拥有此书，便踏上了轻松学好数学的征程，便开始了良好思维习惯的培养

跟 **王金战** 轻松学数学

kg 宽高教育
www.kgedu.com

轻松搞定新高考

理科数学

新课标

王金战 庄肃钦 梁乾培 著

外语教学与研究出版社
北京

轻松学数学

你知道数学对青少年有多重要吗？

青少年时期是一个人智力开发的关键时期，数学的主要作用就是开发智力，所以加里宁说：数学是思维的体操。我从三十年的教学经历中发现，一个学生如果数学学得很轻松，即使成绩暂时落后，关键时刻往往会赶上来，但一个学生如果数学学得吃力，往往后劲不足。

上大学时我学的就是数学，毕业三十年来又一直教数学，越教越觉得数学好玩、好学，越教越觉得数学很美、很酷，以至于我常常被数学的波澜壮阔之势、高瞻远瞩之能、对称和谐之美、茅塞顿开之境所陶醉。但当我听到很多学生抱怨学数学很难、很累、很烦时，内心充满了帮他们走出误区的责任感。其实学数学完全可以是轻松快乐的。为了帮助广大的青少年找到轻松驾驭数学的方法。感受学习数学的乐趣，我联合了全国一批教学第一线的专家，和外研社一道，共同开发了这套从幼儿园一直到高三的轻松学数学系列辅导书。我自信地认为，这套书应该是国内首创也最适合青少年轻松阅读的。我们期望大家一旦拥有此书，便踏上了轻松学好数学的征程；我们期望，此书能帮助全中国的青少年形成良好的思维习惯。

如果我的理念得到了您的认可，您还可以到北京参加我所组织的“轻松学数学”特色辅导班。欢迎拨打我们的热线电话 010-82503431/82503185或者上宽高学习网（www.kgedu.com）了解相关课程情况。

王金战

序言

表面看来，高考命题有很大的随意性，但在我看来，高考命题有相当的确定性，看似扑朔迷离，其实规律蕴含其中。所以认真研究考试说明，认真研究近几年的高考题，就可以发现那种看似无形却有形，犹抱琵琶半遮面的高考命题规律，从而引领学生脱离题海，走向高效的高考复习之路。

如果不去分析高考题的特点，不去琢磨高考题的规律，一味地在题海战术里打拼，结果学生累得头脑昏昏，教师也累得叫苦连天，但是最后的结果往往是，一拿到高考卷子，老师就感叹这一年的力白出了，学生感觉高三这一年，似乎就是不做那些题目，也能得这些分。这些都说明我们由于一味地去搞题海战术，竟然把最重要的研究高考动向、高考命题规律这件事给耽误了。

编写此书之前，我们对近三年新课标地区所有的高考试卷进行了认真的梳理。通过梳理我们惊奇地发现，在高考涉及的120多个知识点中，有40多个知识点几乎每年都考，每份试卷都考，这应该是复习的重中之重。另有20多个知识点虽然《考试说明》中也列入考查范围，但几乎每年都不考，这些应该在复习中敢于舍弃。本书不追求知识点的面面俱到，而是突出对重点知识的强化提高、深刻挖掘，帮助考生找准主攻方向，减少时间浪费，达到高效复习的目的。

与《轻松搞定新高考》同时出版的还有《高考数学轻松突破120分》，如果把两者结合起来复习效果可能会更好。如果考生的数学实力很强，还请关注我即将出版的《高考数学难题破解策略》，相信这本书能帮你轻松征服压轴题，夺取数学高分。如果某些数学板块你还没有很好掌握，如立体几何，那么可以去看我即将出版的《轻松搞定高中数学》的“立体几何”分册。

如果这些书还是不能解决你的问题，可以给我们发邮件jz_maths@163.com 或QQ：1298443114咨询，会有专职老师提供辅导，帮助你解决。期待您的好消息。

王金战

目录

解析几何是高考的基本内容之一，在近三年新课标数学理科高考试卷中一直占有比较稳定的比例,最少的16分，最多的26分，平均每份试题19.2分.

立体几何是高考必考内容，且占有较高的比例. 在近三年新课标数学理科高考试卷中，最低的14分，最高的28分，平均每份试卷19.94分.

排列、组合、二项式定理是高考的基本内容之一，在近三年新课标数学理科高考试卷中一直占有一定的比例. 一般每份试卷有一道选择题或填空题，分值为5分，平均每份试题3.56分.

统计、概率在近三年新课标数学理科高考试卷中都占有较高的比重. 最少的14分，最多的23分，平均每份试题17.36分.

算法在近三年新课标数学理科高考试卷中都占有较稳定的比重. 25套新课标卷中有24套都考查了算法内容(只有北京卷没有考查算法)，占96%. 一般每套题都有一道5分的算法题目. 平均每份试题4.48分.

本章内容在近三年新课标数学理科高考试卷中都占有一定的比重，最少的占5分，最多的23分. 平均每份试题10.68分. 一般每套题都有1—2道选择题或填空题，多的则有3个小题，偶尔也会在解答题中出现.

在近三年新课标数学理科高考试卷中，除山东和浙江不作要求外，其他省份的20套卷都有考查. 在考查的试卷中，最少的占5分，最多的20分，平均每份试题10.8分.

第一章 集合

考点聚焦

考点	年份、省份、分值	频度
1 集合的含义与表示	10 浙 5,10 京 13	2
2 集合间的基本关系	08 鲁 5,09 苏 5, 10 湘 5,10 津 5,10 浙 5	5
3 集合的基本运算	08 苏 5,09 皖 5,09 闽 5,09 浙 5,09 辽 5,09 全国 5,09 粤 5,09 鲁 5, 10 陕 5,10 鲁 5,10 苏 5,10 辽 5,10 粤 5, 10 全国 5,10 京 5,10 皖 5	16

注:全书所标"全国"即"全国新课标卷","08 全国"即"2008 年宁夏(海南)卷","09 全国"即"2009 年宁夏(海南)卷","10 全国"即"2010 年宁夏(海南、黑龙江、吉林)卷".

命题规律

1. 分值比重分析

考查分值统计表

	山东	广东	全国	江苏	安徽	辽宁	福建	浙江	天津	北京	陕西	湖南	总计
2008	5	0	0	5	×	×	×	×	×	×	×	×	10
2009	5	5	5	5	5	5	5	5	0	×	×	×	40
2010	5	5	5	5	5	5	0	10	5	18	5	5	73
总计	15	10	10	15	10	10	5	15	5	18	5	5	123

从统计表可以看出,集合在每份试题中都占有稳定的比重,一般为一个小题,占 5 分. 平均每份试题有 4.92 分,占总分的 3.28%.

2. 考查内容和题型分析

集合是高考的基本内容之一,由于集合语言是现代数学的基本语言,使用集合语言,可以简洁、准确地表达数学的很多内容,因此还有不少的高考数学内容是用集合语言表述的.

集合部分主要考查集合的表示、集合间的基本关系、集合的基本运算,知识内容上多与不等式、不等关系联系.一般以选择题或填空题的形式进行考查,有时也会出现一些以集合为背景的解答题(如 2010 北京 20),这种解答题往往难度很大.

3. 对能力的考查要求

集合部分的试题难度一般为容易题,也有可能出现以集合为背景的难度较大的解答题.注重对基础知识和基本技能的考查,重视数形结合的思想的运用,要求考生会熟练的利用 Venn 图、数轴等工具解决集合的运算问题.

4. 复习指导

针对高考题的特点,复习时要加强对集合的表示的理解,对于题目给出用描述法表示的集合,能准确理解其含义,明确知道其中有哪些元素;要理解集合之间包含与相等关系的含义,能识别给定集合的子集;要理解集合之间交、并、补的含义并能熟练地进行集合间的交、并、补运算.重视数形结合思想的运用,能熟练地利用 Venn 图、数轴进行集合运算.此外,在进行集合运算和写出给定集合的子集时,一定要注意别忽略了空集.

精彩回放

考点 1 集合的含义与表示

画面 1 (2009 · 北京卷)设 D 是正$\triangle P_1P_2P_3$ 及其内部的点构成的集合,点 P_0 是$\triangle P_1P_2P_3$ 的中心.若集合$S=\{P|P\in D,|PP_0|\leqslant|PP_i|,i=1,2,3\}$,则集合 S 表示的平面区域是(　　)

A. 三角形区域　　B. 四边形区域

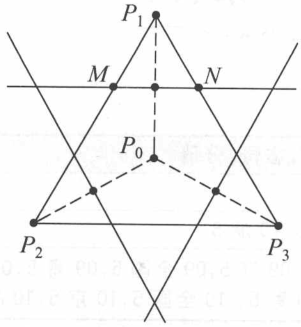
C. 五边形区域　　D. 六边形区域

【画外之音】本题主要考查集合的表示,考查数形结合的思想方法以及综合应用所学数学知识分析和解决问题的能力.本题设计新颖,知识的综合性强,需要考生综合应用所学数学知识对新颖的信息、情境和设问进行独立的思考与探究,创造性地解决问题.

【方法解析】

先来研究满足$|PP_0|\leqslant|PP_1|$的点 P 所在的区域.当$|PP_0|=|PP_1|$时,点 P 的轨迹为线段 P_1P_0 的中垂线 MN,因此,满足的点 P 在直线 MN 的下方(包括线

上). 同理, 分别作出线段 P_2P_0 和 P_3P_0 的中垂线, 满足 $|PP_0| \leqslant |PP_2|$ 和 $|PP_0| \leqslant |PP_3|$ 的点 P 应位于中垂线靠近点 P_0 的一侧(包括线上), 因此集合 S 表示的平面区域是六边形区域, 选 D.



【借题发挥】集合语言是现代数学的基本语言, 很多的高考数学内容都需要借助集合语言来表述, 因此, 集合部分内容的考查, 往往是以集合为载体, 综合考查其他数学知识. 在解决有关集合问题的过程中, 除了要认识题目中用描述法表示的集合外, 还需要综合运用所学知识来分析和解决问题. 这里一定要重视数形结合思想的运用.

【小试牛刀】集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$, $B=\{(x,y)\mid (x-3)^2+(y-4)^2=r^2\}$, 其中 $r>0$, 若 $A\cap B$ 中有且仅有一个元素, 则 r 的值是________.

画面 2 (2010 · 浙江卷) 设函数的集合 $P=\left\{f(x)=\log_2(x+a)+b \,\middle|\, a=-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1;b=-1,0,1\right\}$, 平面上点的集合 $Q=\left\{(x,y)\,\middle|\, x=-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1;y=-1,0,1\right\}$, 则在同一直角坐标系中, P 中函数 $f(x)$ 的图象恰好经过 Q 中两个点的函数的个数是 ( )

A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

【画外之音】本题以集合为背景, 主要考查函数的概念、定义域、值域、图像和对数函数的相关知识, 对考生的数学素养有较高要求, 体现了对综合数学能力的考查, 属中档题.

【方法解析】

将集合 Q 中表示的点描在坐标平面内得 12 个点, 对集合 P 中的 12 个函数分为 4 类, $a=0$, $a=-\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{2}$, $a=1$.

(1) $a=0$, 先画出 $y=\log_2 x$ 的图像, 当 $b=1$ 时, 将 $y=\log_2 x$ 的图像向上平移一个单位, 当 $b=-1$ 时, 将 $y=\log_2 x$ 的图像向下平移一个单位, 有 2 个函数符合题意.

(2) $a=-\frac{1}{2}$, 先将 $y=\log_2 x$ 的图像向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位, 当 $b=1$ 时, 将 $y=\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 图像向上平移一个单位, 当 $b=-1$ 时, 将 $y=\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 图像向下平移一个单位, 没有函数符合题意.

(3) $a=\frac{1}{2}$, 先将 $y=\log_2 x$ 的图像向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位, 当 $b=1$ 时, 将 $y=\log_2\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 图像向上平移一个单位, 当 $b=-1$ 时, 将 $y=\log_2\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 的图像向下平移一个单位, 有 2 个函数符合题意.

(4) $a=1$, 先将 $y=\log_2 x$ 的图像向左平移 1 单位, 当 $b=1$ 时, 将 $y=\log_2(x+1)$ 的图像向上平移一个单位, 当 $b=-1$ 时, 将 $y=\log_2(x+1)$ 的图像向下平移一个单位, 有 2 个函数符合题意.

共有 6 个函数符合题意, 故选 B.

【借题发挥】在解决有关集合问题的过程中, 最重要的是要认识题目中用描述法表示的集合, 要知道每一个集合是由什么样的元素组成的. 对于描述法表示的集合 $\{x\mid p(x)\}$, 我们首先要看集合中元素的一般形式 x, 再看集合中元素的公共属性 $p(x)$, 集合 $\{x\mid p(x)\}$ 就是由满足 $p(x)$ 的所有 x 组成的. 要能区别以下集合 (1) $\{x\mid y=x^2\}$ (2) $\{y\mid y=x^2\}$ (3) $\{(x,y)\mid y=x^2\}$. (1)是函数 $y=x^2$ 的定义域即 $\mathbf{R}$, (2)是函数 $y=x^2$ 的值域即 $\{y\mid y\geqslant 0\}$, 对于(3), 从几何意义上来说, 它表示函数 $y=x^2$ 图象(即抛物线)上所有点组成的集合, 从代数意义上来说, 它表示方程 $y=x^2$ 的所有解组成的集合. 在本题中, 集合 P 是由一类函数构成的函数集合, 集合 Q 是以点为元素构造成的集合, 本题考点定位在对数函数的图像和性质以及图像的平移变换, 集合 P 中有 12 个函数, 集合 Q 中有 12 个点, 宜先将集合 Q 中的点描在坐标系内, 然后利用分类讨论思想, 通过利用图像的平移变换来研究集合 P 中函数的图像, 选择从而得到正确答案.

【小试牛刀】若集合 $S=\{y\mid y=3^x, x\in\mathbf{R}\}$, $T=\{y\mid y=x^2-1, x\in\mathbf{R}\}$, 则 $S\cap T=$ ( )

A. S B. T C. $\varnothing$ D. 有限集

画面 3 (2010 · 北京卷) 已知集合 $S_n=\{X\mid X=(x_1,x_2,\cdots,x_n), x_i\in\{0,1\}, i=1,2,\cdots,n\}(n\geqslant 2)$. 对于 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in S_n$, 定义 A 与 B 的差为 $A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)$; A 与 B 之间的距离为 $d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$.

(1) 证明: $\forall A,B,C\in S_n$, 有 $A-B\in S_n$, 且 $d(A-C,B-C)=d(A,B)$;

(2) 证明: $\forall A,B,C\in S_n$, $d(A,B)$, $d(A,C)$, $d(B,C)$ 三个数中至少有一个是偶数;

(3) 设 $P\subseteq S_n$, P 中有 $m(m\geqslant 2)$ 个元素, 记 P 中所有两元素间距离的平均值为 $\bar{d}(P)$.

证明: $\bar{d}(P)\leqslant \frac{mn}{2(m-1)}$.

【画外之音】本题以集合作为背景和载体, 考查学生的抽象思维能力、分析理解能力、推理论证能力等, 是创

新型的难题.

【方法解析】

(1) 设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in S_n$.

$\because a_i,b_i\in\{0,1\}$，$\therefore a_i-b_i\in\{0,1\}$，$(i=1,2,\cdots,n)$，从而 $A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)\in S_n$.

又 $d(A-C,B-C)=\sum\limits_{i=1}^{n}\|a_i-c_i|-|b_i-c_i\|$，

由题意知 $a_i,b_i,c_i\in\{0,1\}(i=1,2,\cdots,n)$.

当 $c_i=0$ 时，$\|a_i-c_i|-|b_i-c_i\|=|a_i-b_i|$；

当 $c_i=1$ 时，$\|a_i-c_i|-|b_i-c_i\|=|(1-a_i)-(1-b_i)|=|a_i-b_i|$.

$\therefore d(A-C,B-C)=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|=d(A,B)$.

(2) 设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in S_n$，

$d(A,B)=k$，$d(A,C)=l$，$d(B,C)=h$.

记 $O=(0,0,\cdots,0)\in S_n$，由(1)可知，

$d(A,B)=d(A-A,B-A)=d(O,B-A)=k$，

$d(A,C)=d(A-A,C-A)=d(O,C-A)=l$，

$d(B,C)=d(B-A,C-A)=h$.

$\therefore |b_i-a_i|(i=1,2,\cdots,n)$ 中 1 的个数为 k，$|c_i-a_i|(i=1,2,\cdots,n)$ 的 1 的个数为 l.

设 t 是使 $|b_i-a_i|=|c_i-a_i|=1$ 成立的 i 的个数，则 $h=l+k-2t$，

由此可知，k,l,h 三个数不可能都是奇数，

即 $d(A,B)$，$d(A,C)$，$d(B,C)$ 三个数中至少有一个是偶数.

(3) $\overline{d}(P)=\frac{1}{C_m^2}\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)$，其中 $\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)$ 表示 P 中所有两个元素间距离的总和，设 P 中所有元素的第 i 个位置的数字中共有 t_i 个 1，$m-t_i$ 个 0.

则 $\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i(m-t_i)$，

由于 $t_i(m-t_i)\leqslant\frac{m^2}{4}(i=1,2,\cdots,n)$，

$\therefore \sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)\leqslant\frac{nm^2}{4}$，

从而 $\overline{d}(P)=\frac{1}{C_m^2}\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)\leqslant\frac{nm^2}{4C_m^2}=\frac{mn}{2(m-1)}$.

【借题发挥】本题是创新型问题，背景非常新颖，考生在平常的学习过程中是很少能见到的，考生对此类问题往往缺少已有的解题经验为借鉴，也因此类问题最能考查学生的理解能力与分析问题解决问题的能力. 在解决此类问题时要仔细读题审题，正确理解试题所表达的含义，特别是一些新定义的数学概念，这些概念往往是解题的核心依据.

【小试牛刀】设 S 为复数集 $\mathbf{C}$ 的非空子集. 若对任意 $x,y\in S$，都有 $x+y,x-y,xy\in S$，则称 S 为封闭集. 下列命题：

① 集合 $S=\{a+bi\}(a,b$ 为整数，i 为虚数单位$)$为封闭集；

② 若 S 为封闭集，则一定有 $0\in S$；

③ 封闭集一定是无限集；

④ 若 S 为封闭集，则满足 $S\subseteq T\subseteq\mathbf{C}$ 的任意集合 T 也是封闭集.

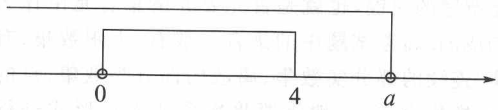
其中真命题是__________(写出所有真命题的序号).

考点 2　集合间的基本关系

画面 4　(2009·江苏卷)已知集合 $A=\{x|\log_2x\leqslant2\}$，$B=(-\infty,a)$，若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是 $(c,+\infty)$，其中 $c=$__________.

【画外之音】本题主要考查对数不等式、集合的子集的含义. 对于利用不等式表示的集合，一般都可以借助数轴来直观的表示，从而便于研究.

【方法解析】$A=\{x|\log_2x\leqslant2\}=\{x|0<x\leqslant4\}$，$B=(-\infty,a)$，若 $A\subseteq B$，画出如图所示的数轴，可得 a 的取值范围是 $(4,+\infty)$，又 $\because a$ 的取值范围是 $(c,+\infty)$，$\therefore c=4$.



【借题发挥】从本题中可以看出数形结合的思想在解决集合有关问题中的作用. 利用不等式表示的集合，一般可以借助数轴来进行研究，而抽象集合一般借助 Venn 图来进行研究.

以基本初等函数为载体，求函数的定义域、值域或求函数不等式的解集，并以所得集合为基础进行集合间的运算，是重要的命题形式，该类型问题一般为基础型问题，只要对基本概念清楚，看清题意，就可顺利解答. 这类问题的解题过程是先化简集合，然后进行集合间的运算. 如果是选择题且选项是以区间的形式给出的，那么还可以采用特殊值法来解决，根据选项的区别选择特殊值代入检验，从而排除错误选项得到正确答案.

【小试牛刀】已知集合 $A=\{x|1<x\leqslant2\}$，$B=\{x|x\geqslant a\}$，且 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是__________.

画面 5　(2010·天津卷)设集合 $A=\{x\|x-a|<1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\|x-b|>2,x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\subseteq B$，则实数 a,b 必满足　　(　　)

A. $|a+b|\leqslant3$　　B. $|a+b|\geqslant3$

C. $|a-b|\leqslant3$　　D. $|a-b|\geqslant3$

【画外之音】本题主要考查绝对值不等式、集合之间的包含关系，以及数形结合和运动与变化的思想.

【方法解析】$A=\{x|a-1<x<a+1\}$，$B=\{x|x<b-2$ 或 $x>b+2\}$，因为 $A\subseteq B$，所以 $a+1\leqslant b-2$ 或 $a-1\geqslant b+2$，所以 $a-b\leqslant-3$ 或 $a-b\geqslant3$，即 $|a-b|\geqslant3$，故选 D.

【借题发挥】本题为已知集合 A,B 之间的关系求字母

所满足的条件，集合是绝对值不等式的解集，需先化简集合，即求出不等式的解集.这类问题要充分注意数形结合，用数轴帮助解题，将抽象问题直观化.还可以从运动与变化的观点来认识：集合 A 表示以 a 为中点长度为 2 的开区间，中点 a 的运动带动区间的运动，集合 B 表示以 b 为中点长度为 4 的闭区间两侧的两条射线，中点 b 的运动也带动区间的运动.

【小试牛刀】 已知集合 $A=\{x \parallel x-a|\leqslant 1\}$，$B=\{x|x^2-5x+4\geqslant 0\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是______.

考点 3　集合的基本运算

画面 6　(2010·北京卷) 集合 $P=\{x\in \mathbf{Z}|0\leqslant x<3\}$，$M=\{x\in \mathbf{Z}|x^2\leqslant 9\}$，则 $P\cap Q=$　　　(　　)

A. $\{1,2\}$　　B. $\{0,1,2\}$

C. $\{x|0\leqslant x<3\}$　　D. $\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$

【画外之音】 本题考查集合的交集运算，是容易题.

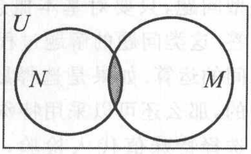
【方法解析】 集合 $P=\{0,1,2\}$，$Q=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，则 $P\cap Q=\{0,1,2\}$，故选 B.

【借题发挥】 在解决集合问题时，看清集合中元素的特性是解题的关键，也就是首先要弄清集合是由什么元素构成的.高考试题中的集合一般有：无限数集、有限数集、连续的部分实数集、离散的部分整数集、点的集合、函数集合等，一般需要将集合的表示形式进行转化.本题是由部分整数构成的集合，需将集合的表示形式由描述法转换为列举法.

【小试牛刀】 设合集 $A=\left\{(x,y)\left|\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1\right.\right\}$，$B=\{(x,y)|y=3^x\}$，则 $A\cap B$ 的子集的个数是　　(　　)

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

画面 7　(2009·广东卷) 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x|-2\leqslant x-1\leqslant 2\}$ 和 $N=\{x|x=2k-1,k=1,2,\cdots\}$ 的关系的韦恩 (Venn) 图如图所示，则阴影部分所示的集合的元素共有　　(　　)



A. 3 个　　B. 2 个

C. 1 个　　D. 无穷个

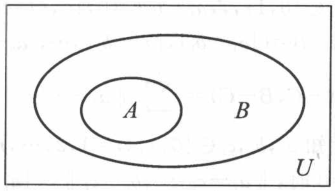
【画外之音】 本题主要考查集合间的基本关系以及利用 Venn 图来表示集合之间的关系.本题虽然是考查集合部分最基本的内容，但是设计新颖，不落俗套，巧妙地将集合间的基本关系与 Venn 图结合起来，是集合部分近年不可多见的好题.题目不难，考查了考生对集合间的基本关系的理解和数形结合的数学思想.

【方法解析】 $M=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，$N=\{x|x=2k-1,k=1,2,\cdots\}=\{1,3,5,7,\cdots\}$，$N\cap M=\{1,3\}$，选 B.

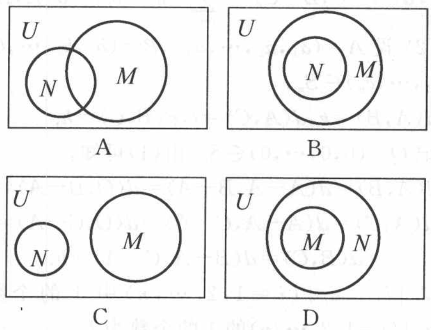
【借题发挥】 Venn 图是集合的几何表示，利用 Venn 图可以很直观地表达集合间的关系及进行集合的基本运算，因此，在解决集合有关的问题时，一定要重视数形结合，重视 Venn 图的作用.特别是对于抽象集合，借助 Venn 图来进行研究更显得直观、方便.

结合 Venn 图，容易得出以下重要结论：

$$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$$



【小试牛刀】 已知全集 $U=\mathbf{R}$，则正确表示集合 $M=\{-1,0,1\}$ 和 $N=\{x^2|x^2+x=0\}$ 关系的韦恩(Venn)图是　　(　　)

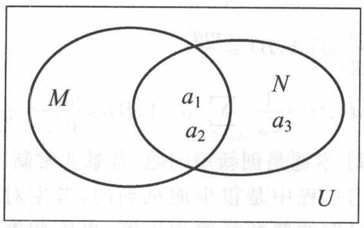


画面 8　(2008·山东卷) 满足 $M\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，且 $M\cap\{a_1,a_2,a_3\}=\{a_1,a_2\}$ 的集合 M 的个数是　　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【画外之音】 本题主要考查集合的子集以及两个集合的交集的含义.本题是集合部分内容的典型问题，也是最基本的考查内容.从数形结合的角度，可以利用 Venn 图来解决；由于 M 的个数不多，也可考虑直接列举出 M 的所有情形.

【方法解析】 解法一：画出如图所示的 Venn 图，全集 $U=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$N=\{a_1,a_2,a_3\}$，a_4 可以在 $M\cap \complement_U N$ 中，也可以在 $\complement_U(M\cup N)$ 中，因此 $M=\{a_1,a_2\}$ 或 $M=\{a_1,a_2,a_4\}$，选 B.



解法二：由题意，$a_1,a_2\in M$，但 $a_3\notin M$，

又∵ $M\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，

∴ $M=\{a_1,a_2\}$ 或 $M=\{a_1,a_2,a_4\}$，选 B.

【借题发挥】 要掌握如下结论：含有 n 个元素的集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 有 2^n 个子集，有 2^n-1 个真子集，有 2^n-2 个非空真子集.如果上题改为：$M\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7\}$，且 $M\cap\{a_1,a_2,a_3\}=\{a_1,a_2\}$，则 M 的个数是多

少？此时如果一一列出满足题意的 M 是很繁琐的.但我们利用上述结论可以很容易地解决.

由 $M\cap\{a_1,a_2,a_3\}=\{a_1,a_2\}$ 知，$a_1,a_2\in M$，但 $a_3\notin M$，

又∵$M\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7\}$，

∴$M=\{a_1,a_2\}\cup(\{a_4,a_5,a_6,a_7\}$的子集).

又∵$\{a_4,a_5,a_6,a_7\}$的子集有 2^4 即 16 个，

∴M 的个数为 16.

【小试牛刀】设 $U=\{0,1,2,3\}$，$A=\{x\in U\mid x^2+mx=0\}$，若 $\complement_U A=\{1,2\}$，则实数 $m=$________.

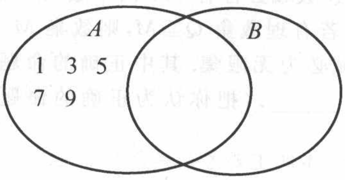
画面 9 (2009·天津卷)设全集 $U=A\cup B=\{x\in\mathbf{N}^*\mid \lg x<1\}$，若 $A\cap\complement_U B=\{m\mid m=2n+1,n=0,1,2,3,4\}$，则集合 $B=$________.

【画外之音】本题主要考查对数不等式、集合的表示、集合的交集、并集、补集.由于集合 B 是未知的，因此，利用数形结合的思想，画出 Venn 图来解决比较简便.

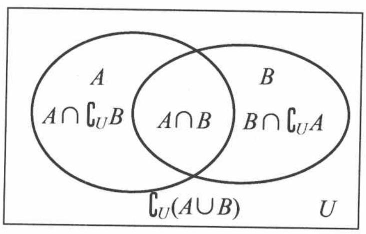
【方法解析】

$U=A\cup B=\{x\in\mathbf{N}^*\mid\lg x<1\}=\{x\in\mathbf{N}^*\mid 0<x<10\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A\cap\complement_U B=\{m\mid m=2n+1,n=0,1,2,3,4\}=\{1,3,5,7,9\}$，

如图所示，$B=\{2,4,6,8\}$.



【借题发挥】本题的解决充分利用了 Venn 图的直观性.设 U 为全集，集合 A、B 是 U 的子集，要掌握如下体现集合 A、B 关系的 Venn 图：



从 Venn 图可以看出，全集 U 被分为了 4 部分，若已知 U 及其中的 3 部分，则可求得剩下的 1 部分.此外，还应通过 Venn 图了解如下结论：

$$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$$

$$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$$

【小试牛刀】已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{2,4,5,7\}$，$B=\{3,4,5\}$，则 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$________.

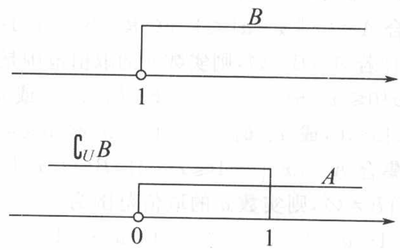
画面 10 (2009·浙江卷)设 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x>0\}$，$B=\{x\mid x>1\}$，则 $A\cap(\complement_U B)=$ ( )

A. $\{x\mid 0\leqslant x<1\}$ **B.** $\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$

C. $\{x\mid x<0\}$ **D.** $\{x\mid x>1\}$

【画外之音】本小题主要考查了集合中的补集、交集.本题属于集合的基本运算中的典型问题，也是最基本、最重要的考查内容.题目很简单，根据题目中集合的特点，可以画出数轴来解决.这里也体现了数形结合的思想.

【方法解析】



方法一：如图，通过画出数轴，可先求得 $\complement_U B=\{x\mid x\leqslant 1\}$，进而可以求得 $A\cap(\complement_U B)=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$，故选 B.

方法二：当 $x=1$ 时，$x\in A$ 且 $x\in\complement_U B$，则 $x=1\in A\cap(\complement_U B)$，故选 B.

【借题发挥】画数轴进行集合的基本运算时，容易出现把端点的取值弄错的情形，比如上题中考生容易把 $\complement_U B=\{x\mid x\leqslant 1\}$ 错写成 $\complement_U B=\{x\mid x<1\}$，从而得到错误的结果.因此在答题时一定要注意检查端点是否画正确，端点的值是否取得到.此外，对于选择支是由区间形式给出的选择题，除可以用直接法(比如方法一)求解外，还可以用特殊值检测法(比如方法二)，在比较选项的区别的基础上选择特殊值进行检测，从而选出正确答案.这就是从结论入手的间接法，此类方法在解决选择题时非常有效.

【小试牛刀】已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid x<-1$ 或 $x>4\}$，那么集合 $A\cap(\complement_U B)$ 等于 ( )

A. $\{x\mid -2\leqslant x<4\}$ B. $\{x\mid x\leqslant 3$ 或 $x\geqslant 4\}$

C. $\{x\mid -2\leqslant x<-1\}$ D. $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$

一展身手

1. 已知集合 $U=\{1,3,5,7,9\}$，$A=\{1,5,7\}$，则 $\complement_U A=$ ( )

A. $\{1,3\}$ B. $\{3,7,9\}$

C. $\{3,5,9\}$ D. $\{3,9\}$

2. 集合 $A=\{0,2,a\}$，$B=\{1,a^2\}$，若 $A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$，则 a 的值为 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

3. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x\mid x^2-4\leqslant 0\}$，则 $\complement_U M=$ ( )

A. $\{x\mid -2<x<2\}$ B. $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$

C. $\{x\mid x<-2$ 或 $x>2\}$ D. $\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 2\}$

4. 设 $P=\{x|x<1\}$，$Q=\{x|x^2<4\}$，则 $P\cap Q=$ （　　）

A. $\{x|-1<x<2\}$　　B. $\{x|-3<x<-1\}$

C. $\{x|1<x<-4\}$　　D. $\{x|-2<x<1\}$

5. 设集合 $A=\{x|x>-1\}$，$B=\{x|-2<x<2\}$，则 $A\cup B=$ （　　）

A. $\{x|x>-2\}$　　B. $\{x|x>-1\}$

C. $\{x|-2<x<-1\}$　　D. $\{x|-1<x<2\}$

6. 设集合 $A=\{x\,\|\,x-a|<1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|1<x<5,x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\{a|0\leqslant a\leqslant 6\}$　　B. $\{a|a\leqslant 2$ 或 $a\geqslant 4\}$

C. $\{a|a\leqslant 0$，或 $a\geqslant 6\}$　　D. $\{a|2\leqslant a\leqslant 4\}$

7. 已知集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x<2\}$，$B=\{x\mid x<a\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则实数 a 的取值范围为　（　　）

A. $-1<a\leqslant 2$　　B. $a>-1$

C. $a>-2$　　D. $a\geqslant 2$

8. 若 $M\cup N=M$，$P\cap Q=P$，则　（　　）

A. $M\subseteq N,P\subseteq Q$　　B. $N\subseteq M,P\subseteq Q$

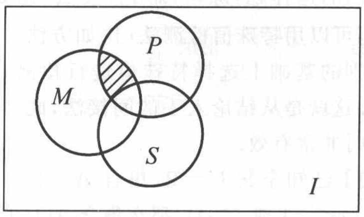
C. $M\subseteq N,Q\subseteq P$　　D. $N\subseteq M,Q\subseteq P$

9. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A\subseteq U$，$B\subseteq U$，且 $B\cap\complement_U A=\{1,9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{4,6,8\}$，那么 A、B 分别为　（　　）

A. $\{2,3,5,7\}$、$\{1,2,9\}$　　B. $\{1,2,9\}$、$\{2,3,5,7\}$

C. $\{2,3,5,7\}$、$\{2,9\}$　　D. $\{2,5,7\}$、$\{1,2,9\}$

10. 若集合 M、P、S 是全集 I 的子集，则图中阴影部分表示的集合为　（　　）



A. $(M\cap P)\cap S$　　B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap\complement_I S$　　D. $(M\cap P)\cup\complement_I S$

11. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid ax+b\neq 0\}$，$B=\{x\mid cx+d\neq 0\}$，则集合 $\{x\mid (ax+b)(cx+d)=0\}$ 等于　（　　）

A. $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$　　B. $B\cup\complement_U A$

C. $A\cup\complement_U B$　　D. $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$

12. 集合 $M=\left\{x\middle|x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\middle|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则　（　　）

A. $M=N$　　B. $M\subseteq N$

C. $M\supseteq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

13. 定义集合运算：$A\odot B=\{z\mid z=xy(x+y),x\in A,y\in B\}$，设集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{2,3\}$，则集合 $A\odot B$ 的所有元素之和为　（　　）

A. 0　　B. 6　　C. 12　　D. 18

14. 设集合 $A=\{-1,1,3\}$，$B=\{a+2,a^2+4\}$，$A\cap B=\{3\}$，则实数 $a=$________.

15. 两个集合 A 与 B 之差记作“$A-B$”，定义 $A-B=\{x\mid x\in A$，且 $x\notin B\}$，如果集合 $A=\{x\mid 0<x<2\}$，$B=\{x\mid -1<x-2<1\}$，则 $A-B=$________.

16. 若全集 $U=\mathbf{R}$，$f(x)$、$g(x)$ 均为 x 的一次函数，$P=\{x\mid f(x)<0\}$，$Q=\{x\mid g(x)\geqslant 0\}$，则不等式组 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)<0\end{cases}$ 的解集可用 P、Q 表示为________.

17. 设 A 是整数集的一个非空子集，对于 $k\in A$，如果 $k-1\notin A$ 且 $k+1\notin A$，那么 k 是 A 的一个“孤立元”，给定 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，由 S 的 3 个元素构成的所有集合中，不含“孤立元”的集合共有________个.

18. 若 A、B、C 为三个集合，$A\cup B=B\cap C$，则集合 A、C 之间的包含关系是________.

19. 设 P 是一个数集，且至少含有两个数，若对任意 a、$b\in P$，都有 $a+b$、$a-b$、ab、$\frac{a}{b}\in P$（除数 $b\neq 0$），则称 P 是一个数域，例如有理数集 Q 是数域，有下列命题：① 数域必含有 0，1 两个数；② 整数集是数域；③ 若有理数集 $Q\subseteq M$，则数集 M 必为数域；④ 数域必为无限集. 其中正确的命题的序号是________.（把你认为正确的命题的序号都填上）

第二章 函数与导数

考点聚焦

考点	年份、省份、分值	频度
1 函数的概念及其表示	09 全国 5,10 粤 5,10 陕 10	3
2 函数的基本性质	09 鲁 10,09 辽 5,09 闽 5,10 皖 5,10 闽 5,10 粤 5,10 湘 5,10 苏 10,10 鲁 5,10 津 5,10 京 5,10 全国 10	12
3 函数的图像及其变换	08 鲁 10,09 鲁 5,09 粤 5,09 皖 5,10 鲁 5	5
4 二次函数	09 苏 16,09 津 5,09 闽 5,10 皖 5,10 湘 13,10 辽 5,10 津 4	7
5 幂函数、指数与对数函数	08 苏 13,09 粤 5,09 苏 5,09 辽 5,10 闽 5,10 津 5,10 全国 5,10 浙 5	8
6 函数与方程	09 鲁 5,09 津 5,10 闽 5,10 津 5,10 浙 5	5
7 导数的几何意义	08 全国 12,08 苏 5,09 苏 5,09 辽 5,09 闽 5,09 皖 5,10 辽 5,10 全国 5	8
8 导数的运算及其应用	08 鲁 12,08 粤 19,08 苏 5,09 粤 14,09 全国 12,09 苏 5,09 津 12,09 辽 12,09 浙 14,09 闽 14,09 皖 12,10 皖 12,10 京 13,10 闽 14,10 苏 16,10 辽 12,10 鲁 14,10 陕 14,10 津 14,10 全国 12,10 浙 12	21
9 函数的应用问题	08 苏 12,09 鲁 12,09 苏 16,09 浙 5	4
10 定积分及其应用	08 鲁 4,08 全国 5,09 闽 5,10 湘 5,10 全国 5,10 鲁 5,10 陕 5	7

命题规律

1. 分值比重分析

考查分值统计表

	山东	广东	全国	江苏	安徽	辽宁	福建	浙江	天津	北京	陕西	湖南	总计
2008	26	19	17	35	×	×	×	×	×	×	×	×	97
2009	32	24	17	47	22	27	34	19	22	×	×	×	244
2010	29	10	36	26	22	22	24	22	33	18	29	23	294
总计	87	53	70	108	44	49	58	41	55	18	29	23	635

从统计表可以看出，函数与导数在近三年大部分新课标考卷中都占有很高的比重. 一般的试卷占 20 多分，最多达 47 分，平均每份试卷有 25.4 分，占总分的 16.9%.

2. 考查内容和题型分析

函数与导数是高中数学的主干知识，是每年高考的必考内容，在实施新课标的省份仍然是如此，在近三年新课标 25 套卷中考查的频度都很高，高考对函数的考查主要体现在以下三个方面：

一是考查函数的图像和性质，对于函数的单调性、奇偶性、周期性、对称性，单纯考查某一性质和综合性质的题目都有涉及，具体以幂函数、指数函数、对数函数、一次函数、二次函数、多项式函数、分段函数、复合函数和抽象函数等形式的函数为载体，“小题目综合化”是这部分内容的一大命题趋势，综合考查函数的性质及图像变换，题型以选择、填空题为主，题目难度中等以上.

二是考查利用导数研究函数的单调性，极值、最值问题，这类题目多是以解答题形式出现，而且难度比较大，对考生的数学能力要求较高，试题的区分度较好.

三是考查函数的实际应用，多以解答题形式出现，利用导数为工具求函数最值，重在考查学生综合运用所学知识分析和解决问题的能力，尽管函数应用从考查频度上不占优势，但这部分内容往往是高考容易推陈出新的地方，同样不容忽视.

3. 对能力的考查要求

函数是高中数学的重要主干知识，除了本身知识内容的复杂广泛外，它还和其它许多数学知识都有着密切的联系，有着很强的前导性和辐射性，更蕴涵着大量的数学思想方法，如函数与方程、数形结合、转化与化归、分类与整合、待定系数法、配方法、换元法等，高考对函数内容的考查，无论是以解答题形式还是选择填空题形式出现，大

多以中等以上难度的试题出现，对考生的思维和运算能力等基本数学素养和综合运用所学知识分析和解决问题的能力都有很高的要求.

4. 复习指导

函数是高中数学最重要的内容，是初等数学与高等数学的主要衔接部分，同时也是贯穿了整个中学数学的一根主线，具有概念性强、内容丰富、与其他知识(特别是方程、不等式、导数等知识)联系广泛等特点，对函数内容的学习怎么重视都不过分. 函数的性质、函数的图象和函数的综合应用在每年高考中都炙手可热，特别是二次函数已经成为高考永恒的主题，近年来高考试题对函数的考查更加灵活，函数与不等式、函数与数列、函数与解析几何、函数与三角，甚至是函数与向量相结合的问题都层出不穷，除了传统考查形式外，花样还不断翻新，已经发展到了挖掘函数本质、活用性质、新定义和新情境等高层次水平上. 函数部分复习时要准确把握函数的概念并能灵活应用. 深刻理解函数的性质，会用函数的性质解决相关问题. 要注重基础知识的掌握，特别是指数函数、对数函数与幂函数，要把这些函数的性质结合其图象找出规律，理解记忆，并能做到在综合问题中灵活应用. 要重视数学逻辑方法和具体数学方法的学习训练，如归纳法、演绎法、反证法、分析法、综合法、一般问题特殊化、抽象的问题具体化、复杂的问题简单化、配方法、待定系数法、换元法、构造法等.

导数是高等数学的最为基础的内容，是中学必选的重要知识之一. 由于导数应用的广泛性，可为解决所学过的函数问题提供更有效的工具或更具一般性的方法，并且导数方法与初等数学方法相比对技巧性的要求有所降低，因此运用导数方法可以简捷地解决相关(函数)问题. 有时就好比杀鸡用牛刀，不费吹灰之力即可解决以往非常复杂的问题. 可以说导数的加入使函数这部分内容更加充盈，也显得更加重要. 对于导数这部分内容的复习，要准确理解导数的概念及其几何意义，会求函数图象在某点处的切线，掌握导数的四则运算和导数公式并能熟练地进行求导运算，掌握利用导数研究函数的单调性、极值、最值的一般步骤，并能在函数综合问题中灵活应用. 此外，由于新课标高考强调函数的实际应用，因此要重视导数在解决实际问题中的作用，会利用导数解决某些实际问题.

精彩回放

考点1 函数的概念及其表示

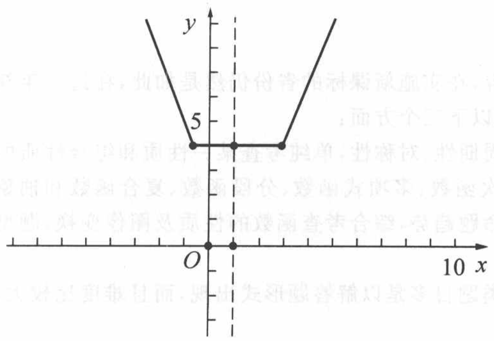
画面1 (2008·山东卷)设函数 $f(x)=|x+1|+|x-a|$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则 a 的值为 ( )

A. 3　　B. 2

C. 1　　D. -1

【画外之音】函数解析式与图像是函数的“数”与“形”两种表现形式，本题研究的是函数图像的对称性，我们首先要思考的则是函数的解析式.

【方法解析】函数的图像为折线段，



当 $a=-1$ 时，$f(x)=2|x+1|$，函数图像的对称轴为 $x=-1$.

当 $a<-1$ 时，$f(x)=|x+1|+|x-a|=\begin{cases}-2x+a-1, x<a\\ -1-a, a\leqslant x<-1,\\ 2x-a+1, x\geqslant -1\end{cases}$

当 $a>-1$ 时，$f(x)=|x+1|+|x-a|=\begin{cases}-2x+a-1, x<-1\\ 1+a, -1\leqslant x<a\\ 2x-a+1, x\geqslant a\end{cases}$.

这两种情形下，函数图像的对称轴都为 $x=\dfrac{-1+a}{2}$，

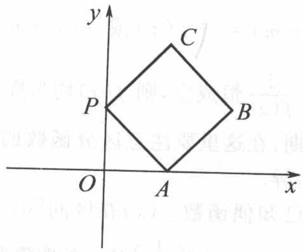
若函数 $f(x)=|x+1|+|x-a|$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则 $a=3$，故选 A.

【借题发挥】分段函数是函数解析式的一种重要形式，一般的，在函数解析式中含有绝对值的函数，都可以转化为分段函数. 本题中函数的图像是折线，折点的横坐标分别为 -1、a，根据运动与变化的观点，当参数 a 变化时，函数图像的形状和位置也发生变化，若函数 $f(x)=|x+1|+|x-a|$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则两个折点关于直线 $x=1$ 对称，可得到 $a=3$. 本题作为选择题，在了解图像基本形状的基础上，还可以将选项代入进行检验，从而快速得到答案.

【小试牛刀】已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+1, x<1\\ x^2+ax, x\geqslant 1\end{cases}$，若 $f(f(0))=4a$，则实数 a 等于 ( )

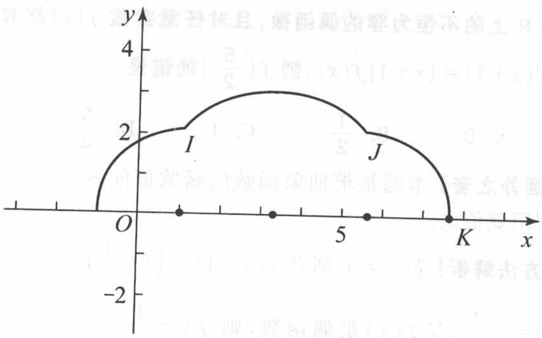
A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{4}{5}$　　C. 2　　D. 9

画面2 (2010·北京卷)如图放置的边长为1的正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动. 设顶点 $P(x,y)$ 的轨迹方程是 $y=f(x)$，则 $f(x)$ 的最小正周期为______；$y=f(x)$ 在其两个相邻零点间的图像与 x 轴所围区域的面积为______.



【画外之音】函数的解析式也可以看作动点的轨迹方程，本题需要先了解动点的轨迹形状.

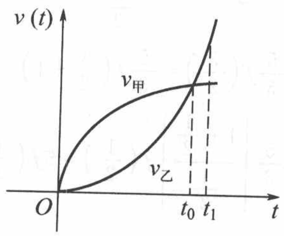
【方法解析】根据本题的规定，动点的轨迹为由几段圆弧组成的分段图形，其函数的解析式则是分段函数，其中一个周期的图像如下：



因此，其周期为 4，$y=f(x)$ 在其两个相邻零点间的图像与 x 轴所围区域的面积为 $\pi+1$.

【借题发挥】本题体现了运动与变化的观点，对学生的思维能力要求较高，如果学生能利用正方形纸片亲自动手按要求滚动，则其轨迹图像可很容易画出. 思维难度明显降低.

【小试牛刀】已知甲、乙两车由同一起点同时出发，并沿同一路线(假定为直线)行驶. 甲车、乙车的速度曲线分别为 $v_{甲}$ 和 $v_{乙}$，如图所示. 那么对于图中给定的 t_0 和 t_1，下列判断中一定正确的是　　(　　)



A. 在 t_1 时刻，甲车在乙车前面

B. t_1 时刻后，甲车在乙车后面

C. 在 t_0 时刻，两车的位置相同

D. t_0 时刻后，乙车在甲车前面

考点 2　函数的基本性质

画面 3　(2010 · 全国卷)设偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x^3-8(x\geqslant 0)$，则 $\{x|f(x-2)>0\}=$　　(　　)

A. $\{x|x<-2$ 或 $x>4\}$

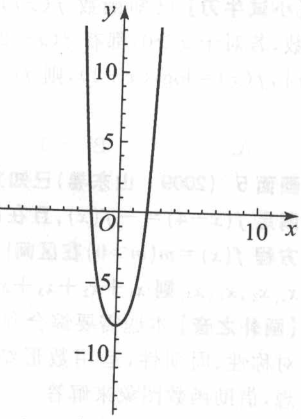
B. $\{x|x<0$ 或 $x>4\}$

C. $\{x|x<0$ 或 $x>6\}$

D. $\{x|x<-2$ 或 $x>2\}$

【画外之音】研究函数要特别重视数形结合思想的运用，重视图像的直观性价值，解本题时可利用函数性质首先确定图像的基本形状，然后结合图像解不等式.

【方法解析】偶函数 $f(x)=x^3-8(x\geqslant 0)$ 的图像如图，



函数 $f(x-2)$ 的图像就是将函数 $f(x)$ 的图像向右平移 2 个单位，

$f(x)>0$ 的解为 $x>2$ 或 $x<-2$.

$\therefore f(x-2)>0$ 的解为 $x>4$ 或 $x<0$，选 B.

【借题发挥】利用函数的性质确定函数图像的形状，然后利用函数图像解不等式，是一种重要的数形结合思想方法，可直观快捷的解决问题，本题作为选择题可通过特值检验法快速选择答案. 一般来说，凡答案用区间给出的选择题，均可以考虑特值法，如本题可以取 $x=5$，$f(5-2)=f(3)=3^3-8>0$，合题意(满足 $f(x-2)>0$)，排除选项 C；取 $x=3$，$f(3-2)=f(1)=1^3-8<0$，不合题意(不满足 $f(x-2)>0$)，排除选项 D；取 $x=-1$，$f(-1-2)=f(-3)=f(3)=3^3-8>0$，合题意(满足 $f(x-2)>0$)，排除选项 A.

【小试牛刀】奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，若 $f(-1)=0$，则不等式 $f(x+2)<0$ 的解集是　　(　　)

A. $(-\infty,-3)\cup(-2,-1)$

B. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

C. $(-3,-2)\cup(-1,+\infty)$

D. $(-\infty,1)\cup(2,3)$

画面 4　(2009 · 山东卷)定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}\log_2(1-x), x\leqslant 0\\ f(x-1)-f(x-2), x>0\end{cases}$，则 $f(2009)$ 的值为　　(　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

【画外之音】本题考查归纳推理以及函数的周期性和对数的运算. 本题中求 $f(2009)$ 的值应首先联想到函数的周期性.

【方法解析】由已知得 $f(-1)=\log_2 2=1$，$f(0)=0$，$f(1)=f(0)-f(-1)=-1$，$f(2)=f(1)-f(0)=1$，$f(3)=f(2)-f(1)=-1-(-1)=0$，$f(4)=f(3)-f(2)=0-(-1)=1$，$f(5)=f(4)-f(3)=1$，$f(6)=f(5)-f(4)=0$，

所以函数 $f(x)$ 的值以 6 为周期重复性出现，所以 $f(2009)=f(5)=1$，故选 C.

【借题发挥】本题利用了转化思想，将自变量 $x=2009$ 对

应的函数值转化为自变量取非正值时的函数值，转化的依据则是函数的周期性，而周期性是通过归纳推理获得的．根据数列与函数的关系，可得到一个数列的递推公式 $f(n)=f(n-1)-f(n-2)$，该数列为周期性数列．

【小试牛刀】已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数，若对于 $x\geqslant 0$，都有 $f(x+2)=f(x)$，且当 $x\in[0,2)$ 时，$f(x)=\log_2(x+1)$，则 $f(-2008)+f(2009)$ 的值为（　　）

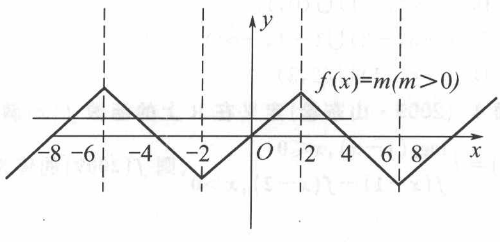
A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

画面 5　(2009 · 山东卷) 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x-4)=-f(x)$，且在区间 $[0,2]$ 上是增函数．若方程 $f(x)=m(m>0)$ 在区间 $[-8,8]$ 上有四个不同的根 x_1,x_2,x_3,x_4，则 $x_1+x_2+x_3+x_4=$________．

【画外之音】本题需要综合利用函数的奇偶性、单调性、对称性、周期性，运用数形结合思想和函数与方程思想，借助函数图象来解答．

【方法解析】由 $f(x-4)=-f(x)$ 知 $f(x-8)=f(x)$，所以函数是以 8 为周期的周期函数．由 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0)=0$，又因为 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上是增函数，所以 $f(x)$ 在区间 $[-2,0]$ 上也是增函数，进而可得出 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上是增函数．又因为 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，且满足 $f(x-4)=-f(x)$，所以 $f(x-4)=f(-x)$，所以函数图象关于直线 $x=-2$ 对称，所以 $f(x)$ 在区间 $[-6,-2]$ 上是减函数，这样我们就可以画出 $f(x)$ 在一个周期 $[-6,2]$ 内的大致图象，进而可以画出整个函数的大致图象，如图所示，那么方程 $f(x)=m(m>0)$ 在区间 $[-8,8]$ 上有四个不同的根 x_1,x_2,x_3,x_4，不妨设 $x_1<x_2<x_3<x_4$，由对称性知 $x_1+x_2=-12$，$x_3+x_4=4$．

所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=-12+4=-8$．



【借题发挥】抽象符号函数是函数问题的一种重要形式，它同具体函数一样，也可以依据函数的基本性质了解函数图像的基本形状，通过数形结合思想解决问题．掌握函数的一些基本性质，会有助于我们迅速的解决问题．

若 $f(m+x)=f(m-x)$ 或 $f(2m-x)=f(x)$ 成立，则 $f(x)$ 图像的一条对称轴为 $x=m$；

若 $f(m+x)=-f(m-x)$ 或 $f(2m-x)=-f(x)$ 成立，则 $f(x)$ 图像的一个对称中心为 $(m,0)$．

若 $f(x+m)=f(x-n)$ 恒成立，则 $f(x)$ 是周期函数，$T=m+n$ 为一个周期；

若 $f(x+m)=-f(x)$ 或 $f(x+m)=\dfrac{1}{f(x)}$ 或 $f(x+m)=-\dfrac{1}{f(x)}$ 恒成立，则 $f(x)$ 均为周期函数，$T=2m$ 为一个周期；在这里要注意区分函数的对称性与周期性条件的差异．

【小试牛刀】已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 单调增加，则满足 $f(2x-1)<f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ 的 x 的取值范围是（　　）

A. $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$　　B. $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

C. $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right)$　　D. $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right)$

画面 6　(2009 · 浙江卷) 已知函数 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的不恒为零的偶函数，且对任意实数 $f(x)$ 都有 $xf(x+1)=(x+1)f(x)$，则 $f\left(\dfrac{5}{2}\right)$ 的值是（　　）

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. $\dfrac{5}{2}$

【画外之音】本题是求抽象函数的函数值问题，一般是利用赋值法．

【方法解析】若 $x\neq 0$，则有 $f(x+1)=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)f(x)$，取 $x=-\dfrac{1}{2}$，$\because f(x)$ 是偶函数，则 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，则有：

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}f\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right).$$

由此得 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，于是，

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{1+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}f\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{5}{3}f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{3}f\left(\frac{1}{2}+1\right)$$
$$=\frac{5}{3}\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)=5f\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

故选 A.

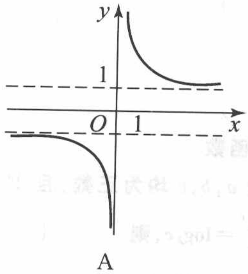
【借题发挥】本题利用偶函数的性质，通过给自变量 x 赋值 $x=-\dfrac{1}{2}$，先求出 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，然后将 $f\left(\dfrac{5}{2}\right)$ 转化为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，赋值法是解决抽象函数问题的一种重要方法．

【小试牛刀】若 $f(x)$ 是 **R** 上周期为 5 的奇函数，且满足 $f(1)=1$，$f(2)=2$，则 $f(3)-f(4)=$（　　）

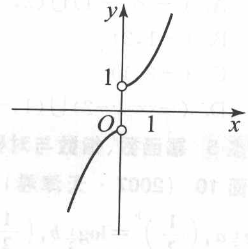
A. -1　　B. 1　　C. -2　　D. 2

考点 3 函数的图像及其变换

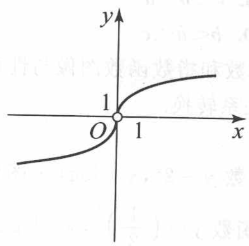
画面 7 (2009·山东卷)函数 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ 的图象大致为 ( )



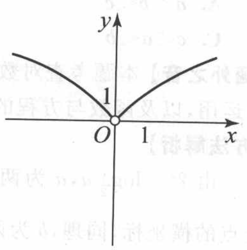
A



B



C



D

【画外之音】本题考查函数的图象以及函数的定义域、值域、单调性等性质，本题的难点在于给出的函数比较复杂，需要考生深刻认识函数的结构特征，深入考查函数性质才能解决.

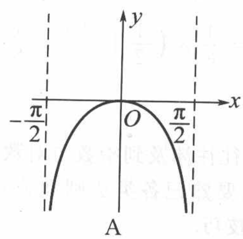
【方法解析】要使得函数有意义，需使 $e^x-e^{-x}\neq0$，因此其定义域为 $\{x|x\neq0\}$，排除 C，

又因为 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}-e^x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，排除 D，

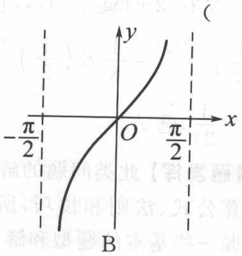
$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$，$y=\dfrac{u+1}{u-1}$，$u=e^{2x}$，利用复合函数的单调性，当 $x\geqslant0$ 时，函数为减函数，故选 A.

【借题发挥】函数的解析式与函数图像是函数的两种表现形式，二者相辅相成，已知函数解析式可以知道函数图像的形状；已知函数图像也可以很清晰的看出函数的主要性质，在解题时要互为转化、互相补充，一般从函数的三要素(即定义域、对应法则、值域)与四性质(即单调性、奇偶性、周期性、对称性)方面切入思考，复合函数单调性的判断可简记为"同增异减".

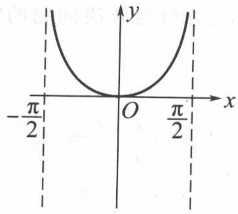
【小试牛刀】函数 $y=\ln\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象是 ( )



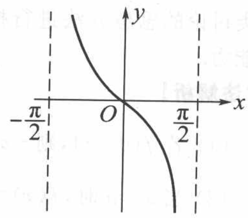
A



B



C



D

画面 8 (2009·全国卷)函数 $f(x)$ 的定义域为 R，若 $f(x+1)$ 与 $f(x-1)$ 都是奇函数，则 ( )

A. $f(x)$ 是偶函数　　B. $f(x)$ 是奇函数

C. $f(x)=f(x+2)$　　D. $f(x+3)$ 是奇函数

【画外之音】本题考查函数的奇偶性，可依据函数奇偶性定义，利用函数的解析式进行判断.

【方法解析】∵ $f(x+1)$ 与 $f(x-1)$ 都是奇函数，

∴ $f(-x+1)=-f(x+1)$，$f(-x-1)=-f(x-1)$，

∴ $f(-x+3)=f(-(x-2)+1)=-f((x-2)+1)=-f(x-1)=f(-x-1)$，

$f(x+3)=f((x+2)+1)=-f(-(x+2)+1)=-f(-x-1)$，

$f(-x+3)=-f(x+3)$，即 $f(x+3)$ 是奇函数. 故选 D.

【借题发挥】判断函数的奇偶性，既可以用代数方法，通过函数解析式判断；又可以用几何方法，通过函数图像的对称性判断，本题还可以利用函数的图像变换进行判断.

$f(x+1)$ 与 $f(x-1)$ 图像可以分别由 $f(x)$ 的图像左右平移一个单位而得到，因为 $f(x+1)$ 与 $f(x-1)$ 都是奇函数，∴函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(1,0)$，及点 $(-1,0)$ 对称，函数 $f(x)$ 是周期 $T=2[1-(-1)]=4$ 的周期函数，∴ $(-3,0)$ 也是函数的对称中心，即 $f(x+3)$ 是奇函数. 故选 D. 若一个函数有两条对称轴，该函数一定为周期函数，两条对称轴之间是函数的半个周期；若一个函数既有对称轴、又有对称中心，该函数也一定为周期函数，对称轴和对称中心之间是函数四分之一周期.

【小试牛刀】已知定义域为 R 的函数 $f(x)$ 在区间 $(8,+\infty)$ 上为减函数，且函数 $y=f(x+8)$ 为偶函数，则 ( )

A. $f(6)>f(7)$　　B. $f(6)>f(9)$

C. $f(7)>f(9)$　　D. $f(7)>f(10)$

考点 4 二次函数

画面 9 (2009·江苏卷)设 a 为实数，函数 $f(x)=2x^2+(x-a)|x-a|$.

(1) 若 $f(0)\geqslant1$，求 a 的取值范围；

(2) 求 $f(x)$ 的最小值；

(3) 设函数 $h(x)=f(x)$，$x\in(a,+\infty)$，直接写出(不需给出演算步骤)不等式 $h(x)\geqslant1$ 的解集.

【画外之音】本题主要考查函数的概念、性质、图象及解一元二次不等式等基础知识，考查灵活运用数形结合、

分类讨论的思想方法进行探索、分析与解决问题的综合能力.

【方法解析】

(1) 若 $f(0)\geqslant 1$，则 $-a|a|\geqslant 1\Rightarrow\begin{cases}a<0\\a^2\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow a\leqslant -1$.

(2) 当 $x\geqslant a$ 时，$f(x)=3x^2-2ax+a^2$，

$f(x)_{\min}=\begin{cases}f(a),a\geqslant 0\\f\left(\dfrac{a}{3}\right),a<0\end{cases}$，即 $f(x)_{\min}=\begin{cases}2a^2,a\geqslant 0\\\dfrac{2a^2}{3},a<0\end{cases}$.

当 $x\leqslant a$ 时，$f(x)=x^2+2ax-a^2$，

$f(x)_{\min}=\begin{cases}f(-a),a\geqslant 0\\f(a),a<0\end{cases}$，即 $f(x)_{\min}=\begin{cases}-2a^2,a\geqslant 0\\2a^2,a<0\end{cases}$.

综上 $f(x)_{\min}=\begin{cases}-2a^2,a\geqslant 0\\\dfrac{2a^2}{3},a<0\end{cases}$.

(3) $x\in(a,+\infty)$ 时，$h(x)\geqslant 1$ 得 $3x^2-2ax+a^2-1\geqslant 0$，$\Delta=4a^2-12(a^2-1)=12-8a^2$，当 $a\leqslant -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $a\geqslant\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 时，$\Delta\leqslant 0$，$x\in(a,+\infty)$；

当 $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}<a<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 时，$\Delta>0$，得：

$\begin{cases}\left(x-\dfrac{a-\sqrt{3-2a^2}}{3}\right)\left(x-\dfrac{a+\sqrt{3-2a^2}}{3}\right)\geqslant 0\\x>a\end{cases}$

讨论得：当 $a\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 时，解集为 $(a,+\infty)$；

当 $a\in\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，解集为 $\left(a,\dfrac{a-\sqrt{3-2a^2}}{3}\right]\cup\left[\dfrac{a+\sqrt{3-2a^2}}{3},+\infty\right)$；

当 $a\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 时，解集为 $\left[\dfrac{a+\sqrt{3-2a^2}}{3},+\infty\right)$.

综上① 当 $a\in\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 时，解集为 $(a,+\infty)$；

② 当 $a\in\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，解集为

$\left(a,\dfrac{a-\sqrt{3-2a^2}}{3}\right]\cup\left[\dfrac{a+\sqrt{3-2a^2}}{3},+\infty\right)$；

③ 当 $a\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 时，解集为

$\left[\dfrac{a+\sqrt{3-2a^2}}{3},+\infty\right)$.

【借题发挥】二次函数是中学阶段最重要的函数，是历年高考的重点内容，近几年对二次函数的考查多以变式为主，或作为函数的导函数解析式中的因式，在函数的解析式中含有绝对值的函数可转化为分段函数处理，灵活运用数形结合、分类讨论的思想方法是解决问题的关键，对考生的分析与解决问题的综合能力要求较高.

【小试牛刀】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x, & x\geqslant 0\\4x-x^2, & x<0\end{cases}$，若 $f(2-a^2)>f(a)$，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

B. $(-1,2)$

C. $(-2,1)$

D. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

考点5 幂函数、指数与对数函数

画面10 (2007·天津卷)设 a,b,c 均为正数，且 $2^a=\log_{\frac{1}{2}}a$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^b=\log_{\frac{1}{2}}b$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^c=\log_2 c$，则 ( )

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$

C. $c<a<b$　　D. $b<a<c$

【画外之音】本题考查对数函数和指数函数图像与性质的运用，以及函数与方程的关系转换.

【方法解析】

由 $2^a=\log_{\frac{1}{2}}a$，a 为两函数 $y=2^x$，$y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 图像交点的横坐标，同理，b 为两函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，$y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 图像交点的横坐标，c 为两函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，$y=\log_2 x$ 图像交点的横坐标，在同一坐标系中作出以上各函数图像，就可以确定 a、b、c 的大小关系，选 A.

【借题发挥】在解决指数与对数函数问题时，恰当的利用函数图像，可以突出问题的直观性，并获得优美的解题方法.

【小试牛刀】设 $a=\log_{\frac{1}{3}}2$，$b=\log_{\frac{1}{2}}3$，$c=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0.3}$，则 ( )

A. $a<c<b$　　B. $b<c<a$

C. $b<a<c$　　D. $a<b<c$

画面11 (2009·辽宁卷)已知函数 $f(x)$ 满足：当 $x\geqslant 4$ 时，$f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$；当 $x<4$ 时，$f(x)=f(x+1)$，则 $f(2+\log_2 3)=$ ( )

A. $\dfrac{1}{24}$　　B. $\dfrac{1}{12}$

C. $\dfrac{1}{8}$　　D. $\dfrac{3}{8}$

【画外之音】本题考查分段函数的求值以及转化思想.

【方法解析】

$\because 3<2+\log_2 3<4$，$\therefore f(2+\log_2 3)=f(3+\log_2 3)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3+\log_2 3}=\dfrac{1}{8}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2 3}=\dfrac{1}{8}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{24}$，选 A.

【借题发挥】此类问题的解决往往涉及到指数与对数的运算公式、法则和技巧，所以要熟记各类法则和公式，掌握一些基本的题型和解题技巧.