

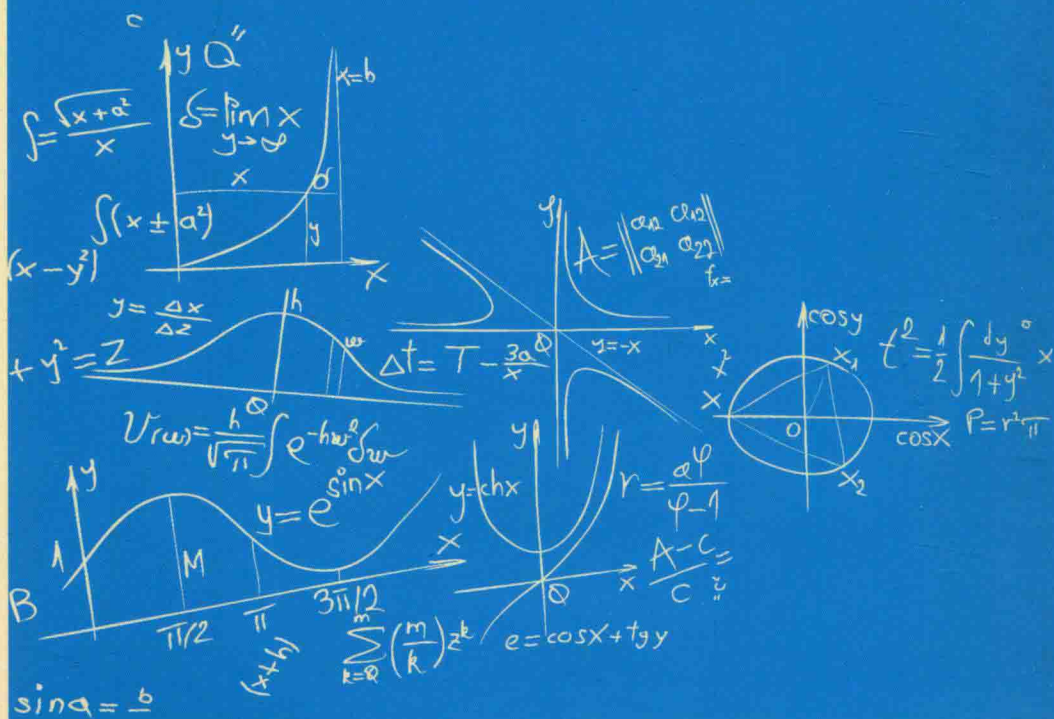
ADVANCED

MATHEMATICS

高等数学

下册

张金辉 林建伟 主编



ADVANCED
MATHEMATICS

高等数学

下册

主 编：张金辉 林建伟

副主编：林美琳 林永华



厦门大学出版社 国家一级出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS 全国百佳图书出版单位

ADVANCED
MATHEMATICS
高等数学

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册 / 张金辉, 林建伟主编. — 厦门: 厦门大学出版社, 2018. 8
ISBN 978-7-5615-7039-5

I. ①高… II. ①张… ②林… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 151289 号

出版人 郑文礼
责任编辑 郑丹
封面设计 蒋卓群
技术编辑 许克华

出版发行 厦门大学出版社
社址 厦门市软件园二期望海路 39 号
邮政编码 361008
总编办 0592-2182177 0592-2181406(传真)
营销中心 0592-2184458 0592-2181365
网址 <http://www.xmupress.com>
邮箱 xmup@xmupress.com
印刷 三明市华光印务有限公司

开本 787 mm×1 092 mm 1/16
印张 12.5
字数 306 千字
版次 2018 年 8 月第 1 版
印次 2018 年 8 月第 1 次印刷
定价 37.00 元

本书如有印装质量问题请直接寄承印厂调换



厦门大学出版社
微信二维码



厦门大学出版社
微博二维码

前 言

为了推进高等数学教学改革,充分体现基础课以应用为目的,编者根据教育部最新制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》,在广泛调查研究的基础上,借鉴当前的教学实践和教改成果,组织编写了本书,以满足普通高等学校理工类专业高等数学课程教学的需要.本书可作为高等院校各相关专业数学课程的教材,也可作为相关工程人员及数学爱好者的阅读参考用书.

本书分为上、下两册.上册主要内容包括函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程等.下册主要内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等.本书内容丰富,叙述清楚、透彻,逻辑严谨.

本册由张金辉、林建伟主编.具体编写分工如下:林永华编写第8、12章;张金辉编写第9、10章;林美琳编写第11章.

本书在编写过程中,参考了其他作者的相关内容,并得到了许多专家的大力支持与帮助,在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,成书仓促,书中难免会存在错漏之处,敬请专家和读者批评指正,以帮助我们不断改进.

编者

2018年5月

目 录

第 8 章 向量代数与空间解析几何	1
8.1 空间直角坐标系	1
8.1.1 空间直角坐标系	1
8.1.2 空间中两点之间的距离	2
习题 8.1	3
8.2 空间向量的代数运算	4
8.2.1 空间向量的概念	4
8.2.2 向量的线性运算	4
8.2.3 向量的坐标表示	6
8.2.4 向量的数量积	10
8.2.5 向量的向量积	12
* 8.2.6 向量的混合积	14
习题 8.2	14
8.3 空间中的平面与直线方程	15
8.3.1 平面及其方程	15
8.3.2 空间中的直线及其方程	20
习题 8.3	27
8.4 空间曲面及其方程	28
8.4.1 曲面方程的概念	28
8.4.2 柱面	30
8.4.3 旋转曲面	31
8.4.4 二次曲面	32
习题 8.4	34
8.5 空间曲线及其方程	35
8.5.1 空间曲线的一般方程	35
8.5.2 空间曲线的参数方程	36
8.5.3 空间曲线在坐标面上的投影	37
习题 8.5	39
8.6 空间曲线和曲面的应用及举例	39
8.6.1 空间曲线的应用及举例	39

8.6.2 曲面的应用	41
习题 8.6	42
总习题 8	42
第 9 章 多元函数微分法及其应用	45
9.1 多元函数的基本概念	45
9.1.1 区域	45
9.1.2 多元函数的概念	46
9.1.3 二元函数的极限	48
9.1.4 二元函数的连续性	49
习题 9.1	50
9.2 偏导数	51
9.2.1 偏导数的定义	51
9.2.2 偏导数的求法	52
9.2.3 偏导数的几何意义	53
9.2.4 偏导数与连续的关系	54
9.2.5 高阶偏导数	54
习题 9.2	56
9.3 全微分	56
9.3.1 全微分的定义	57
* 9.3.2 全微分在近似计算中的应用	60
习题 9.3	61
9.4 多元复合函数的求导法则	61
9.4.1 复合函数的微分法	62
9.4.2 全微分形式不变性	65
习题 9.4	66
9.5 隐函数的求导公式	67
9.5.1 一元隐函数的求导公式	67
9.5.2 二元隐函数求偏导数的公式	67
9.5.3 方程组的情形	68
习题 9.5	69
9.6 微分法在几何上的应用	70
9.6.1 空间曲线的切线与法平面	70
9.6.2 空间曲面的切平面与法线	72
习题 9.6	73
9.7 方向导数与梯度	74
9.7.1 方向导数	74

9.7.2 梯度	76
习题 9.7	78
9.8 多元函数的极值及其求法	79
9.8.1 二元函数的极值	79
9.8.2 条件极值与拉格朗日乘数法	82
习题 9.8	84
总习题 9	85
第 10 章 重积分	88
10.1 二重积分的概念与性质	88
10.1.1 二重积分的概念	88
10.1.2 二重积分的性质	90
习题 10.1	92
10.2 二重积分的计算法	93
10.2.1 在直角坐标系下二重积分的计算	93
10.2.2 在极坐标系下二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 的计算	99
习题 10.2	102
10.3 三重积分	103
10.3.1 三重积分的概念	103
10.3.2 直角坐标系中三重积分的计算方法	104
习题 10.3	108
10.4 重积分的应用	109
10.4.1 空间曲面的面积	110
10.4.2 质心	111
10.4.3 转动惯量	113
10.4.4 引力	114
习题 10.4	115
总习题 10	116
第 11 章 曲线积分与曲面积分	119
11.1 对弧长的曲线积分	119
11.1.1 对弧长的曲线积分的概念与性质	119
11.1.2 对弧长的曲线积分的计算法	120
习题 11.1	122
11.2 对坐标的曲线积分	122
11.2.1 对坐标的曲线积分的概念与性质	122

11.2.2 对坐标的曲线积分的计算法	123
11.2.3 两类曲线积分之间的联系	125
习题 11.2	126
11.3 格林公式及其应用	126
11.3.1 格林公式	127
11.3.2 平面上曲线积分与路径无关的条件	130
习题 11.3	133
11.4 对面积的曲面积分	133
11.4.1 对面积的曲面积分的概念与性质	133
11.4.2 对面积的曲面积分的计算法	134
习题 11.4	135
11.5 对坐标的曲面积分	136
11.5.1 对坐标的曲面积分的概念与性质	136
11.5.2 对坐标的曲面积分的计算法	139
11.5.3 两类曲面积分之间的联系	140
习题 11.5	141
11.6 高斯公式、通量与散度	141
11.6.1 高斯公式	141
11.6.2 通量与散度	144
习题 11.6	145
11.7 斯托克斯公式、环流量与旋度	146
11.7.1 斯托克斯公式	146
* 11.7.2 空间曲线积分与路径无关的条件	149
11.7.3 环流量与旋度	149
习题 11.7	151
总习题 11	151
第 12 章 无穷级数	153
12.1 常数项级数的概念与性质	153
12.1.1 常数项级数的概念	153
12.1.2 收敛级数的基本性质	155
习题 12.1	156
12.2 常数项级数的收敛法则	157
12.2.1 正项级数及其收敛法则	157
12.2.2 交错级数及其收敛法则	160
12.2.3 绝对收敛与条件收敛	161
习题 12.2	162

12.3 幂级数	163
12.3.1 函数项级数的概念	163
12.3.2 幂级数及其收敛性	163
12.3.3 幂级数的运算	166
习题 12.3	167
12.4 函数展开成幂级数	167
12.4.1 函数展开成幂级数	167
12.4.2 幂级数的展开式的应用	171
习题 12.4	174
12.5 傅里叶级数	174
12.5.1 三角级数及三角函数系的正交性	174
12.5.2 函数展开成傅里叶级数	176
12.5.3 正弦级数和余弦级数	179
12.5.4 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数	180
习题 12.5	182
12.6 级数的应用	182
12.6.1 级数在经济上的应用	182
12.6.2 级数在工程上的应用	184
习题 12.6	185
总习题 12	185
参考文献	188

第 8 章 向量代数与空间解析几何

解析几何的基本思想是用代数的方法来研究几何的问题,为了把代数运算引入几何中来,最根本的做法就是设法把空间的几何结构有系统地代数化、数量化.平面解析几何使一元函数微积分有了直观的几何意义,所以为了更好地学习多元函数微积分,空间解析几何的知识就有着非常重要的地位.

本章首先给出空间直角坐标系,然后介绍向量的基础知识,以向量为工具讨论空间的平面和直线,最后介绍空间曲面和空间曲线的部分内容.

8.1 空间直角坐标系

8.1.1 空间直角坐标系

用代数的方法来研究几何的问题,我们需要建立空间的点与有序数组之间的联系,为此我们通过引进空间直角坐标系来实现.

1. 空间直角坐标系

过定点 O , 作三条互相垂直的数轴, 这三条数轴分别叫作 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴), 它们都以 O 为原点且具有相同的长度单位. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上, 而 z 轴则是铅垂线; 它们的正方向要符合右手规则: 右手握住 z 轴, 当右手的四指从 x 轴的正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 角度指向 y 轴正向时, 大拇指的指向就是 z 轴的正向, 这样就建立了一个空间直角坐标系(图 8-1), 称为 $Oxyz$ 直角坐标系, 点 O 叫作坐标原点.

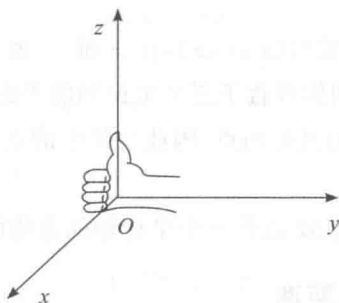


图 8-1

在 $Oxyz$ 直角坐标系下, 数轴 Ox, Oy, Oz 统称为坐标轴, 三条坐标轴中每两条可以确定

一个平面,称为坐标面,分别为 xOy, yOz, zOx , 三个坐标平面将空间分为八个部分,每一部分叫作一个卦限(图 8-2),分别用 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII 表示.

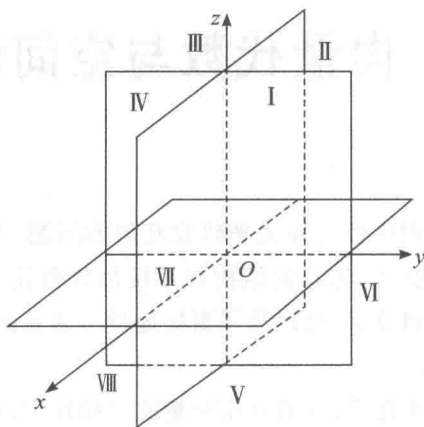


图 8-2

2. 空间点的直角坐标

设 M 为空间中的任一点,过点 M 分别作垂直于三个坐标轴的三个平面,与 x 轴、 y 轴和 z 轴依次交于 A, B, C 三点,若这三点在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的坐标分别为 x, y, z ,于是点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x, y, z) ,则称该数组 (x, y, z) 为点 M 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标,如图 8-3 所示. x, y, z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

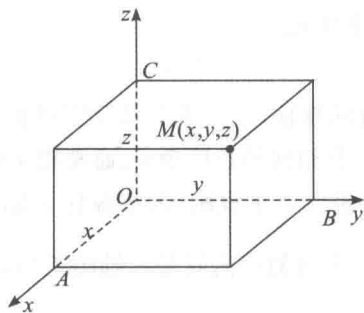


图 8-3

反之,若任意给定一个有序数组 (x, y, z) ,在 x 轴、 y 轴、 z 轴上分别取坐标为 x, y, z 的三个点 A, B, C ,过这三个点分别作垂直于三个坐标轴的平面,这三个平面只有一个交点 M ,该点就是以有序数组 (x, y, z) 为坐标的点,因此空间中的点 M 就与有序数组 (x, y, z) 之间建立了一一对应的关系.

注: A, B, C 这三点正好是过 M 点作三个坐标轴的垂线的垂足.

8.1.2 空间中两点之间的距离

设两点 $M(x_1, y_1, z_1), N(x_2, y_2, z_2)$,则 M 与 N 之间的距离为

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (8-1)$$

事实上,过点 M 和 N 作垂直于 xOy 平面的直线,分别交 xOy 平面于点 M_1 和 N_1 ,则 $MM_1 \parallel NN_1$,显然,点 M_1 的坐标为 $(x_1, y_1, 0)$,点 N_1 的坐标为 $(x_2, y_2, 0)$ (如图 8-4).

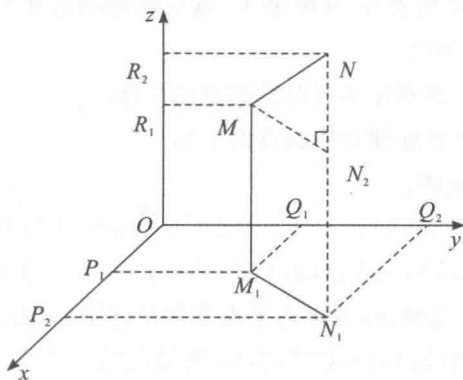


图 8-4

由平面解析几何的两点间距离公式知, M_1 和 N_1 的距离为:

$$|M_1N_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

过点 M 作平行于 xOy 平面的平面,交直线 NN_1 于 N_2 ,则 $M_1N_1 \parallel MN_2$,因此 N_2 的坐标为 (x_2, y_2, z_1) ,且

$$|MN_2| = |M_1N_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

在直角三角形 MN_2N 中,

$$|N_2N| = |z_2 - z_1|,$$

所以点 M 与 N 间的距离为

$$d = \sqrt{|MN_2|^2 + |N_2N|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

例 1 设 $A(-1, 2, 0)$ 与 $B(-1, 0, -2)$ 为空间两点,求 A 与 B 两点间的距离.

解 由公式(8-1)可得, A 与 B 两点间的距离为

$$d = \sqrt{[-1 - (-1)]^2 + (0 - 2)^2 + (-2 - 0)^2} = 2\sqrt{2}.$$

例 2 在 z 轴上求与点 $A(3, 5, -2)$ 和 $B(-4, 1, 5)$ 等距的点 M .

解 由于所求的点 M 在 z 轴上,因而 M 点的坐标可设为 $(0, 0, z)$,又由于

$$|MA| = |MB|,$$

由公式(8-1),得

$$\sqrt{3^2 + 5^2 + (-2 - z)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (5 - z)^2}.$$

从而解得 $z = \frac{2}{7}$,即所求的点为 $M\left(0, 0, \frac{2}{7}\right)$.

习题 8.1

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限?

$$A(1, -2, 3), B(2, 3, -4), C(2, -3, -4), D(-2, -3, 1)$$

2. 在坐标面上和坐标轴上的点的坐标各有什么特征? 指出下列点的位置:

$$A(1, -2, 0), B(0, 3, -4), C(2, 0, 0), D(0, -3, 0)$$

3. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上, 其底面的中心在坐标原点, 底面的顶点在 x 轴和 y 轴上, 求它各顶点的坐标.

4. 求点 $(-1, 2, 3)$ 关于各坐标平面对称的点的坐标.

5. 求点 $(1, 2, 3)$ 关于各坐标轴对称的点的坐标.

6. 求下列各对点间的距离:

$$(1) A(0, -1, 3) \text{ 与 } B(2, 1, 4); \quad (2) C(-1, 4, 2) \text{ 与 } D(2, 7, 3).$$

7. 在坐标平面 yOz 上求与三点 $A(3, 1, 2)$ 、 $B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距的点.

8. 求点 $A(12, -3, 4)$ 与原点、各坐标平面和各坐标轴的距离.

9. 证明以 $A(4, 3, 1)$ 、 $B(7, 1, 2)$ 、 $C(5, 2, 3)$ 为顶点的 $\triangle ABC$ 是一等腰三角形.

8.2 空间向量的代数运算

8.2.1 空间向量的概念

在日常生活中, 我们经常会遇到一些量, 如质量、时间、面积、温度等, 它们在取定一个度量单位后, 就可以用一个数来表示. 这种只有大小没有方向的量, 叫作数量(或标量). 但有一些量, 如力、位移、速度、电场强度等, 仅仅用一个实数无法将它们确切表示出来, 因为它们不仅有大小, 而且还有方向, 这种既有大小又有方向的量, 叫作向量(或矢量).

在数学上, 我们用有向线段 \overrightarrow{AB} 来表示向量, A 称为向量的起点, B 称为向量的终点, 有向线段的长度就表示向量的大小, 有向线段的方向就表示向量的方向. 通常在印刷时用黑体小写字母 a, b, c, \dots 来表示向量, 手写时用带箭头的小写字母 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ 来记向量.

向量的长度称为向量的模, 记作 $|a|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$, 模为 1 的向量叫作单位向量, 模为 0 的向量叫作零向量, 记作 0 , 规定: 零向量的方向可以是任意的.

本章我们讨论的是自由向量, 即只考虑向量的大小和方向, 而不考虑向量的起点, 因此, 我们把大小相等, 方向相同的向量叫作相等向量, 记作 $a = b$. 规定: 所有的零向量都相等.

与向量 a 大小相等, 方向相反的向量叫作 a 的负向量(或反向量), 记作 $-a$.

平行于同一直线的一组向量称为平行向量(或共线向量).

平行于同一平面的一组向量, 叫作共面向量, 零向量与任何共面的向量组共面.

8.2.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

我们在物理学中知道力与位移都是向量, 求两个力的合力用的是平行四边形法则, 我们可以类似地定义两个向量的加法.

定义 8.1 对向量 a, b , 从同一起点 A 作有向线段 \overrightarrow{AB} 、 \overrightarrow{AD} 分别表示 a 与 b , 然后以 \overrightarrow{AB} 、 \overrightarrow{AD} 为邻边作平行四边形 $ABCD$, 则我们把从起点 A 到顶点 C 的向量 \overrightarrow{AC} 称为向量 a 与 b 的

和(图 8-5),记作 $a + b$.这种求和方法称为平行四边形法则.

若将向量 b 平移,使其起点与向量 a 的终点重合,则以 a 的起点为起点, b 的终点为终点的向量 c 就是 a 与 b 的和(图 8-6),该法则称为三角形法则.

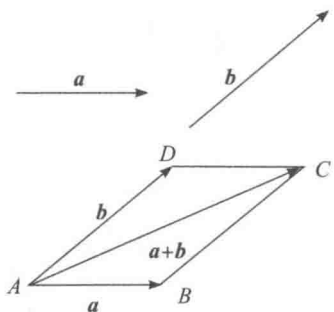


图 8-5

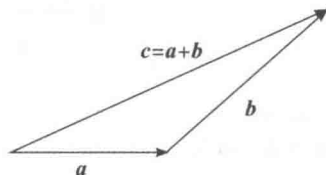


图 8-6

多个向量,如 a, b, c, d 首尾相接,则从第一个向量的起点到最后一个向量的终点的向量就是它们的和 $a + b + c + d$ (图 8-7).

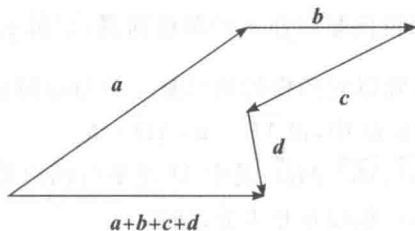


图 8-7

对于任意向量 a, b, c ,满足以下运算法则:

- (1) $a + b = b + a$ (交换律).
- (2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (结合律).
- (3) $a + 0 = a$.

2. 向量的减法

定义 8.2 向量 a 与 b 的负向量 $-b$ 的和,称为向量 a 与 b 的差,即

$$a - b = a + (-b).$$

特别地,当 $b = a$ 时,有 $a + (-a) = 0$.

由向量减法的定义,我们从同一起点 O 作有向线段 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 分别表示 a, b , 则

$$a - b = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + (-\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA}.$$

也就是说,若向量 a 与 b 的起点放在一起,则 a, b 的差向量就是以 b 的终点为起点,以 a 的终点为终点的向量(图 8-8).

3. 数乘向量

定义 8.3 实数 λ 与向量 a 的乘积是一个向量,记作 λa , λa 的模是 $|\lambda| |a|$,方向:当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 同向;当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 反向;当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda a = 0$.

对于任意向量 a, b 以及任意实数 λ, μ ,有运算法则:

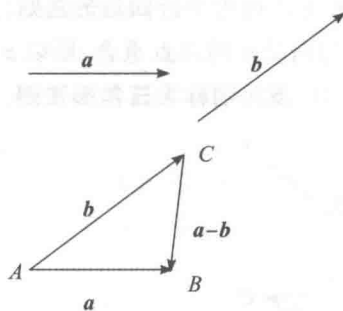


图 8-8

(1) $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$.

(2) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$.

(3) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

向量的加法、减法及数乘向量运算统称为向量的线性运算, $\lambda a + \mu b$ 称为 a, b 的一个线性组合 ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$).

特别地, 与 a 同方向的单位向量叫作 a 的单位向量, 记做 e_a , 即 $e_a = \frac{a}{|a|}$.

上式表明: 一个 nonzero 向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

例 1 在平行四边形 $ABCD$ 中, 设 $\vec{AB} = a, \vec{AD} = b$.

试用 a 和 b 表示向量 $\vec{MA}, \vec{MB}, \vec{MC}, \vec{MD}$, 其中 M 是平行四边形对角线的交点.

解 由于平行四边形的对角线互相平分, 所以

$a + b = \vec{AC} = 2\vec{AM}$, 即 $-(a + b) = 2\vec{MA}$,

于是 $\vec{MA} = -\frac{1}{2}(a + b)$.

因为 $\vec{MC} = -\vec{MA}$, 所以 $\vec{MC} = \frac{1}{2}(a + b)$.

又因 $-a + b = \vec{BD} = 2\vec{MD}$, 所以 $\vec{MD} = \frac{1}{2}(b - a)$.

由于 $\vec{MB} = -\vec{MD}$, 所以 $\vec{MB} = \frac{1}{2}(a - b)$.

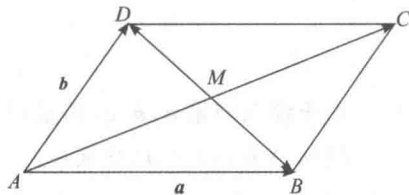


图 8-9

定理 8.1 向量 a 与非零向量 b 平行的充分必要条件是存在一个实数 λ , 使得 $a = \lambda b$.

8.2.3 向量的坐标表示

1. 向量在坐标轴上的投影

设 A 为空间中一点, 过点 A 作轴 u 的垂线, 垂足为 A' , 则 A' 称为点 A 在轴 u 上的投影 (图 8-10).

若 M 为空间直角坐标系中的一点, 则 M 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的投影为 A, B, C , 如图 8-11 所示.

设向量 \vec{AB} 的始点 A 与终点 B 在轴 u 的投影分别为 A', B' , 那么轴 u 上的有向线段 $\vec{A'B'}$

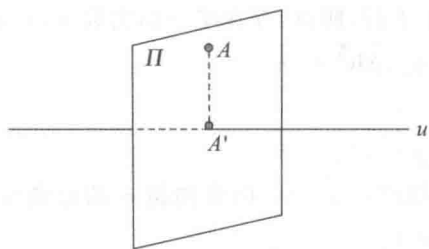


图 8-10

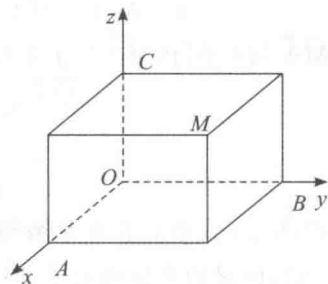


图 8-11

的值 $A'B'$ 叫作向量 \vec{AB} 在轴 u 上的投影, 记作 $\text{Prj}_u \vec{AB} = A'B'$, 轴 u 称为投影轴.

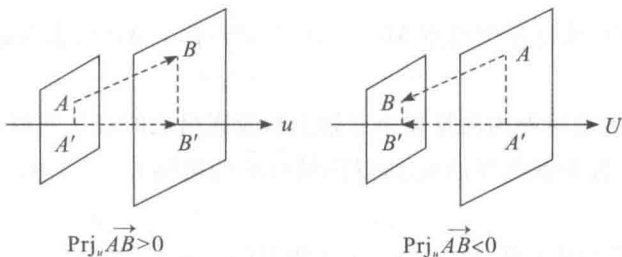


图 8-12

当 $\vec{A'B'}$ 与轴 u 同向时, 投影取正号, 当 $\vec{A'B'}$ 与轴 u 反向时, 投影取负号.

注 (1) 向量在轴上投影是标量.

(2) 设 \vec{MN} 为空间直角坐标系中的一个向量, 点 M 的坐标为 (x_1, y_1, z_1) , 点 N 的坐标为 (x_2, y_2, z_2) , 显然, 向量 \vec{MN} 在三个坐标轴上的投影分别为 $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$.

2. 向量的坐标表示

取空间直角坐标系 $Oxyz$, 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上各取一个与坐标轴同向的单位向量, 依次记作 i, j, k , 它们称为坐标向量.

空间中任一向量 a , 它都可以唯一地表示为 i, j, k 的数乘之和.

事实上, 设 $a = \vec{MN}$, 过 M, N 作坐标轴的投影, 如图 8-13 所示.

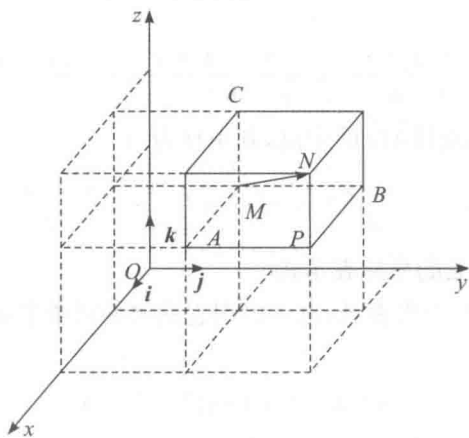


图 8-13

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

由于 \overrightarrow{MA} 与 i 平行, \overrightarrow{MB} 与 j 平行, \overrightarrow{MC} 与 k 平行,所以,存在唯一的实数 x, y, z ,使得

$$\overrightarrow{MA} = xi, \overrightarrow{MB} = yj, \overrightarrow{MC} = zk,$$

即

$$\mathbf{a} = xi + yj + zk. \tag{8-2}$$

我们把(8-2)式中 i, j, k 系数组成的有序数组 (x, y, z) 叫作向量 \mathbf{a} 的直角坐标,记为 $\mathbf{a} = \{x, y, z\}$,向量的坐标确定了,向量也就确定了.

显然,(8-2)中的 x, y, z 是向量 \mathbf{a} 分别在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的投影.

因此,在空间直角坐标系中的向量 \mathbf{a} 的坐标就是该向量在三个坐标轴上的投影组成的有序数组.

例2 在空间直角坐标系中设点 $M(-3, 1, 5), N(2, -3, 1)$,求向量 \overrightarrow{MN} 及 \overrightarrow{NM} 的直角坐标.

解 由于向量的坐标即为向量在坐标轴上的投影组成的有序数组,而向量的各投影即为终点坐标与起点坐标对应分量的差.所以向量 \overrightarrow{MN} 的坐标为 $\{5, -4, -4\}$,向量 \overrightarrow{NM} 的坐标为 $\{-5, 4, 4\}$.

例3 (定比分点公式) 设 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 为两已知点,有向线段 \overrightarrow{AB} 上的点 M 将它分为两条有向线段 \overrightarrow{AM} 和 \overrightarrow{MB} ,使它们的值的比等于数 $\lambda (\lambda \neq -1)$,即 $\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \lambda$,求分点 $M(x, y, z)$ 的坐标.

解 如图8-14,因为 \overrightarrow{AM} 与 \overrightarrow{MB} 在同一直线上,且同方向,故 $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$,而

$$\overrightarrow{AM} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}, \overrightarrow{MB} = \{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\},$$

$$\lambda \overrightarrow{MB} = \{\lambda(x_2 - x), \lambda(y_2 - y), \lambda(z_2 - z)\},$$

所以

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), y - y_1 = \lambda(y_2 - y), z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

解得

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1 + \lambda}.$$

当 $\lambda = 1$,点 M 为有向线段 \overrightarrow{AB} 的中点,其坐标为

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

3. 向量的模与方向余弦的坐标表示式

向量可以用它的模与方向来表示,也可以用它的坐标式来表示,这两种表示法之间是有联系的.

设空间向量 $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 与三条坐标轴的正向的夹角分别为 α, β, γ ,规定: $0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi, 0 \leq \gamma \leq \pi$,称 α, β, γ 为向量 \mathbf{a} 的方向角.

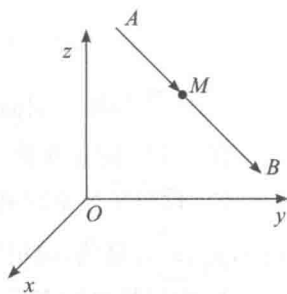


图 8-14