终点坐标与起点坐标对应分量的差.所以向量$\overrightarrow{MN}$的坐标为$\{5,-4,-4\}$，向量$\overrightarrow{NM}$的坐标为$\{-5,4,4\}$.

例 3 （定比分点公式）设$A(x_1,y_1,z_1)$和$B(x_2,y_2,z_2)$为两已知点，有向线段$\overrightarrow{AB}$上的点M将它分为两条有向线段$\overrightarrow{AM}$和$\overrightarrow{MB}$，使它们的值的比等于数$\lambda(\lambda\neq-1)$，即$\dfrac{AM}{MB}=\lambda$，求分点$M(x,y,z)$的坐标.

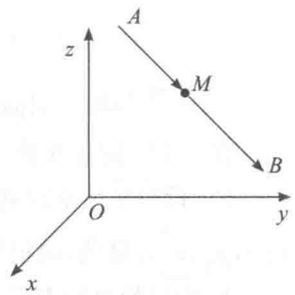


图 8-14

解 如图 8-14，因为$\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{MB}$在同一直线上，且同方向，故$\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{MB}$，而

$\overrightarrow{AM}=\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\}$，$\overrightarrow{MB}=\{x_2-x,y_2-y,z_2-z\}$，

$\lambda\overrightarrow{MB}=\{\lambda(x_2-x),\lambda(y_2-y),\lambda(z_2-z)\}$，

所以

$x-x_1=\lambda(x_2-x)$，$y-y_1=\lambda(y_2-y)$，$z-z_1=\lambda(z_2-z)$.

解得

$$x=\frac{x_1+\lambda\cdot x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda\cdot y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda\cdot z_2}{1+\lambda}.$$

当$\lambda=1$，点M为有向线段$\overrightarrow{AB}$的中点，其坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

3. 向量的模与方向余弦的坐标表示式

向量可以用它的模与方向来表示，也可以用它的坐标式来表示，这两种表示法之间是有联系的.

设空间向量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$与三条坐标轴的正向的夹角分别为$\alpha,\beta,\gamma$，规定：$0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$0\leqslant\beta\leqslant\pi$，$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$，称$\alpha,\beta,\gamma$为向量$\boldsymbol{a}$的方向角.