走向IMO 数学奥林匹克试题集锦（2015）

顾问　裘宗沪

2015年IMO中国国家集训队教练组　编

THAILAND 2015

IMO

ECNUP 上海市著名商标

华东师范大学出版社

全国百佳图书出版单位

走向IMO

数学奥林匹克试题集锦

(2015)

2015年IMO中国国家集训队教练组 编

华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

走向IMO：数学奥林匹克试题集锦. 2015/2015年IMO中国国家集训队教练组编. —上海：华东师范大学出版社，2015.8
ISBN 978-7-5675-4057-6

Ⅰ.①走… Ⅱ.①2… Ⅲ.①中学数学课—竞赛题 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第199573号

走向IMO
数学奥林匹克试题集锦(2015)

编　　者　2015年IMO中国国家集训队教练组
总 策 划　倪　明
项目编辑　孔令志
特约审读　石　岩
装帧设计　高　山

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　昆山亭林彩印厂有限公司
开　　本　890×1240　32开
印　　张　6.125
插　　页　4
字　　数　135千字
版　　次　2015年9月第一版
印　　次　2015年9月第一次
书　　号　ISBN 978-7-5675-4057-6/G·8613
定　　价　25.00元

出 版 人　王　焰

2015 年 IMO 中国国家队合影，从左到右依次为：
李秋生、熊斌、谢昌志、高继扬、贺嘉帆、俞辰捷、王正、王诺舟、瞿振华、何忆捷

2015 年 IMO 中国国家队载誉归来，从左到右依次为：
何忆捷、瞿振华、高继扬、王诺舟、王正、熊斌、谢昌志、贺嘉帆、俞辰捷 、李秋生

前　言

本书以2015年国家集训队的测试选拔题为主体，搜集了2014年8月至2015年7月间国内主要的数学竞赛及2015年国际数学奥林匹克试题和解答，并且附上了2015年美国和俄罗斯以及罗马尼亚大师杯数学奥林匹克的试题与解答，这些试题大都是从事数学奥林匹克教学和研究的专家们的精心创作，其中的一些解答源自国家集训队和国家队队员，他们的一些巧思妙解为本书增色不少.

在过去的一年中，我国中学生数学竞赛的主要赛事有2014年全国高中数学联赛（中国数学会普及工作委员会主办）、第30届中国数学奥林匹克（CMO）（中国数学奥林匹克委员会主办），以及由中国数学奥林匹克委员会主办的第13届中国女子数学奥林匹克（CGMO）等.

在2015年国家集训队和国家队集训期间，得到了潘承彪、周青、杨新民、吴建平等专家们的鼓励、支持和指导. 陶平生、李建泉教授为学生做了报告，裘宗沪教授对学生进行了赛前指导，再次对他们表示衷心的感谢.

本书倾注了许多专家和学者的心血，书中有许多他们的创造性的工作. 本书可供数学爱好者、参加数学竞赛的广大中学生、从

事数学竞赛教学的教练员、开设数学选修课的教师参考.

2014 年全国高中数学联赛及加试由吴建平整理，2014 年中国数学奥林匹克由何忆捷整理，2014 年第 13 届中国女子数学奥林匹克由朱华伟整理，2014 年中国西部数学邀请赛由冯志刚整理，2014 年中国东南地区数学奥林匹克由李胜宏整理，2015 年国家集训队测试由熊斌整理，2015 年中国国家队选拔考试由瞿振华整理，2015 年第 56 届国际数学奥林匹克由熊斌和瞿振华整理. 2015 年俄罗斯数学奥林匹克由李伟固整理，2015 年美国数学奥林匹克由张思汇整理，2015 年罗马尼亚大师杯数学奥林匹克由顾滨整理. 另外，特别请 2015 年第 56 届 IMO 金牌得主俞辰捷同学，写了一篇关于参与数学竞赛的感受，作为附录.

囿于作者的水平，加上编写时间仓促，不足和错误在所难免，请广大读者朋友批评指正，不吝施教.

2015 年 IMO 中国国家集训队教练组

2015 年 7 月

目　录

2014 年全国高中数学联赛

受中国数学会委托，2014 年全国高中数学联赛由吉林省数学会承办．中国数学会直接组织命题，承办省份负责各项组织事宜．

竞赛活动于 2014 年 9 月 14 日（星期日）举行．这是保送生政策调整之后的一个大的变化，为了能够让同学们尽早地进入高考的备考状态，我们把全国高中数学联赛的时间提前了一个月．

竞赛确定了“2014 年全国高中数学联赛赛区一等奖名单”，31 个赛区共有 1366 名同学获得赛区一等奖．竞赛确定了“第 30 届全国中学生数学冬令营营员名单”，346 名同学取得了参加在重庆举行的第 30 届冬令营的资格．

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1 若正数 a、b 满足 $2+\log_2 a=3+\log_3 b=\log_6(a+b)$,则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的值为________.

解 设 $2+\log_2 a=3+\log_3 b=\log_6(a+b)=k$,则 $a=2^{k-2}$,$b=3^{k-3}$,$a+b=6^k$,从而

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{6^k}{2^{k-2}\times 3^{k-3}}=2^2\times 3^3=108.$$

2 设集合 $\left\{\dfrac{3}{a}+b \mid 1\leqslant a\leqslant b\leqslant 2\right\}$ 中的最大元素与最小元素分别为 M、m,则 $M-m$ 的值为________.

解 由 $1\leqslant a\leqslant b\leqslant 2$ 知,$\dfrac{3}{a}+b\leqslant\dfrac{3}{1}+2=5$,当 $a=1$,$b=2$ 时,得最大元素 $M=5$. 又

$$\frac{3}{a}+b\geqslant\frac{3}{a}+a\geqslant 2\sqrt{\frac{3}{a}\cdot a}=2\sqrt{3},$$

当 $a=b=\sqrt{3}$ 时,得最小元素 $m=2\sqrt{3}$.

因此,$M-m=5-2\sqrt{3}$.

3 若函数 $f(x)=x^2+a\,|\,x-1\,|$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,则实数 a 的取值范围是________.

解 在$[1, +\infty)$上，$f(x)=x^2+ax-a$单调递增，等价于$-\frac{a}{2}\leqslant 1$，即$a\geqslant -2$. 在$[0, 1]$上，$f(x)=x^2-ax+a$单调递增，等价于$\frac{a}{2}\leqslant 0$，即$a\leqslant 0$.

因此实数a的取值范围是$[-2, 0]$.

4 数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{2(n+2)}{n+1}a_n(n\in \mathbf{N}^*)$，则$\frac{a_{2014}}{a_1+a_2+\cdots+a_{2013}}=$________.

解 由题设

$$a_n=\frac{2(n+1)}{n}a_{n-1}=\frac{2(n+1)}{n}\cdot\frac{2n}{n-1}a_{n-2}=\cdots$$
$$=\frac{2(n+1)}{n}\cdot\frac{2n}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2\cdot 3}{2}a_1=2^{n-1}(n+1).$$

记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则

$$S_n=2+2\times 3+2^2\times 4+\cdots+2^{n-1}(n+1),$$

所以

$$2S_n=2\times 2+2^2\times 3+2^3\times 4+\cdots+2^n(n+1),$$

将上面两式相减，得

$$S_n=2^n(n+1)-(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+2)$$
$$=2^n(n+1)-2^n=2^n n.$$

故

$$\frac{a_{2014}}{a_1+a_2+\cdots+a_{2013}}=\frac{2^{2013}\times 2015}{2^{2013}\times 2013}=\frac{2015}{2013}.$$

5 正四棱锥 $P-ABCD$ 中,侧面是边长为 1 的正三角形,M、N 分别是边 AB、BC 的中点,则异面直线 MN 与 PC 之间的距离是________.

解 设底面对角线 AC、BD 交于点 O,过点 C 作直线 MN 的垂线,交 MN 于点 H.

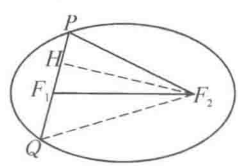
由于 PO 是底面的垂线,故 $PO\perp CH$,又 $AC\perp CH$,所以 CH 与平面 POC 垂直,故 $CH\perp PC$.

因此 CH 是直线 MN 与 PC 的公垂线段,又 $CH=\frac{\sqrt{2}}{2}CN=\frac{\sqrt{2}}{4}$,故异面直线 MN 与 PC 之间的距离是$\frac{\sqrt{2}}{4}$.

6 设椭圆 Γ 的两个焦点是 F_1、F_2,过点 F_1 的直线与 Γ 交于点 P、Q. 若 $|PF_2|=|F_1F_2|$,且 $3|PF_1|=4|QF_1|$,则椭圆 Γ 的短轴与长轴的比值为________.

解 不妨设 $|PF_1|=4$,$|QF_1|=3$. 记椭圆 Γ 的长轴、短轴的长度分别为 $2a$、$2b$,焦距为 $2c$,则 $|PF_2|=|F_1F_2|=2c$,且由椭圆的定义知

$$2a=|QF_1|+|QF_2|=|PF_1|+|PF_2|=2c+4.$$



(第 6 题)

于是

$$|QF_2|=|PF_1|+|PF_2|-|QF_1|=2c+1.$$

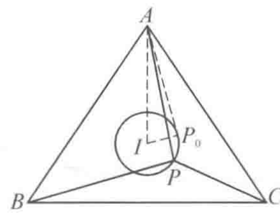
设 H 为线段 PF_1 的中点，则 $|F_1H|=2$，$|QH|=5$，且有 $F_2H\perp PF_1$. 由勾股定理知

$$|QF_2|^2-|QH|^2=|F_2H|^2=|F_1F_2|^2-|F_1H|^2,$$

即 $(2c+1)^2-5^2=(2c)^2-2^2$，解得 $c=5$，进而 $a=7$，$b=2\sqrt{6}$，因此椭圆 Γ 的短轴与长轴的比值为 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$.

7 设等边三角形 ABC 的内切圆半径为 2，圆心为 I. 若点 P 满足 $PI=1$，则 $\triangle APB$ 与 $\triangle APC$ 的面积之比的最大值为________.

解 由 $PI=1$ 知点 P 在以 I 为圆心的单位圆 K 上.



（第 7 题）

设 $\angle BAP=\alpha$. 在圆 K 上取一点 P_0，使得 α 取到最大值 α_0，此时 P_0 应落在 $\angle IAC$ 内，且是 AP_0 与圆 K 的切点. 由于 $0<\alpha\leqslant\alpha_0<\dfrac{\pi}{3}$，故

$$\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle APC}}=\frac{\frac{1}{2}AP\cdot AB\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}AP\cdot AC\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}\leqslant\frac{\sin\alpha_0}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha_0\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)},\qquad ①$$

其中，$\theta=\alpha_0-\frac{\pi}{6}=\angle IAP_0$.

由 $\angle AP_0I=\frac{\pi}{2}$ 知，$\sin\theta=\frac{IP_0}{AI}=\frac{1}{2r}=\frac{1}{4}$，于是 $\cot\theta=\sqrt{15}$，所以

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}&=\frac{\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}{\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}\\
&=\frac{\cot\theta+\sqrt{3}}{\cot\theta-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{\sqrt{15}-\sqrt{3}}\\
&=\frac{3+\sqrt{5}}{2}. \qquad ②
\end{aligned}
$$

根据①、②可知，当 $P=P_0$ 时，$\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle APC}}$ 的最大值为 $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

8 设 A、B、C、D 是空间四个不共面的点，以 $\frac{1}{2}$ 的概率在每对点之间连一条边，任意两对点之间是否连边是相互独立的，则 A、B 可用(一条边或者若干条边组成的)空间折线连接的概率为________.

解 每对点之间是否连边有 2 种可能，共有 $2^6=64$ 种情况. 考虑其中 A、B 可用折线连结的情况数.

(1) 有 AB 边：共 $2^5=32$ 种情况.

(2) 无 AB 边，但有 CD 边：此时 A、B 可用折线连结当且仅当 A 与 C、D 中至少一点相连，且 B 与 C、D 中至少一点相连，这

样的情况数为 $(2^2-1)\times(2^2-1)=9$.

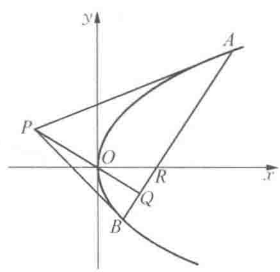
(3) 无 AB 边，也无 CD 边：此时 AC、CB 相连有 2^2 种情况，AD、DB 相连也有 2^2 种情况，但其中 AC、CB、AD、DB 均相连的情况被重复计了一次，故 A，B 可用折线连结的情况数为 $2^2+2^2-1=7$.

以上三类情况数的总和为 $32+9+7=48$，故 A、B 可用折线连结的概率为 $\frac{48}{64}=\frac{3}{4}$.

二、解答题(大题共 3 小题，共 56 分)

9 (16 分)平面直角坐标系 xOy 中，P 是不在 x 轴上的一个动点，满足条件：过 P 可作抛物线 $y^2=4x$ 的两条切线，两切点连线 l_P 与 PO 垂直.

设直线 l_P 与直线 PO，x 轴的交点分别为 Q、R.



(第 9 题)

(1) 证明 R 是一个定点；

(2) 求 $\frac{|PQ|}{|QR|}$ 的最小值.

解 (1) 设 P 点的坐标为 $(a, b)(b\neq 0)$，易知 $a\neq 0$. 记两切点 A、B 的坐标分别为 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)，则 PA、PB 的方程分别为

$$yy_1=2(x+x_1),\qquad ①$$

$$yy_2 = 2(x + x_2), \tag{②}$$

而点 P 的坐标(a, b)同时满足①、②，故 A、B 的坐标(x_1, y_1)、(x_2, y_2)均满足方程

$$by = 2(x + a). \tag{③}$$

故③就是直线 AB 的方程.

直线 PO 与 AB 的斜率分别为$\frac{b}{a}$与$\frac{2}{b}$，由 $PO \perp AB$ 知，$\frac{b}{a} \cdot \frac{2}{b} = -1$，故 $a = -2$.

从而③即为 $y = \frac{2}{b}(x - 2)$，故 AB 与 x 轴的交点 R 是定点 $(2, 0)$.

(2) 因为 $a = -2$，故直线 PO 的斜率 $k_1 = -\frac{b}{2}$，直线 PR 的斜率 $k_2 = -\frac{b}{4}$. 设 $\angle OPR = \alpha$，则 α 为锐角，且

$$\begin{aligned}
\frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{1}{\tan\alpha} &= \left|\frac{1 + k_1 k_2}{k_1 - k_2}\right| \\
&= \left|\frac{1 + \left(-\frac{b}{2}\right)\left(-\frac{b}{4}\right)}{-\frac{b}{2} + \frac{b}{4}}\right| \\
&= \frac{8 + b^2}{2|b|} \geqslant \frac{2\sqrt{8 \cdot b^2}}{2|b|} = 2\sqrt{2},
\end{aligned}$$

当 $b = \pm 2\sqrt{2}$ 时，$\frac{|PQ|}{|QR|}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

10 (20 分)数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{\pi}{6}$, $a_{n+1}=\arctan(\sec a_n)(n\in\mathbf{N}^*)$. 求正整数$m$,使得

$$\sin a_1\cdot\sin a_2\cdot\cdots\cdot\sin a_m=\frac{1}{100}.$$

解 由条件可知,对任意正整数n, $a_{n+1}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 且

$$\tan a_{n+1}=\sec a_n. \qquad ①$$

由于$\sec a_n>0$,故$a_{n+1}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 由 ① 得,$\tan^2 a_{n+1}=\sec^2 a_n=1+\tan^2 a_n$, 故

$$\tan^2 a_n=n-1+\tan^2 a_1=n-1+\frac{1}{3}=\frac{3n-2}{3},$$

即

$$\tan a_n=\sqrt{\frac{3n-2}{3}}.$$

因此

$$\begin{aligned}\sin a_1\cdot\sin a_2\cdot\cdots\cdot\sin a_m&=\frac{\tan a_1}{\sec a_1}\cdot\frac{\tan a_2}{\sec a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{\tan a_m}{\sec a_m}\\&=\frac{\tan a_1}{\tan a_2}\cdot\frac{\tan a_2}{\tan a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{\tan a_m}{\tan a_{m+1}}(\text{利用 ①})\\&=\frac{\tan a_1}{\tan a_{m+1}}=\sqrt{\frac{1}{3m+1}}.\end{aligned}$$

由 $\sqrt{\dfrac{1}{3m+1}}=\dfrac{1}{100}$,得 $m=3333$.

11 (20 分)确定所有的复数 α,使得对任意复数 z_1、z_2($|z_1|$, $|z_2|<1$, $z_1\neq z_2$),均有

$$(z_1+\alpha)^2+\alpha\bar{z}_1\neq(z_2+\alpha)^2+\alpha\bar{z}_2.$$

解 记 $f_\alpha(z)=(z+\alpha)^2+\alpha\bar{z}$,则

$$\begin{aligned}f_\alpha(z_1)-f_\alpha(z_2)&=(z_1+\alpha)^2+\alpha\bar{z}_1-(z_2+\alpha)^2-\alpha\bar{z}_2\\&=(z_1+z_2+2\alpha)(z_1-z_2)+\alpha(\bar{z}_1-\bar{z}_2).\quad①\end{aligned}$$

假如存在复数 z_1、z_2($|z_1|$, $|z_2|<1$, $z_1\neq z_2$),使得 $f_\alpha(z_1)=f_\alpha(z_2)$,则由①知,

$$|\alpha(\bar{z}_1-\bar{z}_2)|=|-(z_1+z_2+2\alpha)(z_1-z_2)|,$$

利用 $|\bar{z}_1-\bar{z}_2|=|\overline{z_1-z_2}|=|z_1-z_2|\neq0$ 知,

$$|\alpha|=|z_1+z_2+2\alpha|\geqslant2|\alpha|-|z_1|-|z_2|>2|\alpha|-2,$$

即 $|\alpha|<2$.

另一方面,对任意满足 $|\alpha|<2$ 的复数 α,令 $z_1=-\dfrac{\alpha}{2}+\beta\mathrm{i}$,$z_2=-\dfrac{\alpha}{2}-\beta\mathrm{i}$,其中 $0<\beta<1-\dfrac{|\alpha|}{2}$,则 $z_1\neq z_2$,而

$$\left|-\frac{\alpha}{2}\pm\beta\mathrm{i}\right|\leqslant\left|-\frac{\alpha}{2}\right|+|\beta|<1,$$

故 $|z_1|$, $|z_2|<1$. 此时将

$$z_1+z_2=-\alpha,\ z_1-z_2=2\beta\mathrm{i},\ \bar{z}_1-\bar{z}_2=\overline{2\beta\mathrm{i}}=-2\beta\mathrm{i}$$